Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Доманов, Спектральный анализ степеней оператора $(Vf)(x) = q(x) \int_0^x w(t)f(t)dt$, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 444–449

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:27:03

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА $(Vf)(x) = q(x) \int_0^x w(t)f(t) dt$

И. Ю. Доманов

1. Введение. Хорошо известно [1], [2], что оператор интегрирования $J: f(x) \rightarrow \int_0^x f(t) dt$ является одноклеточным в пространствах $L_p[0, 1]$ при $p \in [1, \infty)$ и его решетка инвариантных подпространств антиизоморфна сегменту $[0, 1]$. То же оказывается верным (см. [1], [2]) и для его положительных степеней

$$J^\alpha: f(x) \rightarrow \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt, \quad \alpha > 0.$$

Более того, соответствующие решетки инвариантных и гиперинвариантных подпространств имеют (см. [1]–[3]) вид

$$\text{Lat } J^\alpha = \text{Hyplat } J^\alpha = \{E_a := \chi_{[a, 1]} L_p[0, 1] : 0 \leq a \leq 1\}. \quad (1)$$

Из описания (1) решетки $\text{Lat } J^\alpha$ немедленно вытекает следующее описание множества $\text{Cyc } J^\alpha$ циклических векторов оператора J^α :

$$f \in \text{Cyc } J^\alpha \iff \int_0^\varepsilon |f(x)|^p dx > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (\iff 0 \in \text{supp } f(x)). \quad (2)$$

Условие (2) называют ε -условием.

М. М. Маламудом в [4], [5] проведен спектральный анализ оператора $A = J^\alpha \otimes B$, действующего в $L_p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ и являющегося тензорным произведением оператора J^α и произвольной невырожденной диагональной $(n \times n)$ -матрицы $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. В частности, в [4], [5] описаны решетки $\text{Lat } A$ и $\text{Hyplat } A$ инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора A , а также множество $\text{Cyc } A$.

В работе [6] Хо Канг рассматривал оператор

$$V_{q,w}: f(x) \rightarrow q(x) \int_0^x f(t)w(t) dt \quad (3)$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ над полем $\mathbb{R}$ в случае, когда функции $q(x)$, $w(x)$ положительны и непрерывны. При этих условиях на функции q и w в [6] была доказана одноклеточность оператора $V_{q,w}$ и описано множество $\text{Cyc } V_{q,w}$ его циклических векторов.

В настоящем сообщении мы проводим спектральный анализ оператора вида (3), отказавшись от условия $q(x)w(x) > 0$, считая, однако, функцию $q(x)w(x)$ вещественной. При этом, случай знакопеременной функции $q(x)w(x)$ оказался значительно содержательнее. Перечислим рядовых эффектов, обнаруженных при его изучении:

- 1) оператор $V_{q,w}$ утрачивает свойство одноклеточности;
- 2) его сужения на некоторые инвариантные подпространства квазиподобны операторам вида $A = J \otimes B$;
- 3) при некоторых условиях на функции $q(x)$ и $w(x)$ оператор $V_{q,w}$ вида (3) может быть циклическим, не будучи одноклеточным.

Мы приводим также необходимые и достаточные условия на функции $q(x)$ и $w(x)$ при которых оператор $V_{q,w}$ не только одноклеточен, но цикличен и даже квазиподобен или подобен оператору J . Оказалось, что одноклеточность оператора $V_{q,w}$ эквивалентна его квазиподобию оператору J и эквивалентна условию $q(x)w(x) > 0$ п.в. на $[0,1]$. Подчеркнем еще, что большинство результатов являются новыми и для случая $q(x)w(x) > 0$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

- 1) X_1, X_2 – банаховы пространства;
- 2) $[X_1, X_2]$ – пространство линейных ограниченных операторов из X_1 в X_2 , $[X] := [X, X]$;
- 3) $\text{Lat } T$ – решетка инвариантных подпространств оператора $T \in [X]$;
- 4) $\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}$ – ядро оператора T ;
- 5) $\mathfrak{R}(T) = \{Tx : x \in X\}$ – образ оператора $T \in [X]$;
- 6) $\text{span } E$ – замкнутая линейная оболочка множества $E \subset X$ в X ;
- 7) $\text{supp } f$ – носитель функции $f(x)$;
- 8) $r * f$ – обозначает свертку функций $r, f \in L_1[0, 1]$: $r * f := \int_0^x r(x-t)f(t) dt$.

