Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Себельдин, А. Е. Сморкалова, Определяемость абелевых групп группами гомоморфизмов и полугруппами эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 595–601

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:53:30

Определяемость абелевых групп группами гомоморфизмов и полугруппами эндоморфизмов

А. М. Себельдин, А. Е. Сморкалова

В работе рассматривается вопрос об изоморфизме вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга при условии, что их группы гомоморфизмов в некоторую абелеву группу изоморфны и, кроме того, изоморфны их полугруппы эндоморфизмов.

Библиография: 5 названий.

В [1; гл. VIII, § 48] поставлена следующая задача (проблема 34).

ЗАДАЧА 1. Существует ли класс $\mathbf{X}$ абелевых групп такой, что из изоморфизма $\text{Hom}(A, X) \cong \text{Hom}(B, X)$ для любой группы $X \in \mathbf{X}$ следует изоморфизм $A \cong B$, где A, B – произвольные абелевы группы.

В [2] найдены две неизоморфные вполне разложимые абелевы группы без кручения бесконечного ранга A и B такие, что для любой абелевой группы X имеет место изоморфизм $\text{Hom}(A, X) \cong \text{Hom}(B, X)$. Таким образом, в общем случае ответ на проблему 34 из [1] отрицательный.

Поскольку в такой постановке вопроса ответ всегда отрицательный, естественно рассмотреть такую задачу:

ЗАДАЧА 2. В некотором заданном классе $\mathbf{X}$ найти подкласс $\mathbf{X}^*$ всех групп A , для которых существует такая группа $X \in \mathbf{X}$, что выполняется следующая импликация:

$$\text{Hom}(A, X) \cong \text{Hom}(B, X) \Rightarrow A \cong B \quad \forall B \in \mathbf{X}.$$

Так как в [2] группы A и B вполне разложимые без кручения бесконечного ранга, то в [3] эта задача была рассмотрена для класса $\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\text{cdf}}$ всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга. Заметим, что в [3] полностью описан класс $\mathbf{F}_{\text{cdf}}^*$, и он оказался непустым.

В данной работе для класса $\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\text{cdf}}$ рассматривается следующая

ЗАДАЧА 3. В классе $\mathbf{X}$ найти подкласс $\mathbf{X}^{**}$ всех групп A , для которых существует такая группа $X \in \mathbf{X}$, что выполняется следующая импликация:

$$\text{Hom}(A, X) \cong \text{Hom}(B, X), \quad E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B) \Rightarrow A \cong B \quad \forall B \in \mathbf{X},$$

где $E^\bullet(A), E^\bullet(B)$ – полугруппы всех эндоморфизмов групп A и B .

Всюду далее рассматриваются только абелевы группы. Пусть $r(A)$ – ранг группы A . Положим

$$P_\infty(A) = \{p \in \mathbf{P} : pA = A\}, \quad P(A) = \mathbf{P} \setminus P_\infty(A),$$

где $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Группу A будем называть *почти делимой* (соответственно *почти неделимой*), если $|P(A)| < \infty$ (соответственно $|P_\infty(A)| < \infty$). Пусть $\Omega(A)$ – множество всех различных типов прямых слагаемых ранга 1 вполне разложимой группы без кручения A . Обозначим через $\Omega'(A)$ множество всех минимальных типов в $\Omega(A)$, через $\Omega''(A)$ – множество всех минимальных типов в $\Omega'(A)$ и т.д. Прямое слагаемое ранга 1 группы без кручения назовем *изолированным*, если его тип несравним с типом любого другого прямого слагаемого ранга 1, взятого в дополнительном прямом слагаемом. В противном случае слагаемое назовем *связанным*. Остальные обозначения и определения будут вводиться по ходу изложения.

