Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Дейкалова, Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 532–551

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:38:48

Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере

М. В. Дейкалова

Обсуждаются три взаимосвязанные экстремальные задачи на множестве $\mathcal{P}_{n,m}$ алгебраических многочленов заданного порядка n на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geq 2$. (1) Норма функционала $F(h) = F_h P_n = \int_{\mathbb{C}(h)} P_n(x) dx$, являющегося интегралом по сферической шапочке $\mathbb{C}(h)$ углового радиуса $\arccos h$, $-1 < h < 1$, на множестве $\mathcal{P}_{n,m}$ с нормой пространства $L(\mathbb{S}^{m-1})$ суммируемых функций на сфере. (2) Наилучшее приближение в $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ характеристической функции χ_h шапочки $\mathbb{C}(h)$ подпространством $\mathcal{P}_{n,m}^\perp$ функций из $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$, ортогональных пространству многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$. (3) Наилучшее приближение в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ функции χ_h самим пространством многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$. Приведено решение всех трех задач для значения $h = t(n, m)$, являющегося наибольшим корнем многочлена одного переменного порядка $n+1$, наименее уклоняющегося от нуля в пространстве L_1^ϕ на интервале $(-1, 1)$ с ультрасферическим весом $\phi(t) = (1-t^2)^\alpha$, $\alpha = (m-3)/2$.

Библиография: 11 названий.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, есть евклидово пространство со скалярным произведением

$$xy = \sum_{k=1}^m x_k y_k, \quad x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_m),$$

и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. При $r > 0$ рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m$ шар $\mathbb{B}^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r\}$ и сферу $\mathbb{S}^{m-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = r\}$ радиуса r с центром в начале координат; единичные шар и сферу ($r = 1$) будем обозначать соответственно через $\mathbb{B}^m$ и $\mathbb{S}^{m-1}$. С помощью числа h , $-1 < h < 1$, и точки $e \in \mathbb{S}^{m-1}$ определим множество

$$\mathbb{C}(h, e) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} : xe \geq h\} \subset \mathbb{S}^{m-1},$$

являющееся сферической шапочкой с центром в точке e углового (сферического) радиуса $\theta = \arccos h$. В дальнейшем часто будет использоваться сферическая шапочка

$$\mathbb{C}(h) = \mathbb{C}(h, e_m) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} : x_m \geq h\}$$

с центром в “северном полюсе” $e_m = (0, \dots, 0, 1)$ сферы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00233).

Сделаем несколько замечаний относительно рассматриваемых в данной работе интегралов по следующим множествам: шар $\mathbb{B}^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r\}$ радиуса r с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$, сфера $\mathbb{S}^{m-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = r\}$ радиуса r пространства или, более общо, шар $\mathbb{B}^k(r)$ и сфера $\mathbb{S}^{k-1}(r)$ некоторого линейного подпространства размерности k , $2 \leq k \leq m$, в частности, единичный шар $\mathbb{B}^m = \mathbb{B}^m(1)$, и единичная сфера $\mathbb{S}^{m-1} = \mathbb{S}^{m-1}(1)$. На каждом из этих множеств $\mathbb{H}$ рассматривается классическая мера Лебега (соответствующей размерности). Для измеримого подмножества $E \subset \mathbb{H}$ символом $|E|$ условимся обозначать (соответствующую) меру множества E . Пусть $L(E)$ есть пространство функций, измеримых и суммируемых на E ; для функции $f \in L(E)$ ее интеграл (Лебега) по множеству E будет записываться в виде $\int_E f(x) dx$. Впрочем, ниже в большинстве случаев интегралы можно понимать в римановском смысле (относительно соответствующей меры Жордана). Предполагается, что пространство $L(E) = L_1(E)$ наделено нормой $\|f\|_{L(E)} = \int_E |f(x)| dx$. На множестве E мы будем рассматривать еще пространство $L_\infty(E)$ измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_{L_\infty(E)} = \text{ess sup}\{|f(x)| : x \in E\}$.

Обозначим через $\mathcal{P}_{n,m}$ множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = \sum_{\substack{|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_m \leq n, \\ \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m}} c_\alpha x^\alpha, \quad (1)$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

степени (не выше) n от m (вещественных) переменных с вещественными коэффициентами c_α . В пространстве $\mathcal{P}_{n,m}$ определим линейный функционал $F = F(h)$, $-1 < h < 1$, формулой

$$F(h)P_n = \int_{\mathbb{C}(h)} P_n(x) dx, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}. \quad (2)$$

В данной работе нас интересует норма $\nu_{n,m}(h)$ функционала (2) на пространстве $\mathcal{P}_{n,m}$ с нормой пространства $L(\mathbb{S}^{m-1})$, т.е. величина

$$\nu_{n,m}(h) = \sup\{|F(h)P_n| : P_n \in \mathcal{P}_{n,m}, \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} \leq 1\}; \quad (3)$$

отметим, что $\nu_{n,m}$ является наименьшей константой в неравенстве

$$|F(h)P_n| \leq \nu_{n,m}(h) \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}. \quad (4)$$

Впервые задачу типа (2)–(4) изучал Тайков [1], [2] на множестве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами в связи с исследованием наилучшей константы $c(n)$ в неравенстве типа Джексона–Никольского

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}} \leq c(n) \|f_n\|_{L_{2\pi}}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n,$$

между $C_{2\pi}$ и $L_{2\pi}$ нормами

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\}, \quad \|f_n\|_{L_{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)| dx$$

тригонометрических полиномов заданного порядка. Тайков вычислил норму $\tilde{c}(n)$ функционала

$$Ff_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/(2(n+1))}^{\pi/(2(n+1))} f_n(t) dt, \quad f_n \in \mathcal{T}_n,$$

на подпространстве $\mathcal{T}_n$ с нормой пространства $L_{2\pi}$, т.е. нашел наименьшую константу $\tilde{c}(n)$ в неравенстве

$$|Ff_n| \leq \tilde{c}(n) \|f_n\|_{L_{2\pi}}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n. \quad (5)$$

А именно, он доказал, что *при $n \geq 1$ справедливы следующие утверждения:*

1) *имеет место равенство*

$$\tilde{c}(n) = \frac{1}{2};$$

2) *полином*

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{\cos(n+1)t}{\cos t - \cos(\pi/(2(n+1)))}$$

является экстремальным в неравенстве (5).

Тайков получил этот результат (а также ряд других результатов) с привлечением двойственной задачи [1], [2]. В данной работе для исследования наилучшей константы в неравенстве (4) будет применен аналогичный подход.

Функционал (2) определяется характеристической функцией

$$\chi_h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{C}(h), \\ 0, & x \notin \mathbb{C}(h), \end{cases} \quad (6)$$

сферической шапочки $\mathbb{C}(h)$, а именно

$$F(h)P_n = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \chi_h(x) P_n(x) dx, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}.$$

Пусть $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{P}_{n,m}^\perp$ есть подпространство функций из $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$, ортогональных пространству многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$, т.е. множество всех функций $\varphi \in L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$, обладающих свойством

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} \varphi(t) P_n(t) dt = 0, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}.$$

Рассмотрим наилучшее приближение

$$\omega_{n,m}(h) = \omega(\chi_h, \mathcal{P}_{n,m}^\perp) = \inf\{\|\chi_h - \varphi\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})} : \varphi \in \mathcal{P}_{n,m}^\perp\} \quad (7)$$

в $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ функции χ_h подпространством $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{P}_{n,m}^\perp$.