2. Квазиподобие операторов $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$. Пусть $q \in L_p[0, 1]$, $w \in L_q[0, 1]$, $q(x)w(x) = \overline{q(x)w(x)} \neq 0$ для п.в. $x \in [0, 1]$. Тогда оператор $V_{q,w}$ вида (3), действующий в пространстве $L_p[0, 1]$, вольтерров. Не трудно проверить, что его степени имеют вид

$$(V_{q,w}^{k+1}f)(x) = \frac{1}{k!}q(x) \int_0^x (Q(x) - Q(t))^k f(t)w(t) dt, \quad \text{где } Q(x) = \int_0^x q(s)w(s) ds.$$

Введем некоторые определения, используемые в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Подпространство E банахова пространства X называют *циклическим подпространством* для оператора $T \in [X]$, если $\text{span}\{T^n E : n \geq 0\} = X$. Вектор $f \in X$ называют *циклическим вектором* для оператора T , если $\text{span}\{T^n f : n \geq 0\} = X$. Множество всех циклических подпространств оператора T обозначают $\text{Cyc}(T)$. Положим $\mu_T := \inf_E \{\dim E : E \in \text{Cyc } T\}$.

Число $\mu_T (\leq \infty)$ называют *спектральной кратностью* оператора T в X .

Оператор T называют *циклическим* в X , если $\mu_T = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [7]. Оператор $T \in [X_1, X_2]$ называют *деформацией*, если $\ker T = \{0\}$ и $(TX_1) = X_2$.

Операторы $A \in [X_1], B \in [X_2]$ называют *квазиподобными*, если существуют деформации $T_1 \in [X_1, X_2]$ и $T_2 \in [X_2, X_1]$ такие, что $T_1 A = B T_1$ и $A T_2 = T_2 B$.

A и B *подобны*, если они квазиподобны и $T_1^{-1} \in [X_2, X_1]$.

Легко видеть, что если операторы A и B квазиподобны, то $\mu_A = \mu_B$.

Оказывается, что изучение степеней оператора $V_{q,w}$ с помощью квазиподобия можно свести к случаю, когда $|q| \equiv 1$ и $w \equiv \text{const}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R(x) := \int_0^x |q(s)w(s)| ds$, $R(1) = 1$, $R^{-1}(x)$ – функция обратная к $R(x)$ ($R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} = x$) и $r(x) := \text{sign}(qw)(R^{-1}(x))$. Тогда

- 1) операторы $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$ квазиподобны;
- 2) в качестве деформаций X и Y можно взять операторы

$$(Xf)(x) = q(x) \int_0^{R(x)} f(t) dt, \tag{4}$$

$$(Yf)(x) = r(x) \int_0^{R^{-1}(x)} w(t)f(t) dt, \tag{5}$$

т.е. $V_{q,w}X = XV_{r,1}$, $YV_{q,w} = V_{r,1}Y$;

- 3) справедливы равенства

$$XY = V_{q,w}^2, \quad YX = V_{r,1}^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть оператор Y определен формулой (5). Тогда подпространство $E \subset L_p[0, 1]$ циклическое для оператора $V_{q,w}^k$ тогда и только тогда, когда подпространство $\overline{YE}$ циклическое для оператора $V_{r,1}^k$, т.е.

$$E \in \text{Сус } V_{q,w}^k \iff \overline{YE} \in \text{Сус } V_{r,1}^k.$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (см. [6]). Пусть $q > 0$, $w > 0$, $q, w \in C[0, 1]$ и $\int_0^1 q(t)w(t) dt = 1$. Тогда операторы $V_{q,w}$ и J подобны и, значит, оператор $V_{q,w}$ одноклеточен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что оператор

$$(Tf)(x) = q(x)f\left(\int_0^x q(t)w(t) dt\right) \quad (6)$$

ограничен вместе с обратным и $TJ = V_{q,w}T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что оператор T вида (6) является преобразованием Лиувилля, которое иногда позволяет сводить уравнение Штурма–Лиувилля с несуммируемым потенциалом к уравнению с суммируемым потенциалом (см. [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда $q, w \in AC[0, 1]$, подобие операторов $V_{q,w}$ и cJ вытекает из общего результата Маламуда (см. [8]) о подобии оператора $K((Kf)(x) = \int_0^x k(x,t)f(t) dt)$ оператору интегрирования J .

