Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Сондоу, С. А. Злобин, Интегралы по многогранникам, кратные дзета значения и полилогарифмы, и константа Эйлера, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 609–626

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:53:18

Интегралы по многогранникам, кратные дзета значения и полилогарифмы, и константа Эйлера

Дж. Сондоу, С. А. Злобин

Пусть T – треугольник с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. Рассматриваются некоторые интегралы по T , один из которых был вычислен еще Эйлером. Приводятся выражения для этих интегралов как в виде линейной комбинации кратных дзета значений, так и в виде полинома относительно обычных дзета значений. Получены асимптотические разложения интегралов и сумм некоторых кратных дзета значений с постоянным весом. Также представлены соответствующие выражения для константы Эйлера. В заключительном пункте вычисляются более общие интегралы, один из которых – повторный интеграл Чена (Дринфилда–Концевича), по некоторым многогранникам, являющимся многомерными аналогами треугольника T . Это приводит к соотношению, связывающему некоторые кратные полилогарифмические значения и кратные дзета значения.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Пусть T – треугольник, заданный выражением

$$T := \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \geq 1\},$$

с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. В данной работе мы изучаем интеграл по треугольнику T

$$I_n := \iint_T \frac{(-\ln xy)^n}{xy} dx dy \quad (1)$$

для $n = -1, 0, 1, 2, \dots$. Мы также рассматриваем интегралы по нескольким многогранникам, которые являются многомерными аналогами треугольника T .

Эйлер вычислил повторный интеграл, эквивалентный I_0 , и получил, что

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_T \frac{dx dy}{xy} = \int_0^1 \frac{1}{x} \int_{1-x}^1 \frac{dy}{y} dx = \int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{r-1}}{r} dx = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \zeta(2). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, он вывел формулу (22), которую использовал для вычисления $\zeta(2)$ с точностью до шестого знака после запятой, см. [1; раздел 1.2], [2; с. 43–45].

Мы обобщаем результат Эйлера на случай $n = 0, 1, 2, \dots$, показав, что I_n равен целой линейной комбинации *кратных дзета значений*

$$\zeta(s_1, \dots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_l^{s_l}}$$

с весом $s_1 + \dots + s_l = n + 2$. Мы также представим I_n в виде полинома относительно обычных дзета значений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 0$ – целое число.

(i) Тогда

$$I_n = n! \sum_{k=0}^n \zeta(n - k + 2, \{1\}_k), \quad (2)$$

где через $\{1\}_k$ обозначен набор $1, 1, \dots, 1$ (k раз).

(ii) Кроме того, I_n является полиномом в явной форме от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно значений дзета функции Римана $\zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(n + 2)$.

Теорема 1, следствие 1 и лемма 1 были получены вторым автором в [3]. Доказательство этих результатов приведено в п. 2, вместе с явными формулами. Рассмотрены следующие примеры:

$$\begin{aligned} I_0 &= \zeta(2), \\ I_1 &= \zeta(3) + \zeta(2, 1) = 2\zeta(3), \\ I_2 &= 2(\zeta(4) + \zeta(3, 1) + \zeta(2, 1, 1)) = \frac{9}{2}\zeta(4), \\ I_3 &= 6(\zeta(5) + \zeta(4, 1) + \zeta(3, 1, 1) + \zeta(2, 1, 1, 1)) = 36\zeta(5) - 12\zeta(2)\zeta(3). \end{aligned} \quad (3)$$

Случаи $n = 0, 1, 2$ особенно простые.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $n = 0, 1, 2$ интеграл I_n является рациональным кратным числа $\zeta(n + 2)$.

При $n = 0, 1$ это также следует из формул, полученных Бейкерсом [4] для $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ в виде интегралов по единичному квадрату

$$S := [0, 1]^2.$$

Именно, замена переменных $x = X, y = 1 - XY$ преобразует как I_0 в

$$I_0 = \iint_T \frac{dx dy}{xy} = \iint_S \frac{dX dY}{1 - XY} = \zeta(2),$$

так и $(1/2)I_1$ в

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I_1 &= \frac{1}{2} \iint_T \frac{-\ln xy}{xy} dx dy = \iint_T \frac{-\ln x}{xy} dx dy \\ &= \iint_S \frac{-\ln X}{1 - XY} dX dY = \frac{1}{2} \iint_S \frac{-\ln XY}{1 - XY} dX dY = \zeta(3). \end{aligned}$$