Пусть q_{n+1} есть алгебраический многочлен со старшим коэффициентом, равным 1, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_1^\phi(-1, 1)$ функций, суммируемых на интервале $(-1, 1)$ с ультрасферическим весом

$$\phi(t) = \phi^{(\alpha)}(t) = (1 - t^2)^\alpha, \quad \alpha = \alpha(m) = \frac{m-3}{2}.$$

Известно, что все $n+1$ нулей многочлена q_{n+1} простые и лежат на $(-1, 1)$; пусть $t(n, m)$ – наибольший из них. Положим

$$g_n^*(t) = c \frac{q_{n+1}(t)}{t - t(n, m)},$$

где константа c выбрана из условия, что норма $\|g_n^*\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}$ многочлена $g_n^*(x_m)$ в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ на сфере равна 1. Одним из основных в данной работе является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *При всех $m \geq 3$, $n \geq 0$ для значения $h = t(n, m)$ справедливы следующие утверждения:*

1) *имеют место равенства*

$$\nu_{n,m}(t(n, m)) = \omega_{n,m}(t(n, m)) = \frac{1}{2};$$

2) *многочлен g_n^* и функция $\varphi_n^* = (1/2) \operatorname{sign} q_{n+1}$ как зональные функции одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, являются экстремальными соответственно в задачах (2)–(4) и (7).*

Результаты данной работы были анонсированы автором в [3] и [4].

2. Общие соображения. Двойственная задача

2.1. Пусть E есть некоторое измеримое подмножество (ненулевой меры) пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, или сферы $\mathbb{S}^{m-1}(r)$, $m \geq 2$. Предположим, что v – некоторая функция, измеримая, неотрицательная, почти всюду отличная от нуля на E . Обозначим через $L_1^v = L_1^v(E)$ (линейное) пространство измеримых на E функций f , для которых произведение $f \cdot v$ суммируемо на E ; это есть банахово пространство относительно нормы (см., например, [5; гл. 3, § 4])

$$\|f\|_{L_1^v(E)} = \int_E |f(x)|v(x) dx, \quad f \in L_1^v(E).$$

Известно (см., например, [5; гл. 4, § 8, теорема 5]), что сопряженным для пространства $L_1^v(E)$ является пространство $L_\infty(E)$ измеримых, существенно ограниченных функций f на E с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in E\} = \inf\{M : |f(x)| \leq M \text{ п.в. на } E\}, \quad f \in L_\infty(E).$$

Более того, линейные ограниченные функционалы y^* на $L_1^v(E)$ имеют вид

$$y^*f = \int_E f(t)y(t)v(t) dt, \quad f \in L_1^v(E),$$

где $y \in L_\infty(E)$ и $\|y^*\|_{(L_1^v(E))^*} = \|y\|_{L_\infty(E)}$.

Пусть $\psi \in L_\infty(E)$ есть конкретная измеримая, ограниченная на E функция, а $\mathcal{F}$ – некоторое линейное (необязательно замкнутое) подпространство пространства $L_1^v(E)$. На множестве $\mathcal{F}$ рассмотрим (линейный) функционал

$$\Psi f = \int_E \psi(t) f(t) v(t) dt, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (8)$$

Обозначим через $c(\Psi, \mathcal{F})$ наилучшую (наименьшую возможную) константу в неравенстве

$$|\Psi f| \leq c(\Psi, \mathcal{F}) \|f\|_{L_1^v(E)}, \quad f \in \mathcal{F}; \quad (9)$$

константу $c(\Psi, \mathcal{F})$ можно интерпретировать как норму функционала (8) на подпространстве $\mathcal{F} \subset L_1^v(E)$.

Обозначим через $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{F}^\perp(v)$ подпространство функций из $L_\infty(E)$, ортогональных пространству $\mathcal{F}$ (с весом v), т.е. множество всех функций $\varphi \in L_\infty(E)$, обладающих свойством

$$\int_E \varphi(t) f(t) v(t) dt = 0, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (10)$$

Рассмотрим наилучшее приближение

$$\omega(\psi, \mathcal{F}^\perp) = \inf \{ \|\psi - \varphi\|_{L_\infty(E)} : \varphi \in \mathcal{F}^\perp \} \quad (11)$$

в $L_\infty(E)$ функции ψ подпространством $\mathcal{F}^\perp \subset L_\infty(E)$.

Следующее утверждение является аналогом соответствующего утверждения Тайкова [1], [2] и доказывается по той же схеме. В дальнейшем относительно измеримой на множестве E функции f будем говорить, что $f \neq 0$, если множество $E(f \neq 0) = \{t \in E : f(t) \neq 0\}$ точек из E с ненулевыми значениями функции имеет ненулевую меру.

ЛЕММА 1. *При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения.*

1) *Имеет место равенство*

$$c(\Psi, \mathcal{F}) = \omega(\psi, \mathcal{F}^\perp). \quad (12)$$

2) *В задаче (11) существует экстремальная функция $\varphi^* \in \mathcal{F}^\perp$. Если подпространство $\mathcal{F}$ является конечномерным, то в задаче (9) также существует экстремальная функция $f^* \in \mathcal{F}$.*

3) *Функция $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, $\tilde{f} \neq 0$, и функция $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}^\perp$ являются экстремальными соответственно в задачах (9) и (11) в том и только том случае, если существует константа A такая, что выполняются следующие два условия:*

$$|\psi - \tilde{\varphi}| \leq |A| \quad \text{п.в. на } E, \quad (13)$$

$$\psi - \tilde{\varphi} = A \operatorname{sign} \tilde{f} \quad \text{п.в. на } E(\tilde{f} \neq 0). \quad (14)$$

При этом обязательно $|A| = c(\Psi, \mathcal{F}) = \omega(\psi, \mathcal{F}^\perp)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{F}^\perp$ наряду с (8) в силу (10) справедлива формула

$$\Psi f = \int_E f(t) \{ \psi(t) - \varphi(t) \} v(t) dt, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (15)$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} |\Psi f| &\leq \int_E |f(t)| \cdot |\psi(t) - \varphi(t)| v(t) dt \\ &\leq \|\psi - \varphi\|_{L_\infty(E)} \int_E |f(t)| v(t) dt = \|\psi - \varphi\|_{L_\infty(E)} \cdot \|f\|_{L_1^v(E)}. \end{aligned}$$

Поскольку $c(\Psi, \mathcal{F})$ есть наименьшая константа в неравенстве (9), отсюда следует неравенство $c(\Psi, \mathcal{F}) \leq \|\psi - \varphi\|_{L_\infty(E)}$, а значит, и неравенство $c(\Psi, \mathcal{F}) \leq \omega(\psi, \mathcal{F}^\perp)$.

Проверим обратное неравенство. Как уже было отмечено, константу $c(\Psi, \mathcal{F})$ можно интерпретировать как норму функционала (8) на подпространстве $\mathcal{F} \subset L_1^v$. В силу теоремы Хана–Банаха этот функционал продолжается до некоторого функционала $\bar{\Psi}$ на все пространство $L_1^v(E)$ с сохранением нормы. Функционал $\bar{\Psi}$ имеет представление

$$\bar{\Psi}f = \int_E \bar{\varphi}(t)f(t)v(t) dt, \quad f \in L_1^v(E), \quad (16)$$

в котором $\bar{\varphi} \in L_\infty(E)$, причем

$$c(\Psi, \mathcal{F}) = \|\bar{\Psi}\|_{(L_1^v(E))^*} = \|\bar{\varphi}\|_{L_\infty(E)}. \quad (17)$$

Так как для $f \in \mathcal{F}$ имеет место равенство $\Psi f = \bar{\Psi}f$, то из (8) и (16) следует соотношение

$$\int_E (\psi(t) - \bar{\varphi}(t))f(t)v(t) dt = 0, \quad f \in \mathcal{F},$$

которое означает, что функция $\varphi^* = \psi - \bar{\varphi}$ ортогональна пространству $\mathcal{F}$. Итак, в силу (17) имеем $c(\Psi, \mathcal{F}) = \|\psi - \varphi^*\|_{L_\infty(E)}$, где $\varphi^* \in \mathcal{F}^\perp$. А отсюда следует неравенство $\omega(\psi, \mathcal{F}^\perp) \leq c(\Psi, \mathcal{F})$. Тем самым, утверждение (12) доказано.