Полный ответ на поставленную задачу дает следующая

ТЕОРЕМА. *Группа A принадлежит классу $\mathbf{F}_{\text{cdf}}^{**}$ тогда и только тогда, когда любое ее изолированное прямое слагаемое ранга 1 либо почти делимо, либо почти неделимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ – разложение группы A в прямую сумму групп ранга 1, $a(\tau) = \{i \in n^* : \tau(A_i) = \tau\}$, $i \in n^* = \{1, \dots, n\}$, $\tau \in \Omega(A)$. Обозначим через $P_1, \dots, P_t$ все различные $P(A_i)$, $i \in n^*$. Без ограничения общности можно считать, что

$$|P_1| \leq |P_2| \leq \dots \leq |P_t|, \quad \text{причем} \quad |P_s| \leq |P_k|, \quad \text{если} \quad P_s \subseteq P_k.$$

Положим

$$A = A^1 \oplus \dots \oplus A^t,$$

где

$$A^s = \bigoplus_{i \in a^*(s)} A_i, \quad a^*(s) = \{i \in n^* : P(A_i) = P_s\}, \quad s \in t^*.$$

Ясно, что $P(A^s) = P_s$ для всех $s \in t^*$.

Достаточность. Пусть каждое изолированное прямое слагаемое группы A ранга 1 либо почти делимо, либо почти неделимо. Зафиксируем характеристики

$$\alpha(i) = (\dots, \alpha_p(i), \dots)_{p \in \mathbf{P}}$$

для каждого типа $\tau(A_i)$, $i \in n^*$. Строим группу X следующим образом:

$$X = X_1 \oplus \dots \oplus X_t,$$

где типы $\tau(X_s)$ содержат такие характеристики $\chi(s) = (\dots, \chi_p(s), \dots)$, $s \in t^*$, что

$$\chi_p(s) = \infty, \quad \text{если} \quad p \notin P_s, \quad \text{и} \quad \chi_p(s) = \max_{i \in a^{**}(s)} (\alpha_p(i)), \quad \text{если} \quad p \in P_s,$$

где

$$a^{**}(s) = \{i \in n^* : P(A_i) \supseteq P_s\} \quad \forall s \in t^*.$$

Из строения группы X вытекает следующее свойство:

$$\begin{aligned} \tau(A_i) \leq \tau(X_s) \quad \forall i \in a^*(s) \\ \text{и, если } P_s \supset P_k, P_s \neq P_k, \quad \text{то } \tau(X_s) < \tau(X_k), \quad s, k \in t^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть группа B из $\mathbf{F}_{\text{cdf}}$ такая, что

$$E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B) \quad \text{и} \quad \text{Hom}(A, X) \cong \text{Hom}(B, X).$$

Тогда из первого изоморфизма [4] вытекает

$$\begin{aligned} r(A) = r(B), \quad B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n, \\ E^\bullet(A_i) \cong E^\bullet(B_i), \quad |a(\tau(A_i))| = |b(\tau(B_i))|, \\ |P_\infty(A_i)| = |P_\infty(B_i)|, \quad |P(A_i)| = |P(B_i)| \quad \forall i \in n^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая второй изоморфизм, получаем

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{t \in n^*} A_i, X\right) \cong \bigoplus_{s \in t^*} \text{Hom}(A^s, X) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in n^*} B_i, X\right) \cong \bigoplus_{i \in n^*} \text{Hom}(B_i, X).$$

Рассмотрим вначале случай, когда $t = 1$, т.е. $P_1 = P_2 = \cdots = P_t$, тогда

$$\begin{aligned} r(X) = 1, \quad P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = P(X), \\ P_\infty(A_1) = P_\infty(A_2) = \cdots = P_\infty(A_n) = P_\infty(X), \end{aligned}$$

причем по условию либо хотя бы одно из множеств $P(X)$ или $P_\infty(X)$ конечно, либо $|P(X)| = |P_\infty(X)|$, но в группе A нет изолированных прямых слагаемых.