Приведем схему доказательства теоремы 1, но сначала сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Если $k \geq 0$ и $l \geq 0$ – целые числа, то

$$I_{k,l} := \iint_T \frac{(-\ln x)^k (-\ln y)^l}{xy} dx dy = k! l! \zeta(l+2, \{1\}_k). \quad (4)$$

Кроме того, если $l \geq 1$, то

$$J_{k,l} := \int_0^1 \frac{(-\ln(1-x))^k}{1-x} (-\ln x)^l dx = k! l! \zeta(l+1, \{1\}_k). \quad (5)$$

Разлагая $(-\ln x - \ln y)^n$ в ряд, мы сразу получим утверждение (i). Чтобы закончить доказательство леммы, покажем, что $(l+1)I_{k,l} = J_{k,l+1}$, и затем вычислим интеграл $J_{k,l}$. Утверждение (ii) теоремы 1 доказывается с помощью формулы, полученной в [5], где $J_{k,l}$ выражено через обычные дзета значения.

В качестве примера получим явную версию результата, доказанного в [6].

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $n \geq 2$ и $k \geq 0$, то кратные дзета значения $\zeta(n, \{1\}_k)$ можно представить в явном виде как полином от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно обычных дзета значений $\zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(n+k)$.

Лемма 1 также дает простое доказательство частного случая теоремы двойственности для кратных дзета значений (см., например, [1; раздел 2.8]).

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $k \geq 0$ и $l \geq 0$, то

$$\zeta(k+2, \{1\}_l) = \zeta(l+2, \{1\}_k).$$

Например, $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$ и $\zeta(2, 1, 1) = \zeta(4)$. С помощью этих равенств мы дадим второе доказательство следствия 1. Однако в отличие от случаев $n = 0$ и 1 утверждение следствия 1 в случае $n = 2$ мы не можем доказать без использования теоремы 1.

Используя численные результаты и примеры, такие как (3), мы сделаем следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Интеграл I_n не является рациональным кратным числа $\zeta(n+2)$ при $n > 2$.

Это утверждение не было доказано ни для одного значения n . Однако с помощью теоремы 1, (ii) мы можем привести условное доказательство для всех $n = 3, 4, \dots$ при стандартном предположении (см., например, [7; введение]).

ТЕОРЕМА 2. Если числа $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \dots$ алгебраически независимы над полем рациональных чисел, то предположение 1 верно.

С помощью леммы, которая дает асимптотическое разложение для коэффициентов ряда Тейлора некоторых мероморфных функций (лемма 2), мы оценим I_n при больших n .

ТЕОРЕМА 3. Имеет место асимптотическая эквивалентность

$$I_n \sim 2n!, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Более точно, имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\frac{I_n}{n!} \approx 2 + \frac{6}{2^{n+2}} + \frac{20}{3^{n+2}} + \frac{70}{4^{n+2}} + \dots, \quad n \rightarrow \infty,$$

где числитель в k -м члене имеет вид $\binom{2k}{k}$ при $k = 1, 2, \dots$.

Это в свою очередь дает оценку для суммы кратных дзета значений $\zeta(m-k, \{1\}_k)$ с постоянным весом m .

СЛЕДСТВИЕ 4. *Среднее кратных дзета значений $\zeta(m), \zeta(m-1, 1), \dots, \zeta(2, \{1\}_{m-2})$ асимптотически стремится к $2/m$ при m стремящемся к бесконечности. Точнее, имеет место следующее асимптотическое разложение:*

$$\sum_{k=0}^{m-2} \zeta(m-k, \{1\}_k) \approx 2 + \frac{6}{2^m} + \frac{20}{3^m} + \frac{70}{4^m} + \dots, \quad m \rightarrow \infty.$$

Еще одно применение теоремы 3 дает следующий любопытный результат.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{n!}$$

расходится, но является суммируемым по Абелю, и его сумма равна $1/2$.

Пойдем “вниз” от I_0 к I_{-1} .

ВОПРОС. *Можно ли вычислить интеграл*

$$I_{-1} = \iint_T \frac{dx dy}{xy(-\ln xy)} = 1.7330025\dots, \quad (7)$$

используя более известные константы?

Удивительно, но оказалось, что I_{-1} содержит в себе все интегралы $I_0, I_1, I_2, \dots$ (и, следовательно, все кратные дзета значения $\zeta(m, \{1\}_k)$ при $m \geq 2$ и $k \geq 0$).