Одновременно с (12) доказано существование экстремальной функции φ^* в задаче (11). Если задача (9) является конечномерной, то, как известно, в этой задаче существует экстремальная функция $f^* \in \mathcal{F}$.

Осталось доказать третье утверждение леммы. Предположим, что функции $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ и $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}^\perp$ являются экстремальными в задачах (9) и (11); это означает, что выполняются равенства

$$|\Psi \tilde{f}| = c(\Psi, \mathcal{F}) \|\tilde{f}\|_{L_1^v(E)}, \quad \|\psi - \tilde{\varphi}\|_{L_\infty(E)} = \omega(\psi, \mathcal{F}^\perp).$$

Можно считать, что $\Psi \tilde{f} \geq 0$ (если это не так, то вместо функции $\tilde{f}$ возьмем функцию $(-\tilde{f})$, которая тоже является экстремальной в (9); при этом $\Psi(-\tilde{f}) = -\Psi \tilde{f} \geq 0$). Положим $\bar{\varphi} = \psi - \tilde{\varphi}$. Согласно (15) имеем

$$\begin{aligned} \Psi \tilde{f} &= \int_E (\psi(t) - \tilde{\varphi}(t)) \tilde{f}(t) v(t) dt \\ &\leq \|\psi - \tilde{\varphi}\|_{L_\infty(E)} \|\tilde{f}\|_{L_1^v(E)} = \omega(\psi, \mathcal{F}^\perp) \|\tilde{f}\|_{L_1^v(E)} = c(\Psi, \mathcal{F}) \|\tilde{f}\|_{L_1^v(E)}. \end{aligned}$$

В силу предположения $\Psi \tilde{f} = c(\Psi, \mathcal{F}) \|\tilde{f}\|_{L_1^v(E)}$ последнее неравенство обращается в равенство. Поэтому почти всюду на множестве $E(\tilde{f} \neq 0)$ справедливо равенство $\bar{\varphi}(t) = c(\Psi, \mathcal{F}) \operatorname{sign} \tilde{f}(t)$, т.е. выполняется свойство (14) с константой $A = c(\Psi, \mathcal{F})$. Неравенство (13) очевидно.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что функции $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}^\perp$ и константа A удовлетворяют условиям (13) и (14), причем $\tilde{f} \not\equiv 0$. Тогда для любого полинома $f \in \mathcal{F}$ имеем

$$\Psi f = \int_E (\psi(t) - \tilde{\varphi}(t)) f(t) v(t) dt = A \int_E (\text{sign } \tilde{f}(t)) f(t) v(t) dt.$$

Отсюда следует неравенство

$$|\Psi f| \leq |A| \|f\|_{L_1^v(E)}, \quad f \in \mathcal{F},$$

которое, как видно из доказательства, на функции $\tilde{f}$ обращается в равенство. Поскольку $\tilde{f} \not\equiv 0$, отсюда следует, что $|A| = c(\Psi, \mathcal{F})$ и функция $\tilde{f}$ является экстремальной. Далее, в силу предположений (13), (14) имеем $\|\psi - \tilde{\varphi}\|_{L_\infty(E)} \leq |A| = c(\Psi, \mathcal{F})$, а значит, функция $\tilde{\varphi}$ является экстремальной в задаче (11). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство $c(\Psi, \mathcal{F}) = 0$ или, что то же самое, равенство $\omega(\psi, \mathcal{F}^\perp) = 0$ имеет место в том и только том случае, если $\psi \in \mathcal{F}^\perp$.

Действительно, пусть $\psi \in \mathcal{F}^\perp$. Тогда

$$\Psi f = \int_E \psi(t) f(t) v(t) dt = 0, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Следовательно, $c(\Psi, \mathcal{F}) = 0$ как норма этого функционала. Обратно, предположим, что $c(\Psi, \mathcal{F}) = 0$. Тогда согласно (12) имеем также

$$\omega(\psi, \mathcal{F}^\perp) = \inf \{ \|\psi - \varphi\|_{L_\infty(E)} : \varphi \in \mathcal{F}^\perp \} = 0.$$

Следовательно, функция ψ почти всюду совпадает с экстремальной функцией $\varphi^* \in \mathcal{F}^\perp$ задачи (11), т.е. $\psi \in \mathcal{F}^\perp$.

2.2. Для нас представляет интерес задача (8), (9) на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ в пространстве $L = L_1(\mathbb{S}^{m-1})$ с единичным весом $v \equiv 1$ на множестве $\mathcal{F} = \mathcal{P}_{n,m}$. Итак, пусть ψ есть измеримая ограниченная функция на сфере, т.е. $\psi \in L_\infty = L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$. На множестве $\mathcal{P}_{n,m}$ алгебраических многочленов определим линейный функционал $F = F(\psi)$ формулой

$$F(\psi)P_n = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \psi(x) P_n(x) dx, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}. \quad (18)$$

Обозначим через $c_{n,m}(\psi)$ наименьшую константу в неравенстве

$$|F(\psi)P_n| \leq c_{n,m}(\psi) \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}; \quad (19)$$

таким образом, $c_{n,m}(\psi)$ является нормой функционала (18) на пространстве $\mathcal{P}_{n,m}$ с нормой пространства $L(\mathbb{S}^{m-1})$.

Пусть $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{P}_{n,m}^\perp$ есть подпространство функций из $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$, ортогональных пространству многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$, т.е. множество всех функций $\varphi \in L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$, обладающих свойством

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} \varphi(t) P(t) dt = 0, \quad P \in \mathcal{P}_{n,m}. \quad (20)$$

Рассмотрим наилучшее приближение

$$\omega_{n,m}(\psi) = \omega(\psi, \mathcal{P}_{n,m}^\perp) = \inf\{\|\psi - \varphi\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})} : \varphi \in \mathcal{P}_{n,m}^\perp\} \quad (21)$$

в $L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ функции ψ подпространством $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{P}_{n,m}^\perp$. В силу леммы 1 можно, в частности, утверждать, что имеет место равенство

$$c_{n,m}(\psi) = \omega(\psi, \mathcal{P}_{n,m}^\perp).$$

Отметим, что задача (2)–(4) является частным случаем задачи (18), (19). А именно, в данном случае функция $\psi = \psi_h$ совпадает с характеристической функцией χ_h сферической шапочки $\mathbb{C}(h)$, определенной в (6).

3. Редукция к одномерным задачам

В этом разделе при $m \geq 3$ (и определенных условиях на функцию ψ) задача (18), (19) будет сведена к одномерной задаче на отрезке. Ниже в наших рассуждениях несколько раз будет использована известная формула (см., например, [6; гл. 18, § 5, п. 676]):

$$|\mathbb{S}^{m-1}(r)| = |\mathbb{S}^{m-1}|r^{m-1}.$$

Нам будет удобно разбить дальнейшие рассуждения на несколько пунктов.