Учитывая изоморфизм

$$\text{Hom}(A, X) \cong \text{Hom}(B, X)$$

и (2), имеем

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in n^*} A_i, X\right) \cong \bigoplus_{i \in n^*} \text{Hom}(A_i, X) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in n^*} B_i, X\right) \cong \bigoplus_{i \in n^*} \text{Hom}(B_i, X).$$

Заметим, что из строения группы X и (2) следует, что все слагаемые $\text{Hom}(A_i, X)$, а следовательно, и $\text{Hom}(B_i, X)$, $i \in n^*$, ранга 1 и ненулевые. Тогда, учитывая изоморфизм разложений для вполне разложимых групп [1] и [5], без ограничения общности можно считать, что

$$\text{Hom}(A_i, X) \cong \text{Hom}(B_i, X) \quad \forall i \in n^*.$$

Поэтому, если слагаемое A_i изолировано и почти делимо, то, учитывая (2), имеем

$$P(A_i) = P(X) = P(B_i)$$

и, следовательно,

$$A_i \cong B_i.$$

Если же $|P_\infty(A_i)| < \infty$ для изолированного прямого слагаемого A_i группы A , то, используя равенства (2) и

$$\tau(X) = \tau(A_i) + \tau(\text{Hom}(A_i, X)) = \tau(B_i) + \tau(\text{Hom}(B_i, X)), \quad (3)$$

имеем

$$P_\infty(A_i) = P_\infty(B_i) = P_\infty(X) \quad \text{и} \quad A_i \cong B_i.$$

В случае, когда слагаемое A_i не изолировано, согласно [5] имеем $P(A_i) = P(B_i)$. Поэтому, учитывая равенства (3), снова получаем $A_i \cong B_i$ для любого A_i минимального типа. Таким образом, $A_i \cong B_i$ для любого A_i , тип которого $\tau = \tau(A_i)$ принадлежит $\Omega'(A)$, и число таких слагаемых одинаково как в A , так и в B , т.е. $|a(\tau)| = |b(\tau)|$. В нашем случае все типы из множества $\Omega''(A)$, если оно не пустое, связанные. Поэтому, если тип $\tau = \tau(A_i)$ группы A_i принадлежит $\Omega''(A)$, мы без труда получаем снова изоморфизм $A_i \cong B_i$ и $|a(\tau)| = |b(\tau)|$. Продолжая этот процесс, в первом случае окончательно получаем $A \cong B$.

Рассмотрим общий случай, когда $t > 1$, тогда ранг $r(X)$ группы X больше единицы и равен t . Заметим, что из строения группы X вытекает

$$P(X_s) = P(A^s) = P_s \quad \text{и} \quad P_\infty(X_s) = P_\infty(A^s) \quad \forall s \in t^*.$$

Изоморфизм

$$\text{Hom}(A, X) \cong \text{Hom}(B, X)$$

влечет изоморфизм двух вполне разложимых групп конечного ранга:

$$\bigoplus_{i \in n^*} \bigoplus_{s \in t^*} \text{Hom}(A_i, X_s) \cong \bigoplus_{j \in n^*} \bigoplus_{s \in t^*} \text{Hom}(B_j, X_s).$$

Так как эти разложения изоморфны и все $P_\infty(X_s)$ различны, то, учитывая (2), имеем

$$\text{Hom}(A, X_s) \cong \text{Hom}(B, X_s) \quad \forall s \in t^*.$$

Пусть

$$B^{(s)} = \bigoplus_{j \in b^{**}(s)} B_j, \quad A^{(s)} = \bigoplus_{j \in a^{**}(s)} A_j, \quad \forall s \in t^*.$$

$$b^{**}(s) = \{i \in n^* : \text{Hom}(B_i, X_s) \neq 0\},$$

Заметим, что из строения группы X следует равенство

$$a^{**}(s) = \{i \in n^* : \text{Hom}(A_i, X_s) \neq 0\}.$$

Покажем, что для любого прямого слагаемого A_i ранга 1 существует такое изоморфное ему прямое слагаемое B_i ранга 1, что $|a(\tau)| = |b(\tau)|$. Такую группу B_i будем называть *подобной* группе A_i .

Рассмотрим прежде всего группу X_t , у которой, очевидно, множество $P_\infty(X_t) = \mathbf{P} \setminus P_t$ минимальной мощности. Очевидно, что X_t – группа минимального типа, т.е. $\tau(X_t) \in \Omega'(X)$. Тогда

$$A^{(t)} = A^t, \quad P(A^{(t)}) = P(A^t) = P_t = P(X_t)$$

и, следовательно, $P_\infty(A^{(t)}) = P_\infty(X_t)$. Напомним, что тип любого слагаемого ранга 1 группы $A^{(t)} = A^t$ меньше либо равен типу группы X_t .

