Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Б. Бешимов, О неувеличении плотности и слабой плотности слабо нормальными функторами, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 527–531

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:52:26

О неувеличении плотности и слабой плотности слабо нормальными функторами

Р. Б. Бешимов

В статье доказывается, что если ковариантный функтор $\mathcal{F}: \mathbf{Compr} \rightarrow \mathbf{Compr}$ слабо нормален, то для любого бесконечного тихоновского пространства X имеет место $d(\mathcal{F}^\beta(X)) \leq d(X)$ и $wd(\mathcal{F}^\beta(X)) \leq wd(X)$.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Исследование ковариантных функторов в категории Тор топологических пространств с непрерывными отображениями в качестве морфизмов началось с момента выделения топологии в отдельную область математики. В работах Щепина [1] построена далеко продвинутая и очень содержательная общая теория ковариантных функторов. Он выделил ряд естественных и малоограничительных свойств функторов и дал определение нормального функтора. Везде далее в работе под функтором мы понимаем ковариантный функтор.

Ковариантный функтор $\mathcal{F}: \mathbf{Compr} \rightarrow \mathbf{Compr}$ называется *нормальным* [1], если он непрерывен, сохраняет вес, пересечения и прообразы, мономорфен и эпиморфен и переводит одноточечное пространство в одноточечное, а пустое – в пустое.

Однако как показал Заричный [2], не все условия, составляющие определение нормального функтора, являются независимыми: можно отказаться от мономорфности и сохранения пересечений.

В работе [3] Чигогидзе доказал, что если нормальный функтор $\mathcal{F}: \mathbf{Compr} \rightarrow \mathbf{Compr}$, где $\mathbf{Compr}$ – категории всех бикомпактов и их непрерывных отображений, то его можно продолжить до ковариантного функтора $\mathcal{F}^\beta: \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{Tych}$, где $\mathbf{Tych}$ – категории всех тихоновских пространств и их непрерывных отображений, с сохранением нормальности, естественно, уже в соответствующем для $\mathbf{Tych}$ смысле. Такое продолжение всегда существует и оно единственно.

Функтор $\mathcal{F}^\beta: \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{Tych}$ будем называть *нормальным* [3], если он непрерывен, сохраняет вес, вложения, пересечения, прообразы, точку, пустое множество и переводит k -накрывающие отображения в сюръекции.

Приведем некоторые понятия из общей топологии.

Число Суслина топологического пространства X обозначается через $c(X)$ и определяется как наименьшее из всех кардинальных чисел $\tau \geq \aleph_0$, удовлетворяющих следующему условию: мощность каждой системы попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X не превосходит τ .

Инвариант $c(X)$ называется числом Суслина пространства X . Если $c(X) \leq \aleph_0$, то говорят, что X удовлетворяет *условию Суслина* [4].

Семейство λ непустых подмножеств топологического пространства X называется π -сетью, если для любого непустого открытого подмножества U пространства X найдется элемент семейства λ , лежащий в множестве U . π -сеть топологического пространства X , состоящая только из открытых в X множеств, называется π -базой топологического пространства X [4].

В работе [5] было введено понятие слабой плотности топологических пространств, которое является обобщением понятия плотности топологических пространств.

Говорят, что *слабая плотность* [5] топологического пространства X равна $\tau \geq \aleph_0$, если τ – наименьшее кардинальное число такое, что в X существует π -база, распадающаяся на τ центрированных систем открытых множеств, т.е. $B = \bigcup \{B_\alpha : \alpha \in A\}$ есть π -база, где B_α – центрированная система открытых множеств для каждого $\alpha \in A$, $|A| = \tau$.

Слабая плотность топологического пространства X обозначается через $wd(X)$. Если $wd(X) = \aleph_0$, то топологическое пространство X называется *слабо сепарабельным* [6].

В работе [5] доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 [5]. Пусть Y всюду плотно в X . Тогда $wd(Y) = wd(X)$.

Пусть X – некоторый бикомпакт, $\mathcal{F} : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ – функтор и $x \in \mathcal{F}(X)$. *Степенью точки x* (обозначается $\deg(x)$) называется такое наименьшее натуральное число n , что $x \in \mathcal{F}(f)(\mathcal{F}(K))$ для некоторого отображения $f : K \rightarrow X$ n -точечного пространства K . *Степенью функтора $\mathcal{F}$* (обозначается $\deg \mathcal{F}$) называется (конечное или бесконечное) число

$$\deg \mathcal{F} = \sup\{\deg(x) : x \in \mathcal{F}(X) \text{ и } X \text{ – бикомпакт}\}.$$

Носителем точки $x \in \mathcal{F}(X)$ называется замкнутое подмножество $\text{supp}_{\mathcal{F}}(x) \subseteq X$ такое, что соотношения $A \supseteq \text{supp}_{\mathcal{F}}(x)$ и $x \in \mathcal{F}(A)$ эквивалентны для любого замкнутого множества $A \subseteq X$.