ТЕОРЕМА 4. *Если li – логарифмическая целая функция, то*

$$I_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{\text{li}(x-x^2)}{x} dx + 1.$$

(Ср. сходящийся ряд здесь и расходящийся ряд в следствии 5.)

Теперь мы выразим двойной интеграл I_{-1} через простые интегралы, один из которых содержит обобщенный биномиальный коэффициент

$$\binom{s}{t} := \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(t+1)\Gamma(s-t+1)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место следующие интегральные формулы для I_{-1} :*

$$I_{-1} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}}\right) \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right) \frac{dx}{x}. \quad (8)$$

Разлагая первый интеграл в степенной ряд, мы видим, что n -й коэффициент содержит интеграл I_n .

ТЕОРЕМА 5. *Если $0 < |t| < 1$, то*

$$\left(1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}}\right) \frac{1}{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{n!} t^n. \quad (9)$$

Одним из применений этой теоремы является следствие 5.

Теперь свяжем I_{-1} с константой Эйлера γ , которая определяется как предел

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Если рассматривать γ как “ $\zeta(1)$ ”, то формулы

$$I_2 = \frac{9}{2}\zeta(4), \quad I_1 = 2\zeta(3), \quad I_0 = \zeta(2)$$

дают основание полагать, что I_{-1} содержит γ . Это предположение также следует из схождения между двойным интегралом (7) для I_{-1} и двойным интегралом для константы Эйлера [8], [9]

$$\gamma = \iint_S \frac{1 - X}{(1 - XY)(-\ln XY)} dX dY. \quad (10)$$

Формула (8) приводит к другой формуле, связывающей I_{-1} и γ . Именно, если $t = n$ – положительное целое число, то $\binom{2t}{t}$ – центральный биномиальный коэффициент $\binom{2n}{n}$, фигурирующий в формулах для константы Эйлера

$$\binom{2n}{n} \gamma = A_n - L_n + \iint_S \frac{(X(1-X)Y(1-Y))^n}{(1-XY)(-\ln XY)} dX dY, \quad n \geq 1,$$

и

$$\gamma = \frac{A_n - L_n}{\binom{2n}{n}} + O\left(\frac{1}{2^{6n}\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где A_n – некоторое рациональное число и L_n – частная линейная форма в логарифмах [8].

Если произвести в (10) замену переменных $X = x$, $Y = (1 - y)/x$, то мы получим интеграл по треугольнику T для константы Эйлера,

$$\gamma = \iint_T \frac{1 - x}{xy(-\ln(1 - y))} dx dy, \quad (11)$$

аналогичный интегралу по треугольнику (7) для I_{-1} .

Найдем аналог для γ первого интеграла в формуле (8) для I_{-1} , который содержит обобщенный биномиальный коэффициент $\binom{2t}{t}$. (Существуют классические аналоги для γ второго интеграла, содержащие логарифмы.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедлива следующая формула для константы Эйлера:*

$$\gamma = \int_0^\infty \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2 \binom{t+k}{k}} dt.$$

В качестве примера заметим, что если проинтегрировать почленно и пропотенцировать полученный ряд, то мы получим бесконечное произведение Сера для e^γ [10] (заново полученное в [11], [12]):

$$e^\gamma = \prod_{k=2}^\infty \left(\prod_{j=1}^k j^{(-1)^j \binom{k-1}{j-1}} \right)^{1/k} = \left(\frac{2}{1} \right)^{1/2} \left(\frac{2^2}{1 \cdot 3} \right)^{1/3} \left(\frac{2^3 \cdot 4}{1 \cdot 3^3} \right)^{1/4} \left(\frac{2^4 \cdot 4^4}{1 \cdot 3^6 \cdot 5} \right)^{1/5} \cdots$$

Оставшаяся часть статьи строится следующим образом. В пп. 2 и 3 получены соответственно неасимптотические и асимптотические результаты для I_n при $n \geq 0$. Примеры применения этих результатов для кратных дзета значений рассматриваются в п. 4, а в п. 5 доказываются формулы для I_{-1} и γ . Заключительный пункт посвящен обобщению I_n на случай интегралов по многомерным аналогам треугольника T ; один из которых – повторный интеграл Чена (Дринфилда–Концевича), см. замечание 3. В качестве примера рассматривается соотношение между некоторыми кратными полилогарифмическими значениями и кратными дзета значениями (следствие 7).

2. Интеграл I_n для $n \geq 0$. Докажем неасимптотические результаты для $I_0, I_1, I_2, \dots$, сформулированные во введении. Для удобства читателя мы повторяем здесь формулировки доказываемых результатов (лемма 1, теорема 1, следствие 1).