а) Предположим, что $A^{(t)} = A^t$ – почти делимая группа. Заметим, что в данном случае группа A^t однородная. Пусть A_i – прямое слагаемое в группе $A^{(t)}$. Очевидно, что

$$\text{Hom}(A, X_t) \cong \text{Hom}(A^t, X_t) = \text{Hom}(A^{(t)}, X_t) \cong \text{Hom}(B^{(t)}, X_t).$$

Поскольку $\tau(A_i) \in \Omega'(A)$, в группе $B^{(t)}$ существует прямое слагаемое B_i ранга 1 такое, что

$$\text{Hom}(A_i, X_t) \cong \text{Hom}(B_i, X_t).$$

Из почти делимости и минимальности типа $\tau = \tau(A_i)$ вытекает $A_i \cong B_i$, и, очевидно, учитывая (2), получаем $|a(\tau)| = |b(\tau)|$. Заметим, что изоморфизм полугрупп мы не фиксируем, а разложение группы A мы считаем фиксированным, допуская только перестановку слагаемых.

б) Предположим, что $A^{(t)} = A^t$ – почти неделимая группа. Пусть A_i – прямое слагаемое в группе $A^{(t)}$ и $\tau(A_i) \in \Omega'(A)$. Очевидно, что, как и в предыдущем случае, минимальность типа $\tau = \tau(A_i)$ обеспечивает существование прямого слагаемого B_i ранга 1 в группе $B^{(t)}$ такого, что

$$\text{Hom}(A_i, X_t) \cong \text{Hom}(B_i, X_t).$$

Учитывая равенство

$$\tau(X_t) = \tau + \tau(\text{Hom}(A_i, X_t)) = \tau(B_i) + \tau(\text{Hom}(B_i, X_t)),$$

получаем $A_i \cong B_i$ и число слагаемых, изоморфных A_i , одинаково как в группе A , так и в группе B , т.е. $|a(\tau)| = |b(\tau)|$. Заметим, что в а), б) изолированность группы A_i эквивалентна равенству $|a(\tau)| = 1$.

с) Если же слагаемое минимального типа A_i группы $A^{(t)}$ не изолированное и $|P(A_i)| = |P_\infty(A_i)| = \infty$, то согласно [5] в $B^{(t)}$ существует прямое слагаемое B_i ранга 1 такое, что $P(A_i) = P(B_i)$, поэтому, снова учитывая равенство

$$\tau(X_t) = \tau(A_i) + \tau(\text{Hom}(A_i, X_t)) = \tau(B_i) + \tau(\text{Hom}(B_i, X_t)),$$

получаем, что B_i и A_i подобны.

Аналогичные рассуждения можно провести для X_{t-1} в случае, когда $P(X_t)$ не содержит $P(X_{t-1})$.

Если же $P(X_t) \supset P(X_{t-1})$, то, прежде всего, заметим, что включение будет строгим в силу (1) и $\tau(X_t) < \tau(X_{t-1})$. Поэтому группа $A^{(t)}$ входит в группу $A^{(t-1)}$ в качестве прямого слагаемого, причем дополнительным прямым слагаемым будет A^{t-1} :

$$A^{(t)} \oplus A^{t-1} = A^{(t-1)}.$$

Следовательно, учитывая, что $\text{Hom}(A^{t-1}, X_t) = 0$, получаем

$$\text{Hom}(A^{(t-1)}, X_t \oplus X_{t-1}) \cong \text{Hom}(A^{(t)}, X_t \oplus X_{t-1}) \oplus \text{Hom}(A^{t-1}, X_{t-1}).$$

Пусть A_i – прямое слагаемое группы $A^{(t-1)}$ минимального типа ($\tau(A_i) \in \Omega'(A)$). Если оно принадлежит $A^{(t)}$, то согласно вышеизложенному доказывать нечего. Пусть оно не принадлежит $A^{(t)}$, т.е. принадлежит A^{t-1} (напомним, что мы считаем исходное разложение группы A фиксированным и лишь переставляем, если нужно, прямые слагаемые). Тогда, учитывая минимальность типа $\tau = \tau(A_i)$ и

$$P(A^{t-1}) = P_{t-1} = P(X_{t-1}) \subset P(X_t), \quad P(X_{t-1}) \neq P(X_t),$$

получаем аналогично вышеизложенному существование подобного для A_i прямого слагаемого B_i в группе B .