Для произвольного натурального числа n и непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ положим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(X) &= \{x \in \mathcal{F}(X) : |\text{supp}_{\mathcal{F}}(x)| \leq n\}, \\ \mathcal{F}_n(f) &= \mathcal{F}(f)|_{\mathcal{F}_n(X)}. \end{aligned}$$

Известно, что $\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{F}_n(X)) \subseteq \mathcal{F}_n(Y)$, при этом операция $\mathcal{F}_n : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ задает ковариантный функтор (см. [7]).

В 1997 г. Федорчуком и Тодорчевичем была доказана следующая

ТЕОРЕМА 1.1 [8]. Пусть $\mathcal{F} : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ – нормальный функтор бесконечной степени. Тогда для любого бесконечного бикомпакта X имеем

$$c(\mathcal{F}(X)) = c(X^\omega).$$

Так как число Суслина наследуется всяким всюду плотным подмножеством, то теорема 1.1 верна для любого бесконечного тихоновского пространства X , поскольку оно всюду плотно в своем стоун-чеховском бикомпактном расширении, т.е. верна следующая

ТЕОРЕМА 1.2 [8]. Пусть X – бесконечное тихоновское пространство. Тогда для любого нормального функтора $\mathcal{F} : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ бесконечной степени имеем

$$c(\mathcal{F}^\beta(X)) = c(X^\omega).$$

Ковариантный функтор $\mathcal{F} : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ называется *слабо нормальным* [9], если $\mathcal{F} : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ удовлетворяет всем условиям нормальности кроме сохранения прообразов.

2. Основные результаты. В этом пункте доказывается, что если ковариантный функтор $\mathcal{F} : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ слабо нормален, то $\mathcal{F}^\beta : \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$ не увеличивает плотность и слабую плотность для любого бесконечного тихоновского пространства.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть ковариантный функтор $\mathcal{F} : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ слабо нормален. Тогда для любого бикompакта X множество $\mathcal{F}_\omega(X) = \bigcup \{\mathcal{F}_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{F}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть бикompакт X нульмерен. Тогда X может быть представлен как предел обратного спектра $S = \{X_\alpha : \pi_\beta^\alpha, A\}$ из конечных пространств X_α и эпиморфизмов π_β^α . В силу непрерывности функтора $\mathcal{F}$ имеем $\mathcal{F}(X) = \varprojlim \mathcal{F}(S)$. Возьмем произвольное непустое открытое множество $U \subset \mathcal{F}(X)$. Существует $\alpha \in A$ и непустое открытое множество $V \subset \mathcal{F}(X_\alpha)$ такое, что $(\mathcal{F}(\pi_\alpha))^{-1}V \subset U$, где $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ – сквозная проекция спектра S . Пусть $a \in V$. Поскольку $\text{supp}(a) \subset X_\alpha$ и X_α – конечное множество, $\text{supp}(a)$ состоит из конечного числа элементов. Поскольку все проекции спектра S являются эпиморфизмами, сквозные проекции также являются отображениями “на” [10]. Следовательно, существует конечное множество $X^0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ такое, что $\pi_\alpha(X^0) = \text{supp}(A)$. С другой стороны, функтор $\mathcal{F}$ сохраняет эпиморфизмы, поэтому $\mathcal{F}(\pi_\alpha)(\mathcal{F}(X^0)) = \mathcal{F}(\text{supp}(a))$. Но $a \in \mathcal{F}(\text{supp}(a))$, так как $\mathcal{F}$ сохраняет вложения. Откуда вытекает существование такого элемента $b \in \mathcal{F}(X^0)$, что $\mathcal{F}(\pi_\alpha)(b) = a$. Но $\mathcal{F}(X^0) = \mathcal{F}_n(X^0)$, поскольку X^0 состоит из n элементов. Значит, $b \in \mathcal{F}_n(X^0) \subset \mathcal{F}_n(X)$. Таким образом, $\mathcal{F}(\pi_\alpha)(\mathcal{F}_n(X)) \cap V \neq \emptyset$. Следовательно, $\mathcal{F}_n(X) \cap (\mathcal{F}(\pi_\alpha))^{-1}V \neq \emptyset$ и, тем более, $\mathcal{F}_n(X) \cap U \neq \emptyset$. Таким образом, произвольное открытое подмножество $U \subset \mathcal{F}(X)$ пересекается с множеством $\mathcal{F}_\omega(X)$. Таким образом, $\mathcal{F}_\omega(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$.