ЛЕММА 1. Если $k \geq 0$ и $l \geq 0$ – целые, то

$$I_{k,l} := \iint_T \frac{(-\ln x)^k (-\ln y)^l}{xy} dx dy = k!l! \zeta(l+2, \{1\}_k).$$

Кроме того, если $l \geq 1$, то

$$J_{k,l} := \int_0^1 \frac{(-\ln(1-x))^k}{1-x} (-\ln x)^l dx = k!l! \zeta(l+1, \{1\}_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$I_{k,l} = \int_0^1 \frac{(-\ln x)^k}{x} \int_{1-x}^1 \frac{(-\ln y)^l}{y} dy dx = \int_0^1 \frac{(-\ln x)^k}{x} \cdot \frac{(-\ln(1-x))^{l+1}}{l+1} dx.$$

Заменяя x на $1-x$, получим

$$I_{k,l} = \frac{J_{k,l+1}}{l+1}.$$

Таким образом, (4) следует из (5). Чтобы доказать (5), умножим формулу [7; раздел 1]

$$(-\ln(1-x))^k = k! \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{x^{n_1}}{n_1 \cdots n_k}$$

на $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$ и подставим полученный ряд

$$\frac{(-\ln(1-x))^k}{1-x} = k! \sum_{m \geq n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{x^m}{n_1 \cdots n_k}$$

в интеграл (5) для $J_{k,l}$. Затем, интегрируя почленно и учитывая, что

$$\int_0^1 x^m (-\ln x)^l dx = \frac{l!}{(m+1)^{l+1}},$$

получим

$$J_{k,l} = k!l! \sum_{m \geq n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{m^{l+1} n_1 \cdots n_k} = k!l! \zeta(l+1, \{1\}_k),$$

что доказывает утверждение леммы.

Докажем теорему 1 в следующей формулировке.

ТЕОРЕМА 1. Если $n \geq 0$, то I_n можно представить следующими способами:

(i) через кратные дзета значения в виде

$$I_n = n! \sum_{k=0}^n \zeta(n-k+2, \{1\}_k); \quad (12)$$

(ii) через обычные дзета значения в виде

$$I_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{J_{k,n-k+1}}{n-k+1}, \quad (13)$$

где интеграл $J_{k,n-k+1}$, определенный в (5), задается формулой [5]

$$J_{k,l} = k!l! \sum_{p=1}^l \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \sum_{t_i} \frac{\zeta(t_1) \cdots \zeta(t_p)}{t_1 \cdots t_p} \sum_{l_i} \binom{t_1}{l_1} \cdots \binom{t_p}{l_p}, \quad (14)$$

сумма по t_i берется по всем множествам целых чисел $\{t_1, \dots, t_p\}$ таких, что

$$t_i > 1, \quad \sum_{i=1}^p t_i = k + l + 1,$$

и сумма по l_i берется по всем множествам целых чисел $\{l_1, \dots, l_p\}$ таких, что

$$0 < l_i < t_i, \quad \sum_{i=1}^p l_i = l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая $(-\ln xy)^n = (-\ln x - \ln y)^n$ в определении (1) интеграла I_n и применяя (4), получим (12). Следовательно, применяя (5), получим формулу (13). Наконец, заметим, что оценка (14) интеграла (5) для $J_{k,l}$ доказана в [5].

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $n = 0, 1, 2$ интеграл I_n является рациональным кратным числа $\zeta(n+2)$.

Мы приведем два доказательства этого утверждения. Первое доказательство короткое, но оно использует теорему 1, (ii), доказательство которой дано в [5]. Второе доказательство длиннее, но оно самодостаточное (за исключением доказательства формулы Эйлера): оно использует теорему 1, (i) и следствие 3, доказательства которых не зависят от результатов, полученных в других статьях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1. При $n = 0, 1, 2$ из формул (13) и (14) следует, что

$$I_0 = J_{0,1} = \zeta(2), \quad I_1 = \frac{1}{2} J_{0,2} + J_{1,1} = 2\zeta(3), \quad I_2 = \frac{1}{3} J_{0,3} + \frac{1}{2} J_{1,2} + J_{2,1} = \frac{9}{4}\zeta(4).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2. Во введении было показано, что $I_0 = \zeta(2)$. Применяя тот же метод и формулу $\int_0^1 x^{k-1}(-\ln x) dx = k^{-2}$, получим

$$I_1 = 2 \iint_T \frac{-\ln x}{xy} dx dy = 2 \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \ln x dx = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^{k-1}(-\ln x) dx = 2\zeta(3).$$

С другой стороны, $I_0 = \zeta(2)$ и $I_1 = \zeta(3) + \zeta(2, 1)$ в силу теоремы 1, (i) и $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$ в силу следствия 3.