3.1. На единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ рассмотрим полярную систему координат

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \theta_{m-1} \cdots \sin \theta_2 \sin \theta_1, \\ x_2 &= \sin \theta_{m-1} \cdots \sin \theta_2 \cos \theta_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x_{m-1} &= \sin \theta_{m-1} \cos \theta_{m-2}, \\ x_m &= \cos \theta_{m-1}; \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_k \leq \pi, \quad 2 \leq k \leq m-1. \quad (23)$$

Запишем параметризацию (22), (23) в виде

$$\begin{aligned} x &= X(\Theta) = X_m(\Theta) = (x_1(\Theta), \dots, x_m(\Theta)), \\ \Theta &= \Theta_{m-1} = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}) \in \Pi^{m-1} = [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{m-2}; \end{aligned}$$

здесь через $x_k(\Theta)$ обозначена правая часть k -й строки в (22).

В дальнейшем на протяжении данного раздела будем считать, что $m \geq 3$. С помощью полярной замены переменных (22), (23) интеграл от функции $f \in L(\mathbb{S}^{m-1})$ по единичной сфере представляется в виде (см., например, [7; гл. 9, § 1])

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(x) dx = \int_{\Pi^{m-1}} f(X(\Theta)) J_{m-1}(\Theta) d\Theta, \quad (24)$$

$$J_{m-1}(\Theta) = \sin^{m-2} \theta_{m-1} \sin^{m-3} \theta_{m-2} \cdots \sin \theta_2. \quad (25)$$

Более общо, при любом $r > 0$ для функции $f \in L(\mathbb{S}^{m-1}(r))$ имеет место формула

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}(r)} f(x) dx = r^{m-1} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(rx) dx = r^{m-1} \int_{\Pi^{m-1}} f(rX(\Theta)) J_{m-1}(\Theta) d\Theta. \quad (26)$$

Запишем правый интеграл в (24) в виде повторного:

$$\begin{aligned} \int_{\Pi^{m-1}} f(X(\Theta)) J_{m-1}(\Theta) d\Theta &= \int_0^\pi I(\theta_{m-1}) d\theta_{m-1}, \\ I(\theta_{m-1}) &= \int_{\Pi^{m-2}} f(X(\Theta', \theta_{m-1})) J_{m-1}(\Theta', \theta_{m-1}) d\Theta'; \end{aligned}$$

здесь $\Theta' = \Theta_{m-2} = (\theta_1, \dots, \theta_{m-2}) \in \Pi^{m-2}$ и, значит, $\Theta = (\Theta', \theta_{m-1})$. Преобразуем интеграл $I(\theta_{m-1})$. В силу формул (22) точку $x = X_m(\Theta) = X_m(\Theta', \theta_{m-1}) \in \mathbb{S}^{m-1}$ можно представить в виде

$$x = (\sin \theta_{m-1} x', \cos \theta_{m-1}), \quad x' = X_{m-1}(\Theta') \in \mathbb{S}^{m-2}.$$

Помимо этого, из (25) следует, что $J_{m-1}(\Theta) = \sin^{m-2} \theta_{m-1} J_{m-2}(\Theta')$. Поэтому

$$I(\theta_{m-1}) = \sin^{m-2} \theta_{m-1} \int_{\Pi^{m-2}} f(\sin \theta_{m-1} \cdot X_{m-1}(\Theta'), \cos \theta_{m-1}) J_{m-2}(\Theta') d\Theta'.$$

Далее, в силу (24) и (26) имеем

$$I(\theta_{m-1}) = \sin^{m-2} \theta_{m-1} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} f(\sin \theta_{m-1} \cdot x', \cos \theta_{m-1}) dx'.$$

Таким образом, для интеграла по единичной сфере справедлива формула

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(x) dx = \int_0^\pi \sin^{m-2} \theta \int_{\mathbb{S}^{m-2}} f(\sin \theta \cdot x', \cos \theta) dx' d\theta. \quad (27)$$

Во внешнем интеграле правой части (27) сделаем замену $p = \cos \theta$. Тогда

$$\sin \theta = \sqrt{1-p^2}, \quad \theta = \arccos p, \quad d\theta = -\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

В результате получим

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(x) dx = \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} f(\sqrt{1-p^2} x', p) dx' dp. \quad (28)$$

Запишем последнюю формулу в виде

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(x) dx = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 g(p) (1-p^2)^{(m-3)/2} dp, \quad (29)$$

где

$$g(p) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} f(\sqrt{1-p^2} x', p) dx'. \quad (30)$$

Для вещественного числа p обозначим через $\Lambda(p)$ гиперплоскость точек $x = (x_1, \dots, x_{m-1}, p) \in \mathbb{R}^m$; будем записывать точки $x = (x_1, \dots, x_{m-1}, p) \in \Lambda(p)$ в виде

$$x = (x_1, \dots, x_{m-1}, p) = (\tilde{x}, p), \quad \tilde{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

При $p \in (-1, 1)$ сечение сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ гиперплоскостью $\Lambda(p)$ является $(m-2)$ -мерной сферой радиуса $a = a(p) = \sqrt{1-p^2}$ с центром в точке pe_m , параллельной координатному пространству $\mathbb{R}^{m-1}$ точек $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{m-1})$; отождествим эту сферу со

сферой $\mathbb{S}^{m-2}(a) \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Функцию (30) можно интерпретировать как усреднение $g = Sf$ функции f по сечениям сферы гиперплоскостями. Оператор усреднения S , определенный формулой (30), является линейным ограниченным оператором из пространства $L(\mathbb{S}^{m-1})$ на пространство $L_1^\phi(-1, 1)$ с ультрасферическим весом

$$\phi(t) = \phi^{(\alpha)}(t) = (1 - t^2)^\alpha, \quad \alpha = \alpha(m) = \frac{m-3}{2}. \quad (31)$$

При этом в силу (29), (30) имеем

$$\begin{aligned} |\mathbb{S}^{m-2}| \cdot \|Sf\|_{L_1^\phi(-1,1)} &= |\mathbb{S}^{m-2}| \cdot \|g\|_{L_1^\phi(-1,1)} \\ &= |\mathbb{S}^{m-2}| \cdot \int_{-1}^1 |g(p)|(1-p^2)^{(m-3)/2} dp \\ &\stackrel{(30)}{=} |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} f(\sqrt{1-p^2}x', p) dx' \right| (1-p^2)^{(m-3)/2} dp \\ &\leq \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} |f(\sqrt{1-p^2}x', p)| dx' dp \\ &\stackrel{(29)}{=} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} |f(x)| dx = \|f\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$|\mathbb{S}^{m-2}| \cdot \|Sf\|_{L_1^\phi(-1,1)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \quad f \in L(\mathbb{S}^{m-1}). \quad (32)$$

Отметим, что по крайней мере в двух случаях

1) функция f неотрицательная;

2) функция f является зональной, а точнее, зависит лишь от переменного x_m последнее неравенство обращается в равенство. Действительно, если f неотрицательная, то единственное неравенство в приведенной выше цепочке соотношений обращается в равенство. Если же функция f зональная, то $Sf = f$, т.е. $f(x) = f(x_m) = g(p)$ и, очевидно, что неравенство (32) обращается в равенство.