2) Пусть X – произвольный бикompакт. Существует нульмерный бикompакт Z и непрерывное отображение $f : Z \rightarrow X$ на X . По уже доказанному $\mathcal{F}_\omega(Z)$ всюду плотно в $\mathcal{F}(Z)$. Следовательно, $\mathcal{F}(f)(\mathcal{F}_\omega(Z))$ всюду плотно в $\mathcal{F}(f)(\mathcal{F}(Z))$. Но последнее множество совпадает с $\mathcal{F}(X)$ в силу эпиморфности функтора $\mathcal{F}$. С другой стороны, $\mathcal{F}(f)(\mathcal{F}_n(Z)) \subset \mathcal{F}_n(X)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В самом деле, если $a_n \in \mathcal{F}_n(Z)$, т.е. если $|\text{supp}(a)| \leq n$, то из $a \in \mathcal{F}(\text{supp}(a))$ вытекает, что $\mathcal{F}(f)(a) \in \mathcal{F}(f(\text{supp}(a)))$. Но $|f(\text{supp}(a))| \leq |\text{supp}(a)| \leq n$. Следовательно, $\mathcal{F}(f)(a) \in \mathcal{F}_n(X)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\omega(X) &= \bigcup \{\mathcal{F}_n(X) : n \in \mathbb{N}\} \supset \{\mathcal{F}(f)(\mathcal{F}_n(Z)) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \mathcal{F}(f)\left(\bigcup \{\mathcal{F}_n(Z) : n \in \mathbb{N}\}\right) = \mathcal{F}(f)(\mathcal{F}_\omega(Z)). \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{F}_\omega(X)$ содержит множество $\mathcal{F}(f)(\mathcal{F}_\omega(Z))$, которое по доказанному выше всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$. Значит, $\mathcal{F}_\omega(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть ковариантный функтор $\mathcal{F} : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ слабо нормален. Пусть Y – бикompакт, и X всюду плотно в Y . Тогда $\mathcal{F}_n(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}_n(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – бикомпакт. Напомним (см. [11]) определение отображения $\pi_{n,Y} : Y^n \times \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$. Мы отождествляем Y^n с множеством $C(n, Y)$ отображений из $\{1, 2, \dots, n\}$ в Y и полагаем $\pi_{n,Y}(\varphi, a) = \mathcal{F}(\varphi)a$. Басманов доказал [11], что $\mathcal{F}$ есть функтор степени n , т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$, если $\text{Im } \pi_{n,Y} = \mathcal{F}(Y)$ для всякого бикомпакта Y . Поэтому, если X всюду плотно в бикомпакте Y , то $X^n \times \mathcal{F}(n)$ всюду плотно в $Y^n \times \mathcal{F}(n)$ и, следовательно,

$$\mathcal{F}_n(X) = \pi_{n,Y}(X^n \times \mathcal{F}(n))$$

всюду плотно в $\pi_{n,Y}(Y^n \times \mathcal{F}(n)) = \mathcal{F}_n(Y)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть X – тихоновское пространство и X всюду плотно в Y . Тогда $\mathcal{F}_\omega^\beta(X)$ всюду плотно в тихоновском пространстве $\mathcal{F}_\omega^\beta(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 множество $\mathcal{F}_n^\beta(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}_n^\beta(Y)$, поскольку $\mathcal{F}_n(Z) = \mathcal{F}_n^\beta(Z)$ для любого тихоновского пространства Z . Следовательно,

$$\mathcal{F}_\omega^\beta(X) = \bigcup \{\mathcal{F}_n^\beta(X) : n \in \mathbb{N}\}$$

всюду плотно в

$$\bigcup \{\mathcal{F}_n^\beta(Y) : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{F}_\omega^\beta(Y).$$

Из теоремы 2.1 и утверждения 2.1 получим

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Если функтор $\mathcal{F} : \text{Comr} \rightarrow \text{Comr}$ слабо нормален и тихоновское пространство X всюду плотно в бикомпакте Y , то $\mathcal{F}_\omega^\beta(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}^\beta(Y)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Если функтор $\mathcal{F} : \text{Comr} \rightarrow \text{Comr}$ слабо нормален и тихоновское пространство X всюду плотно в тихоновском пространстве Y , то $\mathcal{F}_\omega^\beta(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}^\beta(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X всюду плотно в тихоновском пространстве Y . Тогда X всюду плотно в βY . В силу утверждения 2.1 множество $\mathcal{F}_\omega^\beta(X)$ всюду плотно в бикомпакте $\mathcal{F}(\beta Y)$. Но $\mathcal{F}_\omega^\beta(X) \subset \mathcal{F}^\beta(Y) \subset \mathcal{F}(\beta Y)$. Следовательно, $\mathcal{F}_\omega^\beta(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}^\beta(Y)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Если ковариантный функтор $\mathcal{F} : \text{Comr} \rightarrow \text{Comr}$ слабо нормален, то для любого бесконечного тихоновского пространства X имеем