Таким образом, для t и $t - 1$ все слагаемые минимальных типов имеют подобные слагаемые в группе B .

Предположим, что для $s \in t^*$ уже доказано существование подобного прямого слагаемого B_i для любого прямого слагаемого A_i группы $A^{(s)}$ минимального типа $\tau(A_i) \in \Omega'(A)$, и покажем, что группа $A^{(s-1)}$ также обладает этим свойством. Если P_s и P_{s-1} различны, то, очевидно, подходящая группа B_i существует. Пусть имеет место включение $P(X_s) \supset P(X_{s-1})$, которое снова будет строгим и $\tau(X_s) < \tau(X_{s-1})$. Здесь A^{s-1} входит в дополнительное прямое слагаемое A' разложения

$$A^{(s)} \oplus A' = A^{(s-1)},$$

однако не обязательно с ним совпадает, поскольку $P(X_s)$ может также содержать некоторые $P(X_k)$ для $k < s$. Однако, если прямое слагаемое A_i – минимального типа и не принадлежит $A^{(k)}$, $k < s$, то оно принадлежит A^{s-1} . Поэтому снова, если прямое слагаемое A_i – минимального типа, то, как и раньше, подобное слагаемое B_i , очевидно, существует. Таким образом, для каждого прямого слагаемого A_i минимального типа ($\tau(A_i) \in \Omega'(A)$) существует подобное прямое слагаемое B_i группы B .

Пусть теперь A_i – прямое слагаемое группы A типа $\tau(A_i) \in \Omega''(A)$ (мы можем считать, что A_i взято в $A^{(s)}$ для некоторого $s \in t^*$). Ясно, что A_i – связанное прямое слагаемое и существует прямое слагаемое A_j группы A минимального типа $\tau(A_j) \in \Omega'(A)$, меньшего, чем $\tau(A_i)$. Тогда существует подобное группе A_j прямое слагаемое B_j в группе B , т.е. изоморфное группе A_j , и число слагаемых, изоморфных A_j , одинаково, как в группе A , так и в группе B . Заметим, что кроме A_j могут существовать еще и другие слагаемые, не изоморфные A_j , и типов меньших, чем тип $\tau(A_i)$, однако, снова таких слагаемых будет одинаковое число как в A , так и в B . Поэтому, даже если

$$\text{Hom}(A_i, X_s) \cong \text{Hom}(A_j, X_s),$$

то, учитывая минимальность типа $\tau(A_i)$ в $\Omega \setminus \Omega'(A)$, изоморфизм

$$\text{Hom}(A^{(s)}, X_s) \cong \text{Hom}(B^{(s)}, X_s),$$

существование B_j и конечность ранга, найдется прямое слагаемое B_i группы $B^{(s)}$ такое, что $A_i \cong B_i$, и число таких слагаемых одинаково в A и B . Учитывая конечность ранга, продолжая этот процесс для $\Omega'''(A)$, $\Omega''''(A)$ и так далее, получаем требуемый изоморфизм $A \cong B$.