3.2. Убедимся, что для алгебраического многочлена $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$ порядка n от m переменных функция

$$g_n(p) = (SP_n)(p) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} P_n(x' \sqrt{1-p^2}, p) dx' \quad (33)$$

является алгебраическим многочленом одного переменного так же порядка n . Подставим (1) в (33):

$$\begin{aligned} g_n(p) &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} \sum c_\alpha (x_1 \sqrt{1-p^2})^{\alpha_1} \cdots (x_{m-1} \sqrt{1-p^2})^{\alpha_{m-1}} p^{\alpha_m} dx' \\ &= \sum c_\alpha (\sqrt{1-p^2})^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1}} p^{\alpha_m} \cdot \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} dx'. \end{aligned}$$

Итак, получили для функции g_n представление

$$g_n(p) = \sum c_\alpha \eta_{\alpha'} (\sqrt{1-p^2})^{|\alpha'|} p^{\alpha_m}, \quad (34)$$

в котором

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{Z}_+^{m-1}, \quad |\alpha'| = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k,$$

$$\eta_{\alpha'} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} (x')^{\alpha'} dx'.$$

Заменяя в последнем интеграле переменную x' на $-x'$, получаем соотношение $\eta_{\alpha'} = (-1)^{|\alpha'|} \eta_{\alpha'}$. А, значит, $\eta_{\alpha'} = 0$, если число $|\alpha'|$ является нечетным. Таким образом, в формуле (34) присутствуют лишь слагаемые, у которых число $|\alpha'|$ четное. Теперь видно, что функция g_n действительно является многочленом (от переменного p) порядка n . Таким образом, $S\mathcal{P}_{n,m} = \mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n,1}$.

3.3. Пусть ζ есть ограниченная измеримая функция на отрезке $[-1, 1]$. В пространстве $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n,1}$ многочленов одного переменного рассмотрим линейный функционал

$$\Phi g = \int_{-1}^1 \zeta(t) g(t) \phi(t) dt, \quad g \in \mathcal{P}_n, \quad (35)$$

где ϕ есть ультрасферический вес (31). Обозначим через $C_{n,m}(\zeta)$ наилучшую константу в неравенстве

$$|\Phi g| \leq C_{n,m}(\zeta) \|g\|_{L_1^\phi(-1,1)}, \quad g \in \mathcal{P}_n; \quad (36)$$

константу $C_{n,m}(\zeta)$ можно интерпретировать как норму функционала (35) на подпространстве $\mathcal{P}_n$ пространства $L_1^\phi(-1, 1)$ с весом (31).

ЛЕММА 2. *Предположим, что $m \geq 3$ и функция ψ в задаче (18), (19) является зональной, а точнее, $\psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_m) = \zeta(x_m)$, где ζ есть ограниченная измеримая функция на отрезке $[-1, 1]$. Тогда при всех $n \geq 0$ наилучшие константы в неравенствах (19) и (36) связаны соотношением*

$$c_{n,m}(\psi) = C_{n,m}(\zeta). \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$, и пусть $g_n \in \mathcal{P}_n$ есть многочлен одного переменного, построенный по формуле (33). Согласно (36) для многочлена g_n справедливо неравенство

$$|\Phi g_n| \leq C_{n,m}(\zeta) \|g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)}. \quad (38)$$

В силу формул (35), (33) и (28)–(30) имеем

$$\begin{aligned} |\mathbb{S}^{m-2}| \Phi g_n &\stackrel{(35)}{=} |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 \zeta(p) g_n(p) (1-p^2)^{(m-3)/2} dp \\ &\stackrel{(33)}{=} |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 \zeta(p) (1-p^2)^{(m-3)/2} \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} P_n(x' \sqrt{1-p^2}, p) dx' dp \\ &\stackrel{(28)}{=} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \zeta(x_m) P_n(x) dx \stackrel{(18)}{=} F(\zeta) P_n, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{S}^{m-2}| \|g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)} &= |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 |g_n(p)| (1-p^2)^{(m-3)/2} dp \\
 &\stackrel{(33)}{\leq} |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} |P_n(x' \sqrt{1-p^2}, p)| dx' (1-p^2)^{(m-3)/2} dp \\
 &\stackrel{(29), (30)}{=} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} |P_n(x)| dx = \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Отсюда следует, что для функционала (18) с функцией $\psi(x) = \zeta(x_m)$ справедливо неравенство

$$|F(\zeta)P_n| \leq C_{n,m}(\zeta) \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}. \tag{41}$$

Действительно, из (39) получаем

$$|F(\zeta)P_n| = |\mathbb{S}^{m-2}| |\Phi g_n| \stackrel{(38)}{\leq} |\mathbb{S}^{m-2}| C_{n,m}(\zeta) \|g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)} \stackrel{(40)}{\leq} C_{n,m}(\zeta) \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}.$$

Сравнивая (41) с (19), заключаем, что $c_{n,m}(\psi) \leq C_{n,m}(\zeta)$, так как $c_{n,m}(\psi)$ – наименьшая константа в таком неравенстве.

Проверим обратное неравенство. Пусть $g_n \in \mathcal{P}_n$ есть многочлен одного переменного порядка n . Будем его считать многочленом от m переменных: $G_n(x) = G_n(x_1, \dots, x_m) = g_n(x_m)$. В силу (18) и (28)

$$F(\zeta)G_n = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \zeta(x_m) g_n(x_m) dx = \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} \left(\int_{\mathbb{S}^{m-2}} \zeta(p) g_n(p) dx' \right) dp,$$

а поскольку функция $\zeta(p)g_n(p)$ не зависит от x' , то в силу (35) имеем

$$F(\zeta)G_n = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} \zeta(p) g_n(p) dp = |\mathbb{S}^{m-2}| \Phi g_n. \tag{42}$$

Помимо того,

$$\begin{aligned}
 \|G_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} &= \int_{\mathbb{S}^{m-1}} |G_n(x)| dx = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} |g_n(x_m)| dx \\
 &\stackrel{(28)}{=} \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} \left(\int_{\mathbb{S}^{m-2}} |g_n(p)| dx' \right) dp,
 \end{aligned}$$

а поскольку функция $|g_n(p)|$ не зависит от x' , то окончательно имеем

$$\|G_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} |g_n(p)| dp = |\mathbb{S}^{m-2}| \|g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)}. \tag{43}$$

Подставим многочлен G_n в (19):

$$|\Phi g_n| \cdot |\mathbb{S}^{m-2}| \stackrel{(42)}{=} |F(\zeta)G_n| \stackrel{(19)}{\leq} c_{n,m}(\psi) \|G_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} \stackrel{(43)}{=} c_{n,m}(\psi) |\mathbb{S}^{m-2}| \cdot \|g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)}.$$

В результате получаем неравенство

$$|\Phi g_n| \leq c_{n,m}(\psi) \|g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)}, \quad g_n \in \mathcal{P}_n.$$

Сравнивая последнее неравенство с (36), получаем, что $C_{n,m}(\zeta) \leq c_{n,m}(\psi)$, так как $C_{n,m}(\zeta)$ – наименьшая константа в таком неравенстве. Таким образом, равенство (37) проверено. Лемма доказана.

Неравенство (36) является частным случаем неравенства (9). Рассмотрим соответствующую двойственную задачу (12). Обозначим через $\mathcal{P}_n^\perp = \mathcal{P}_n^\perp(\phi)$ множество функций $\varphi \in L_\infty(-1, 1)$, ортогональных пространству многочленов $\mathcal{P}_n$ с ультрасферическим весом (31), т.е. обладающих свойством

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) g_n(t) (1-t^2)^{(m-3)/2} dt = 0, \quad g_n \in \mathcal{P}_n. \quad (44)$$

Рассмотрим величину наилучшего приближения

$$\Omega_{n,m}(\zeta) = \Omega(\zeta, \mathcal{P}_n^\perp(\phi)) = \inf\{\|\zeta - \varphi\|_{L_\infty(-1,1)} : \varphi \in \mathcal{P}_n^\perp(\phi)\} \quad (45)$$

в $L_\infty(-1, 1)$ функции ζ подпространством $\mathcal{P}_n^\perp(\phi) \subset L_\infty(-1, 1)$.