Чтобы доказать, что $I_2 = (9/2)\zeta(4)$, достаточно в силу теоремы 1, (i) и следствия 3 применить формулу Эйлера $\zeta(3, 1) = \zeta(4)/4$. (Для доказательства последней положим $n = 3$ в его уравнении (9.5) в [13; с. 252].)

ТЕОРЕМА 2. *Если числа π , $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, ... алгебраически независимы над полем рациональных чисел, то I_n не является рациональным кратным числа $\zeta(n+2)$ при $n > 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $n = 3m - 2$ при $m > 1$. Интеграл I_n равен линейной комбинации (13) интегралов $J_{k,l}$ с положительными коэффициентами. Каждый $J_{k,l}$ равен полиному (14) от многих переменных относительно обычных дзета значений. Теперь в (14) моном $\zeta(3)^m$ появляется только при $p = m$, и тогда его коэффициент не равен нулю и имеет знак $(-1)^{m+1}$. Следовательно, в выражении для I_n коэффициент $\zeta(3)^m$ не равен нулю. Отсюда следует, что по условию I_n не может быть рациональным кратным числа $\zeta(n+2) = \zeta(3m)$.

Случаи $n = 3m + 3$ и $n = 3m + 5$ при $m > 0$ аналогичны: рассматриваются соответственно мономы $\zeta(3)^m \zeta(5)$ и $\zeta(3)^m \zeta(7)$. Оставшиеся случаи $n = 3$ и $n = 5$ доказываются прямыми вычислениями. Таким образом, теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 5. Для удобства читателя напомним ее формулировку.

ТЕОРЕМА 5. *Если $0 < |t| < 1$, то*

$$\frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{n!} t^n. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производящая функция

$$\sum_{k,l \geq 0} x^{k+1} y^{l+1} \zeta(l+2, \{1\}_k) = 1 - \frac{\Gamma(1-x)\Gamma(1-y)}{\Gamma(1-x-y)} \quad (16)$$

(ср. с (19)) выводится в [6]. Если $x = y = -t$, то ряд сходится при $|t| < 1$. Полагая $k + l = n$, получим

$$t^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \sum_{k=0}^n \zeta(n-k+2, \{1\}_k) = 1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}}.$$

Применяя (2), завершаем доказательство теоремы.

3. Асимптотическое разложение интеграла I_n . Применяя теорему 5 и следующую лемму, оценим интеграл I_n при больших n .

ЛЕММА 2. *Предположим, что функция $f(z)$ мероморфна в комплексной плоскости и имеет только простые полюса $z_1, z_2, \dots$ с вычетами $r_1, r_2, \dots$ соответственно. Если $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$, то коэффициенты ряда Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

имеют асимптотическое разложение

$$a_n \approx -\frac{r_1}{z_1^{n+1}} - \frac{r_2}{z_2^{n+1}} - \dots, \quad n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Напомним [14; раздел 1.5], что из последней формулы следует, что, при любом фиксированном положительном целом числе k

$$a_n = -\frac{r_1}{z_1^{n+1}} - \dots - \frac{r_k}{z_k^{n+1}} + O\left(\frac{r_{k+1}}{z_{k+1}^{n+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Мероморфная функция имеет только конечное число полюсов в любой ограниченной области, таким образом, для любого $k \geq 1$ существует $l > k$ такой, что $|z_l| < |z_{l+1}|$. Заметим, что единственными особенностями функции

$$f(z) - \sum_{j=1}^l \frac{r_j}{z - z_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + \frac{r_1}{z_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_l}{z_l^{n+1}} \right) z^n \quad (18)$$

являются $z_{l+1}, z_{l+2}, \dots$. Отсюда и из неравенств $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ следует, что радиус сходимости ряда (18) равен $|z_{l+1}|$. Так как $|z_l| < |z_{l+1}|$, можно подставить $z = z_l$ в эти ряды. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{r_1}{z_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{z_k^{n+1}} + \frac{r_{k+1}}{z_{k+1}^{n+1}} + \dots + \frac{r_l}{z_l^{n+1}} \right) z_l^n = 0.$$