Отметим также недавнюю работу [10] о подобии диссипативного оператора к оператору интегрирования.

3. Критерий одноклеточности. Следующая теорема дает критерий одноклеточности оператора $V_{q,w}^k$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $qw = \overline{qw}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1a) $\text{Lat } V_{q,w}^k = \text{Lat } J = \{\chi_{[a,1]} L_p[0, 1] : 0 \leq a \leq 1\}$;
- 1b) $\text{Сус } V_{q,w}^k = \text{Сус } J$;
- 2) оператор $V_{q,w}^k$ одноклеточный;
- 3a) функция $q(x)w(x)$ почти всюду сохраняет знак на отрезке $[0, 1]$;
- 4) оператор $V_{q,w}^k$ квазиподобен cJ^k и $c = \bar{c}$.

4. Циклические подпространства. Критерий цикличности. Следствие 1 позволяет рассматривать случай, когда $|q(x)| = 1$, $w(x) = \text{const}$ п.в. на $[0, 1]$. Обозначим через $N(f)$ число перемен знака функции f . Оказывается, что $\mu_{V_{q,w}^k} = [N(qw)/2] + 1$, если k нечетно и $\mu_{V_{q,w}^k} = N(qw) + 1$, если k четно. В частности, $\mu_{V_{q,w}^k} = \infty$, если $N(qw) = \infty$.

В случае $1 \leq N(q) < \infty$ функция $q(x)$ или $-q(x)$ ($|q(x)| = 1$) может быть записана в виде

$$q(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a_{2i}, a_{2i+1}], & i = 0, 1, \dots, [(n-1)/2], \\ -1, & x \in [a_{2i-1}, a_{2i}], & i = 0, 1, \dots, [n/2], \end{cases} \quad (7)$$

где $n = N(q) + 1$, а $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$ – некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$.

Для каждой функции $f \in L_p[0, 1]$ определим функции

$$\tilde{f}^i(x) = f(a_i - x) + f(a_i + x), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Далее, полагаем $f(x) = 0$ для $x \notin [0, 1]$. В частности, $\tilde{f}^0(x) = f(x)$. Для краткости сформулируем результаты для нечетного k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [4], [5]. Определитель функциональной матрицы $F(x) = (f_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ ($f_{ij} \in L_p[0, 1]$), подсчитанный по отношению к свертке

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt = \int_0^x g(x-t)f(t) dt = (g * f)(x),$$

называют **-определителем* и обозначают $*\text{-det } F(x)$. Аналогично **-миноры* $F(x)$ – это миноры, подсчитанные по отношению к свертке, и $*\text{-rank } F(x)$ – это максимальный ранг **-миноров* матрицы $F(x)$, удовлетворяющих условию (2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$(V_{q,1}f)(x) = q(x) \int_0^x f(t) dt$$

с функцией $q(x)$ вида (7), $N(q) \geq 1$ и k нечетно. Тогда

- 1) $\mu_{V_{q,1}^k} = [(n-1)/2] + 1$;
- 2) система $\{f_j\}_{j=1}^N$ векторов f_j порождает циклическое подпространство в $L_p[0, 1]$ для оператора $V_{q,1}^k$ тогда и только тогда, когда
 - а) $N \geq 1 + [(n-1)/2]$;
 - б) матрицы

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1^0(x) & \tilde{f}_1^2(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2[(n-1)/2]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{f}_j^0(x) & \tilde{f}_j^2(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2[(n-1)/2]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{f}_N^0(x) & \tilde{f}_N^2(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2[(n-1)/2]}(x) \end{pmatrix},$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1^1(x) & \tilde{f}_1^3(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2[n/2]-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{f}_j^1(x) & \tilde{f}_j^3(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2[n/2]-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{f}_N^1(x) & \tilde{f}_N^3(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2[n/2]-1}(x) \end{pmatrix}$$

имеют максимальный **-ранг*, т.е.

$$*\text{-rank } F_1(x) + *\text{-rank } F_2(x) = n. \quad (8)$$

Теорема 3 доказывается методом, впервые примененным Маламудом в работах [4], [5].