ЛЕММА 3. *Предположим, что $m \geq 3$ и функция ψ в задаче (18), (19) является зональной, а точнее, $\psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_m) = \zeta(x_m)$, где ζ есть ограниченная измеримая функция на отрезке $[-1, 1]$. Тогда при всех $n \geq 0$ величины уклонений (21) и (45) связаны соотношением*

$$\omega_{n,m}(\psi) = \Omega_{n,m}(\zeta). \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}_{n,m}^\perp$ и z есть функция (одного переменного $p \in [-1, 1]$), построенная для функции φ по формуле (33), т.е.

$$z(p) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} \varphi(x' \sqrt{1-p^2}, p) dx'.$$

Убедимся, что функция z удовлетворяет условию ортогональности (44), т.е. $z \in \mathcal{P}_n^\perp(\phi)$. Для многочлена $g_n \in \mathcal{P}_n$ с помощью формулы (29) получаем

$$|\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 z(t) g_n(t) (1-t^2)^{(m-3)/2} dt = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} g_n(x_m) \varphi(x) dx.$$

Последний интеграл равен нулю в силу условия ортогональности (20), а, значит, действительно, $z \in \mathcal{P}_n^\perp(\phi)$. Таким образом, доказано, что $S\mathcal{P}_{n,m}^\perp = \mathcal{P}_n^\perp$.

При этом имеем

$$\zeta(p) - z(p) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} (\zeta(p) - \varphi(x' \sqrt{1-p^2}, p)) dx'. \quad (47)$$

Отсюда следует оценка

$$\|\zeta - z\|_{L_\infty(-1,1)} \leq \|\psi - \varphi\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})}.$$

Действительно, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \|\zeta - z\|_{L_\infty(-1,1)} &= \operatorname{ess\,sup}_{p \in (-1,1)} |\zeta(p) - z(p)| \\ &\stackrel{(47)}{\leq} \operatorname{ess\,sup}_{p \in (-1,1)} \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} |\zeta(p) - \varphi(x' \sqrt{1-p^2}, p)| dx' \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{p \in (-1,1)} \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{S}^{m-1}} |\psi(x) - \varphi(x)| dx'. \end{aligned}$$

Поскольку подынтегральное выражение не зависит от x' , окончательно получаем оценку

$$\|\zeta - z\|_{L_\infty(-1,1)} \leq \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \cdot |\mathbb{S}^{m-2}| \cdot \|\psi - \varphi\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})} = \|\psi - \varphi\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})},$$

которая влечет неравенство $\Omega_{n,m}(\zeta) \leq \omega_{n,m}(\psi)$.

Проверим обратное неравенство. Пусть $z \in \mathcal{P}_n^\perp(\phi)$. Убедимся, что тогда функция $\varphi(x) = z(x_m)$ принадлежит множеству $\mathcal{P}_{n,m}^\perp$. Произвольному многочлену $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$ сопоставим многочлен $g_n \in \mathcal{P}_n$ по формуле (33). Вновь с помощью формулы (29) получаем

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} P_n(x) z(x_m) dx = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 z(t) g_n(t) (1-t^2)^{(m-3)/2} dt = 0,$$

так что, действительно, $z \in \mathcal{P}_{n,m}^\perp$. При этом имеем

$$\|\psi - \varphi\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{m-1})} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{S}^{m-1}} |\psi(x) - \varphi(x)| = \operatorname{ess\,sup}_{x_m \in (-1,1)} |\zeta(x_m) - z(x_m)| = \|\zeta - z\|_{L_\infty(-1,1)}.$$

А отсюда следует неравенство $\omega(\psi, \mathcal{P}_{n,m}^\perp) \leq \Omega(\zeta, \mathcal{P}_n^\perp(\phi))$. Таким образом, равенство (46) проверено. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Предположим, что $m \geq 3$ и ζ есть функция одного переменного, ограниченная и измеримая на отрезке $[-1, 1]$. Тогда при любом $n \geq 0$ справедливы следующие утверждения.*

1) *Имеет место равенство*

$$C_{n,m}(\zeta) = \Omega_{n,m}(\zeta).$$

2) *В задачах (36) и (45) существует экстремальный многочлен $f_n^* \in \mathcal{P}_n$ и экстремальная функция $\varphi_n^* \in \mathcal{P}_n^\perp(\phi)$.*

3) *Многочлен $f_n \in \mathcal{P}_n$ и функция $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{P}_n^\perp(\phi)$ являются экстремальными соответственно в задачах (36) и (45) в том и только том случае, если существует константа A такая, что почти всюду на $(-1, 1)$ выполняется равенство*

$$\zeta - \tilde{\varphi}_n = A \operatorname{sign} \tilde{f}_n;$$

при этом обязательно $|A| = C_{n,m}(\zeta) = \Omega_{n,m}(\zeta)$.

Это утверждение является частным случаем леммы 1 и приведено здесь лишь для удобства дальнейших ссылок.

4. Аппроксимационная задача

4.1. С задачами (8), (9) и (11) тесно связана задача о наилучшем приближении

$$e(\psi, \mathcal{F}) = e(\psi, \mathcal{F})_{L(E)} = \inf \{ \|\psi - f\|_{L(E)} : f \in \mathcal{F} \}$$

функции ψ в пространстве $L(E)$ самим подпространством $\mathcal{F}$. Обсудим эти вопросы для приближений алгебраическими многочленами на сфере и в соответствующем одномерном случае.

Рассмотрим наилучшее приближение

$$e_{n,m}(\psi) = \inf \{ \|\psi - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} : P_n \in \mathcal{P}_{n,m} \} \quad (48)$$

в $L(\mathbb{S}^{m-1})$ функции ψ подпространством $\mathcal{P}_{n,m}$ и наилучшее приближение

$$E_n^\phi(\zeta) = \inf \{ \|\zeta - g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)} : g_n \in \mathcal{P}_n \} \quad (49)$$

в $L_1^\phi(-1,1)$ функции ζ подпространством $\mathcal{P}_n$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 5. *Предположим, что $m \geq 3$ и функция ψ в задаче (18), (19) является зональной, а точнее, $\psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_m) = \zeta(x_m)$, где ζ есть функция (одного переменного) из пространства $L_1^\phi(-1,1)$. Тогда при всех $n \geq 0$ величины уклонений (48) и (49) связаны соотношением*

$$e_{n,m}(\psi) = |\mathbb{S}^{m-2}| E_n^\phi(\zeta). \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$ и g_n есть функция (одного переменного), построенная по формуле (33); так что

$$g_n(p) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} P_n(x' \sqrt{1-p^2}, p) dx'.$$

Как мы ранее убедились, функция g_n является многочленом одной переменной степени n , т.е. $g_n \in \mathcal{P}_n$. При этом имеем

$$\zeta(p) - g_n(p) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} (\zeta(p) - P_n(x' \sqrt{1-p^2}, p)) dx'.$$

Отсюда следует оценка

$$|\mathbb{S}^{m-2}| \cdot \|\zeta - g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)} \leq \|\psi - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}.$$

Действительно, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \|\zeta - g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)} &= \int_{-1}^1 |\zeta(p) - g_n(p)| (1-p^2)^{(m-3)/2} dp \\ &\leq \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} |\zeta(p) - P_n(x' \sqrt{1-p^2}, p)| dx' dp \\ &\stackrel{(29)}{=} \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} |\psi(x) - P_n(x)| dx = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \|\psi - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \end{aligned}$$

которая влечет неравенство $|\mathbb{S}^{m-2}| E_n^\phi(\zeta) \leq e_{n,m}(\psi)$.