Необходимость. Пусть в группе $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ существуют изолированные прямые слагаемые ранга 1 и хотя бы одно из них не является ни почти делимым, ни почти неделимым. Рассмотрим одно из таких слагаемых; без ограничения общности можно считать, что это A_1 . Тогда $|P(A_1)| = |P_\infty(A_1)|$. Покажем, что для любой группы $X \in \mathbf{F}_{\text{cdf}}$ среди групп B , удовлетворяющих условиям

$$E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B) \quad \text{и} \quad \text{Hom}(A, X) \cong \text{Hom}(B, X),$$

найдется неизоморфная группе A . Пусть $\tau_1 = \tau(A_1)$ и $P_\infty(\tau_1) = P(A_1)$. Для $p \in P_\infty(\tau_1)$ обозначим через $\tau_1(p)$ тип, который определяется характеристикой, полученной из некоторой характеристики типа τ_1 заменой p -го места, где стоит бесконечность, на конечное число. Пусть $P'(\tau_1)$ – множество всех тех простых чисел из

$P_\infty(\tau_1)$, для которых существует хотя бы одно прямое слагаемое A_i , $i \geq 2$, ранга 1 группы A или прямое слагаемое Y ранга 1 группы X с несравнимым с τ_1 типом такое, что $\tau_1(p) \leq \tau(A_i)$ или $\tau_1(p) \leq \tau(Y)$. Через $P''(\tau_1)$ обозначим множество всех тех простых чисел из $P_\infty(\tau_1)$, для которых существует хотя бы одно прямое слагаемое Y ранга 1 группы X с меньшим, чем τ_1 , типом и такое, что $\tau_1(p) = \tau(Y)$.

Строим группу B следующим образом:

$$B = B_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n,$$

где B_1 – группа без кручения ранга 1 типа $\tau_1(p)$ для некоторого

$$p \in P_\infty(\tau_1) \setminus [P'(\tau_1) \cup P''(\tau_1)].$$

Ясно, что множество $P_\infty(\tau_1) \setminus [P'(\tau_1) \cup P''(\tau_1)]$ непустое и даже бесконечное, поскольку $P_\infty(\tau_1)$ бесконечно, а $P'(\tau_1) \cup P''(\tau_1)$ конечно, ввиду конечности ранга групп A и X . Согласно построению группы B слагаемое B_1 изолированное и $E^\bullet(A_1) \cong E^\bullet(B_1)$, следовательно, $E^\bullet(A) \cong E^\bullet(B)$. Из строения группы B_1 следует, что если $\tau_1 > \tau(Y)$ или τ_1 несравним с $\tau(Y)$ для некоторого прямого слагаемого Y ранга 1 группы X , то и $\tau_1(p) > \tau(Y)$ или соответственно $\tau_1(p)$ несравним с $\tau(Y)$. Значит, если $\text{Hom}(A_1, Y) = 0$, то и $\text{Hom}(B_1, Y) = 0$. Если же $\text{Hom}(A_1, Y) \neq 0$, т.е. $\tau_1 \leq \tau(Y)$, то, учитывая бесконечность множества $P_\infty(\tau_1)$, получаем $\tau_1(p) \leq \tau(Y)$ и, следовательно, $\text{Hom}(A_1, Y) \cong \text{Hom}(B_1, Y)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, X) &\cong \text{Hom}(A_1, X) \oplus \text{Hom}(A_2 \oplus \cdots \oplus A_n, X) \\ &\cong \text{Hom}(B_1, X) \oplus \text{Hom}(A_2 \oplus \cdots \oplus A_n, X) \cong \text{Hom}(B, X). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, Мир, М., 1974.
- [2] А. М. Себельдин, “О группах гомоморфизмов абелевых групп без кручения”, *Группы и модули*, Изд-во Томского гос. ун-та, Томск, 1976, 70–77.
- [3] А. М. Себельдин, А. Е. Сморкалова, “Определяемость группами гомоморфизмов справа в классе вполне разложимых абелевых групп без кручения”, *Алгебра и линейная оптимизация*, Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С. Н. Черникова (3–5 июня 2002 г.), Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2002, 187–192.
- [4] А. М. Себельдин, “Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, **11**:4 (1972), 403–408.
- [5] А. М. Себельдин, “Определяемость сепарабельных абелевых групп без кручения полугруппами эндоморфизмов”, *Алгебра и логика*, **34**:5 (1995), 523–530.

А. М. Себельдин

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: sebelдин@rambler.ru

Поступило

25.10.2006

А. Е. Сморкалова

Нижегородский государственный педагогический университет