$$d(\mathcal{F}^\beta(X)) \leq d(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – всюду плотное подмножество в тихоновском пространстве X такое, что $|Y| = \tau = d(X)$. В силу бесконечности Y имеем $|\text{exp}_\omega Y| = \tau$. Поскольку $\mathcal{F}$ сохраняет вес, для любого конечного Z бикомпакт $\mathcal{F}(Z) = \mathcal{F}^\beta(Z)$ метризуем и, значит, сепарабелен. Для каждого элемента $Z \in \text{exp}_\omega Y$ зафиксируем счетное множество D_Z , всюду плотное в $\mathcal{F}(Z)$. Тогда $D = \bigcup \{D_Z : Z \in \text{exp}_\omega Y\}$ всюду плотно в

$$\bigcup \{\mathcal{F}(Z) : Z \in \text{exp}_\omega Y\} = \mathcal{F}_\omega(Y) = \mathcal{F}_\omega^\beta(Y).$$

Следовательно, согласно утверждению 2.3 множество D всюду плотно в $\mathcal{F}^\beta(X)$. Но в силу счетности всех D_Z имеем, что $|D| \leq \omega_0 \cdot |\text{exp}_\omega Y| = \tau$. Следовательно, $d(\mathcal{F}^\beta(X)) \leq \tau$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если ковариантный функтор $\mathcal{F}: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ слабо нормален, то для любого бесконечного бикompакта X

$$d(\mathcal{F}(X)) \leq d(X).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если ковариантный функтор $\mathcal{F}: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ слабо нормален, то для любого бесконечного сепарабельного пространства X пространство $\mathcal{F}^\beta(X)$ также сепарабельно.

ТЕОРЕМА 2.3. Если ковариантный функтор $\mathcal{F}: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ слабо нормален, то для любого бесконечного тихоновского пространства X имеем

$$wd(\mathcal{F}^\beta(X)) \leq wd(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – бесконечное тихоновское пространство и $wd(X) = \tau$. Тогда из результатов работы [12] имеем $d(\beta X) = \tau$. В силу следствия 2.1 имеем, что $d(\mathcal{F}(\beta X)) \leq \tau$. Ясно, что $\mathcal{F}^\beta(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}(\beta X)$. Так как слабая плотность не увеличивается при переходе к всюду плотному подпространству, то в силу утверждения 1.1 имеем, что $wd(\mathcal{F}^\beta(X)) \leq \tau$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если ковариантный функтор $\mathcal{F}: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ слабо нормален, то для любого бесконечного слабо сепарабельного пространства X пространство $\mathcal{F}^\beta(X)$ также слабо сепарабельно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36:3** (1981), 3–62.
- [2] М. М. Заричный, “О свойствах нормальных функторов”, *Тезисы докладов V Тираспольского симпозиума по общей топологии и ее приложениям*, Штинца, Кишинев, 1985, 96–97.
- [3] А. Ч. Чигогидзе, “О продолжении нормальных функторов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 6, 23–26.
- [4] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, Наука, М., 1974.
- [5] R. B. Beshimov, “Some cardinal properties of topological spaces connected with weakly density”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **10:3** (2004), 17–22.
- [6] R. B. Beshimov, “A note on weakly separable spaces”, *Math. Morav.*, **6** (2002), 9–19.
- [7] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, МГУ, М., 1988.
- [8] V. V. Fedorchuk, S. Todorčević, “Cellularity of covariant functors”, *Topology Appl.*, **76:2** (1997), 125–150.
- [9] T. Radul, “On the functor of order-preserving functionals”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **39:3** (1998), 609–615.
- [10] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, Наука, М., 1973.
- [11] В. Н. Басманов, “Ковариантные функторы, ретракты и размерность”, *Докл. АН СССР*, **271:5** (1983), 1033–1036.
- [12] E. K. van Douwen, “Density of compactifications”, *Set-Theoretic Topology* (Papers, Inst. Medicine and Math., Ohio Univ., Athens, Ohio, 1975–1976), Academic Press, New York, 1977, 97–110.

Р. Б. Бешимов

Институт математики и информационных технологий АН РУ
E-mail: rbeshimov@mail.ru

Поступило

04.05.2007

Исправленный вариант

21.12.2007