Проверим обратное неравенство. Пусть $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$ — зональный многочлен, т.е. $P_n(x) = P_n(x_m) = P_n(p) = g_n(p)$. Тогда, применяя (29), получаем

$$\begin{aligned} \|\psi - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} &= \int_{\mathbb{S}^{m-1}} |\psi(x) - P_n(x)| dx = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} |\zeta(p) - g_n(p)| dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} |\zeta(p) - g_n(p)| dx' dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^1 (1-p^2)^{(m-3)/2} |\zeta(p) - g_n(p)| dp \\ &= |\mathbb{S}^{m-2}| \|\zeta - g_n\|_{L_1^\phi(-1,1)}; \end{aligned}$$

а отсюда следует оценка $e_{n,m}(\psi) \leq |\mathbb{S}^{m-2}| E_n^\phi(\zeta)$. Таким образом, равенство (50) проверено. Лемма доказана.

4.2. Рассмотрим более подробно задачу (49). Как и любая аппроксимационная задача, она состоит в вычислении величины (49) и нахождении экстремального многочлена g_n^* , на котором достигается нижняя грань в (49). Отметим, что поскольку пространство $\mathcal{P}_n$ конечномерное, то экстремальный многочлен g_n^* существует. Относительно задачи (49) хорошо известен следующий результат (см., например, [8; теорема 3.3.2], [9; гл. 1, § 6] или [10; гл. 3, § 10]).

ЛЕММА 6. *Для того чтобы многочлен $\bar{g}_n \in \mathcal{P}_n$ являлся экстремальным в задаче (49), достаточно, а если функция ζ и многочлен $\bar{g}_n$ почти всюду на $(-1, 1)$ не совпадают, то и необходимо, чтобы выполнялось соотношение*

$$\int_{-1}^1 f_n(t) \phi(t) \operatorname{sign}(\zeta(t) - \bar{g}_n(t)) dt = 0, \quad f_n \in \mathcal{P}_n. \quad (51)$$

При этом

$$E_n^\phi(\zeta)_{L_1^\phi(-1,1)} = \left| \int_{-1}^1 \zeta(t) \phi(t) \operatorname{sign}(\zeta(t) - \bar{g}_n(t)) dt \right|. \quad (52)$$

4.3. Для конкретной функции $\zeta(t) = t^{n+1}$ задача (49) является известной задачей о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля. В этом случае (49) принимает вид

$$E_{n+1}^\phi = \inf \{ \|g_{n+1}\|_{L_1^\phi(-1,1)} : g_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}^1 \}, \quad (53)$$

где $\mathcal{P}_{n+1}^1$ есть множество многочленов порядка $n+1$ со старшим коэффициентом, равным 1. Обозначим через q_{n+1}^* экстремальный многочлен (решение) задачи (53); этот многочлен существует и единственный. Все $n+1$ нули многочлена q_{n+1}^* простые и лежат на интервале $(-1, 1)$. Этот факт хорошо известен, однако, мы приведем его доказательство. Предположим, что это не так, т.е. q_{n+1}^* имеет на $(-1, 1)$ всего лишь m , $m \leq n$, перемен знака в точках $\{t_k\}_{k=1}^m$. Рассмотрим многочлен $\bar{q}_m(t) = \prod_{k=1}^m (t - t_k) \in \mathcal{P}_n$. Поскольку степень многочлена $\bar{q}_m$ не превосходит числа n , в соответствии с леммой 6 (см. свойство (51)) имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 \bar{q}_m(t) \phi(t) \operatorname{sign} q_{n+1}^*(t) dt = 0.$$

Однако, с другой стороны,

$$\int_{-1}^1 \bar{q}_m(t) \phi(t) \operatorname{sign} \bar{q}_m(t) dt = \int_{-1}^1 |\bar{q}_m(t)| \phi(t) dt = \|\bar{q}_m\|_{L_1^\phi(-1,1)} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что действительно все нули многочлена q_{n+1}^* простые и лежат на интервале $(-1, 1)$.

Обозначим через $t(k, m) = t(k, m, n)$, $0 \leq k \leq n$, нули многочлена q_{n+1}^* (на $(-1, 1)$), занумерованные в порядке возрастания индекса k . Вес ϕ является четной функцией, поэтому нули $t(k, m)$, $0 \leq k \leq n$, расположены симметрично относительно точки 0, т.е. $t(n-k, m) = -t(k, m)$, $0 \leq k \leq n$.

4.4. Основной целью данного раздела является исследование наилучшего приближения

$$e_{n,m}(h) = e_{n,m}(\chi_h) = \inf\{\|\chi_h - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} : P_n \in \mathcal{P}_{n,m}\} \quad (54)$$

в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ характеристической функции шапочки $\mathbb{C}(h)$ подпространством $\mathcal{P}_{n,m}$ алгебраических многочленов. Сейчас эта величина будет вычислена для значений параметра h , являющихся нулями $t(k, m)$, $0 \leq k \leq n$, только что построенного многочлена q_{n+1}^* . Однако предварительно рассмотрим соответствующую одномерную задачу.

Функция (6) является зональной, а именно,

$$\chi_h(x) = \zeta_h(x_m), \quad x = (x_1, \dots, x_m),$$

где

$$\zeta_h(t) = \begin{cases} 1, & t \in (h, 1), \\ 0, & t \in (-1, h). \end{cases} \quad (55)$$

Рассмотрим наилучшее приближение

$$E_n^\phi(h) = E_n^\phi(\zeta_h) = \inf\{\|\zeta_h - P_n\|_{L_1^\phi(-1,1)} : P_n \in \mathcal{P}_n\} \quad (56)$$

“ступеньки” ζ_h в пространстве $L_1^\phi(-1, 1)$ подпространством $\mathcal{P}_n$ алгебраических многочленов (одного переменного).

Следуя соображениям работ Тайкова [1], [2] и работы Бабенко и Крякина [11], можно выписать решение задачи (56) для значений параметра h , совпадающих с нулями $t(k, m)$ многочлена q_{n+1}^* ; величина (56) является четной по h , поэтому достаточно сделать это при $n/2 \leq k \leq n$. Для значений $h = t(k, m)$ функцию ζ_h будем обозначать через $\zeta_{k,m}$; это есть “ступенька” с разрывом в точке $t(k, m)$.

Рассмотрим вначале случай $k = n$. Введем алгебраический многочлен порядка n

$$g_n^*(t) = g_{n,m}^*(t) = A \frac{q_{n+1}^*(t)}{t - t(n, m)}, \quad (57)$$

где константа A выбрана из условия $g_{n,m}^*(1) = 1$.