СЛЕДСТВИЕ 3. Оператор $V_{q,1}^k$ циклический тогда и только тогда, когда либо k нечетно и $N(q) \leq 1$, либо k четно и $N(q) = 0$. При этом

- 1) если $q(x) \equiv 1$, то $V^k = J^k$ и $f(x) \in \text{Cyc } J \iff f(x)$ удовлетворяет ε -условию;
- 2) если $q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$ и k нечетно, то $f(x) \in \text{Cyc } V_{q,1}^k \iff f(x) * (f(a-x) + f(a+x))$ удовлетворяет ε -условию.

Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности нуля и $f(0) \neq 0$, то $f(x)$, очевидно, удовлетворяет ε -условию (2). Следовательно, такая функция $f(x)$ является циклической для оператора интегрирования J . Аналогичное свойство имеет место и для оператора $V_{q,w}^k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть функции $f_i(x) \in L_p[0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны в точках a_i ($i = 1, \dots, n$). Тогда для того, чтобы система $\{f_i\}_{i=1}^n$ векторов f_i порождала циклическое подпространство в $L_p[0, 1]$ для оператора $V_{q,1}^k$ (k нечетно) достаточно выполнения условий

$$\det \begin{pmatrix} f_1(0) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_{2[(n-1)/2]}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(0) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_{2[(n-1)/2]}) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (9)$$

$$\det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_3) & \dots & f_1(a_{2[n/2]-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_3) & \dots & f_n(a_{2[n/2]-1}) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно показать, что условия (9), (10) не являются необходимыми для циклическости системы векторов $\{f_i\}_{i=1}^n$.

В качестве следствия из теоремы 3 вытекает следующий результат Маламуда [4], [5] о циклических подпространствах оператора $A = J^k \otimes B$ (в [4], [5] аналогичный результат доказан для более общих операторов вида $A = J^\alpha \otimes B$, $\alpha > 0$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [4], [5]). Пусть $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диагональная невырожденная матрица и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Пусть $A = J^k \otimes B = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i J^k$ – оператор, действующий в пространстве $L_p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ ($1 \leq p < \infty$). Тогда

- 1) $\mu_A = n$;
- 2) система векторов

$$f_i = \{f_{i1}, \dots, f_{in}\} \in L_p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n, \quad 1 \leq i \leq N,$$

порождает циклическое подпространство для оператора A тогда и только тогда, когда

- i) $N \geq n$;
- ii) матрица

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}((\lambda_1/\lambda_2)^{1/k}x) & \dots & f_{1n}((\lambda_1/\lambda_n)^{1/k}x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1}(x) & f_{N2}((\lambda_1/\lambda_2)^{1/k}x) & \dots & f_{Nn}((\lambda_1/\lambda_n)^{1/k}x) \end{pmatrix}$$

имеет максимальный $*$ -ранг, т.е. $*\text{-rank } F(x) = n$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $N(qw) = \infty$. Тогда $\mu_{V_{q,1}^k} = \infty$.

Комбинируя теорему 3 и следствие 3 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Оператор $V_{q,w}^k$ циклический точно тогда, когда либо k нечетно и $N(qw) \leq 1$, либо k четно и $N(qw) = 0$.

В заключение я хочу выразить благодарность моему научному руководителю Марку Михайловичу Маламуду за постоянное внимание и поддержку в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 2. Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980. 3. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, 1969. 4. Маламуд М.М. // Докл. РАН. 1996. Т. 351. №4. С. 143–146. 5. Malamud M. M. // Oper. Theory Adv. Appl. 1998. V. 102. P. 143–167. 6. Joо Ho Kang. // Kyungrook Math. J. 1990. V. 30. P. 1–6. 7. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970. 8. Malamud M. M. // Trans. Moscow Math. Soc. 1995. V. 55. P. 57–122. 9. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 10. Губреев Г.М. // Матем. сб. 1992. Т. 183. №9. С. 105–146.

Донецкий национальный университет, Украина

E-mail: domanovi@yahoo.com, domanov@tcc-online.com

Поступило

29.04.2002