ЛЕММА 7. При всех $m \geq 2$, $n \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ имеют место равенства

$$E_n^\phi(\zeta_{n,m})_{L_1^\phi(-1,1)} = \int_{-1}^1 \phi(t) |\zeta_{n,m}(t) - \lambda g_n^*(t)| dt = \int_{t(n,m)}^1 \phi(t) dt. \quad (58)$$

Первое равенство означает, что для всех $0 \leq \lambda \leq 1$ многочлен λg_n^* является экстремальным. Второе равенство в (58) означает, что функция $\zeta_{n,m}$ многочленами порядка n не приближается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. При $0 < \lambda \leq 1$ утверждение леммы 7 следует из леммы 6. Действительно, для любого $f_n \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f_n(t) \phi(t) \operatorname{sign}(\zeta_{n,m}(t) - g_n^*(t)) dt &= \int_{-1}^1 f_n(t) \phi(t) \operatorname{sign} q_{n+1}^*(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 f_n(t) \phi(t) \operatorname{sign}(t^{n+1} - \bar{q}_n(t)) dt \stackrel{(51)}{=} 0, \end{aligned}$$

т.е. согласно лемме 6 многочлен g_n^* является экстремальным в задаче о приближении “ступеньки”, а поскольку

$$\text{sign}(\zeta_{n,m}(t) - \lambda g_n^*(t)) = \text{sign}(\zeta_{n,m}(t) - g_n^*(t)), \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad t \in (-1, 1),$$

то и λg_n^* – тоже экстремальный. Далее, из (52) получаем, что

$$E_n^\phi(\zeta_{n,m})_{L_1^\phi(-1,1)} = \left| \int_{-1}^1 \zeta_{n,m}(t) \phi(t) \text{sign}(\zeta_{n,m}(t) - \lambda g_n^*(t)) dt \right| = \int_{t(n,m)}^1 \phi(t) dt.$$

Случай $\lambda = 0$ получается предельным переходом при $\lambda \rightarrow +0$ в (58). Лемма доказана.

Пусть теперь $2 \leq k \leq n-1$. Пусть $g_{k,m}^*$ есть алгебраический многочлен порядка $n-1$, который интерполирует функцию $\zeta_{k,m}$ в точках $t(\nu, m)$, $0 \leq \nu \leq n$, $\nu \neq k$. Следуя [11], нетрудно проверить, что (на $[-1, 1]$) знак разности $\zeta_{k,m} - g_{k,m}^*$ совпадает со знаком многочлена q_{n+1}^* :

$$\text{sign}(\zeta_{k,m} - g_{k,m}^*) = \text{sign } q_{n+1}^*.$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 8. *При всех $m \geq 2$, $n \geq 2$, $2 \leq k \leq n-1$ имеем*

$$E_n^\phi(\zeta_{k,m})_{L_1^\phi(-1,1)} = \int_{-1}^1 \phi(t) |\zeta_{k,m}(t) - g_{k,m}^*(t)| dt = \left| \int_{t(k,m)}^1 \phi(t) \text{sign } q_{n+1}^*(t) dt \right|.$$

4.5. Теперь можно выписать решение задачи (54) для значений h , являющихся нулями $t(k, m)$, $0 \leq k \leq n$, многочлена q_{n+1}^* . Как следствие лемм 5, 7, 8, получаем такие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *При всех $m \geq 3$, $n \geq 0$ для значения $h = t(n, m)$ справедливы следующие утверждения:*

1) *имеет место равенство*

$$e_{n,m}(h) = |\mathbb{C}(h)|;$$

2) *при любом λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, многочлен $\lambda g_{n,m}^*$, как зональный многочлен одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является экстремальным в задаче (54).*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $m \geq 2$, $n \geq 2$, $2 \leq k \leq n-1$. Тогда для значения $h = t(k, m)$ справедливы следующие утверждения:*

1) *имеют место формулы*

$$e_{n,m}(h) = \left| \int_{\mathbb{C}(h)} \text{sign } q_{n+1}^*(x_m) dx \right| = |\mathbb{S}^{m-2}| \left| \int_h^1 (1-t^2)^{(m-3)/2} \text{sign } q_{n+1}^*(t) dt \right|;$$

2) *многочлен $g_{k,m}^*$ (порядка $n-1$) как зональный многочлен одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является экстремальным в задаче (54).*

5. Норма функционала Тайкова и двойственная задача

В этом разделе с помощью полученных выше результатов будет выписано решение задачи (2)–(4) и двойственной ей задачи при $h = t(n, m)$, являющемся наибольшим нулем многочлена q_{n+1}^* (одного переменного порядка $n + 1$), наименее уклоняющегося от нуля в пространстве L_1^ϕ .

Обсудим задачи (35), (36) и (45) для функции $\zeta_{n,m}$, т.е. для функции (55) при $h = t(n, m)$. Введем обозначения $C_{n,m} = C_{n,m}(\zeta_{n,m})$, $\Omega_{n,m} = \Omega_{n,m}(\zeta_{n,m})$. Согласно лемме 6 функция

$$\varphi_{n,m} = \frac{1}{2} \operatorname{sign} q_{n+1}^* \quad (59)$$

ортогональна с весом ϕ пространству $\mathcal{P}_n$, т.е. $\varphi_{n,m} \in \mathcal{P}_n^\perp(\phi)$. Нетрудно понять, что она обладает свойством

$$\zeta_{n,m} - \varphi_{n,m} = \frac{1}{2} \operatorname{sign} g_{n,m},$$

где

$$g_{n,m}(t) = \frac{q_{n+1}^*(t)}{t - t(n, m)}. \quad (60)$$

Отсюда в силу леммы 4 следует такое утверждение.

ТЕОРЕМА 3. При всех $m \geq 2$, $n \geq 0$ справедливы следующие утверждения:

1) имеют место равенства

$$C_{n,m} = \Omega_{n,m} = \frac{1}{2};$$

2) многочлены $ag_{n,m}$, $a \in \mathbb{R}$, и функция $\varphi_{n,m}$, определенные равенствами (60) и (59), являются экстремальными соответственно в задачах (36) и (45) для функции $\zeta_{n,m}$.

Приведенные результаты (леммы 2, 3 и теорема 3) позволяют выписать решение задачи Тайкова (4) для значения $h = t(n, m)$, а также решение задачи (21) для функции $\chi_{n,m} = \chi_h$, $h = t(n, m)$.

ТЕОРЕМА 4. При всех $m \geq 3$, $n \geq 0$ справедливы следующие утверждения:

1) имеют место равенства

$$\nu_{n,m}(t(n, m)) = \omega_{n,m}(\chi_{n,m}) = \frac{1}{2};$$

2) многочлены $ag_{n,m}$, $a \in \mathbb{R}$, и функция $\varphi_{n,m}$, определенные равенствами (60) и (59), как зональные функции одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, являются экстремальными соответственно в задачах (4) и (21) для функции $\chi_{n,m}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. В. Тайков, “Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов”, *УМН*, **20**:3 (1965), 205–211.
- [2] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении ядер Дирихле”, *Матем. заметки*, **53**:6 (1993), 116–121.

- [3] М. В. Дейкалова, “Некоторые экстремальные задачи для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Материалы VII междунар. Казанской летней науч. школы-конференции, Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского, **35**, Изд-во Казанск. матем. об-ва, Казань, 2007, 96–98.
- [4] М. В. Дейкалова, “Несколько экстремальных задач для алгебраических многочленов на сфере”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Тез. докл. 14-й Саратовской зимней школы, Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 2008, 64–66.
- [5] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, УРСС, М., 2004.
- [6] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 3, Изд-во “Лань”, СПб, 1997.
- [7] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1991.
- [8] Н. П. Конейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, ГИФМЛ, М., 1976.
- [9] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, Изд-во ЛГУ, Л., 1977.
- [10] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [11] А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, “О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике”, *Изв. ТулГУ. Матем. Мех. Информ.*, **12:1** (2006), 27–56.

М. В. Дейкалова

Уральский государственный университет, г. Екатеринбург

E-mail: Marina.Deikalova@usu.ru

Поступило

31.12.2007

Исправленный вариант

11.01.2008