Так как $|z_{k+1}| \leq |z_{k+2}| \leq \dots \leq |z_l|$, в пределе получаем асимптотическую формулу (17). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Соотношение $I_n \sim 2n!$ выполняется при n , стремящемся к бесконечности. Более точно, имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\frac{I_n}{n!} \approx 2 + \frac{6}{2^{n+2}} + \frac{20}{3^{n+2}} + \frac{70}{4^{n+2}} + \dots, \quad n \rightarrow \infty,$$

где числитель в k -м члене равен $\binom{2k}{k}$ при $k = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим функцию в левой части (9) через $f(t)$. Кроме устранимой особенности в точке $t = 0$, все особенности функции $f(t)$ являются простыми полюсами в точках $t = -1, -2, \dots$. Вычисления показывают, что вычет в точке $t = -k$ равен

$$\text{Res}(f; -k) = \text{Res}\left(\frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{\Gamma(t+1)^2}{\Gamma(2t+1)}\right); -k\right) = -\frac{1}{k^2} \lim_{t \rightarrow -k} (t+k) \frac{\Gamma(t+1)^2}{\Gamma(2t+1)} = \frac{1}{k} \binom{2k}{k}$$

при $k = 1, 2, \dots$. Применяя теорему 5 и лемму 2, получим второе утверждение теоремы (из которого следует первое утверждение).

СЛЕДСТВИЕ 5. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{n!}$$

расходится, но является суммируемым по Абелю, и его сумма равна $1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расходимость следует из (6). Полагая, что $t \rightarrow 1^-$ в (15), получаем требуемое суммирование по Абелю.

4. Примеры в случае кратных дзета значений. Применяя результаты, полученные для I_n , рассмотрим кратные дзета значения вида $\zeta(m, \{1\}_k)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $m \geq 2$ и $k \geq 0$, то кратное дзета значение $\zeta(m, \{1\}_k)$ можно представить в явном виде как полином от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно обычных дзета значений $\zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(m+k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $l = m - 1$ в (5) и (14).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Этот результат, включая полиномиальную формулу (по крайней мере, неявную), был впервые получен в [6] с помощью производящей функции (см. [6] касательно равносильности с (16))

$$\sum_{k, l \geq 0} x^{k+1} y^{l+1} \zeta(l+2, \{1\}_k) = 1 - \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n + y^n - (x+y)^n}{n} \zeta(n)\right). \quad (19)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $k \geq 0$ и $l \geq 0$, то

$$\zeta(k+2, \{1\}_l) = \zeta(l+2, \{1\}_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены переменных $x, y \rightarrow y, x$ в интеграле (4) из симметрии треугольника T следует, что $I_{k,l} = I_{l,k}$. Применяя лемму 1, получаем искомый результат.

СЛЕДСТВИЕ 4. Среднее кратных дзета значений $\zeta(m), \zeta(m-1, 1), \dots, \zeta(2, \{1\}_{m-2})$ асимптотически стремится к $2/m$ при m , стремящемся к бесконечности. Действительно, имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\sum_{k=0}^{m-2} \zeta(m-k, \{1\}_k) \approx 2 + \frac{6}{2^m} + \frac{20}{3^m} + \frac{70}{4^m} + \dots, \quad m \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $m = n + 2$ в теоремах 1 и 3, получаем искомое разложение. Отсюда, искомое среднее асимптотически стремится к $2/(m-1) \sim 2/m$ при m , стремящемся к бесконечности.

5. Интеграл I_{-1} и константа Эйлера. Докажем утверждения, сформулированные для I_{-1} и γ во введении. Как обычно, для удобства читателя повторим здесь их формулировки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Имеют место следующие формулы, выражающие двойной интеграл I_{-1} через простые интегралы:

$$I_{-1} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2t)^2}\right) \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right) \frac{dx}{x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (7), делая замену

$$-\frac{1}{\ln xy} = \int_0^{\infty} (xy)^t dt, \quad (20)$$

и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} I_{-1} &= \int_0^\infty \int_0^1 \int_{1-x}^1 (xy)^{t-1} dy dx dt = \int_0^\infty \int_0^1 (x^{t-1} - x^{t-1}(1-x)^t) dx \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{\Gamma(t)\Gamma(t+1)}{\Gamma(2t+1)} \right) \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

применяя интеграл Эйлера для бета функции. После замены $\Gamma(t)$ на $t^{-1}\Gamma(t+1)$, получим первое равенство. Интегрируя по y в (7), видим, что второй интеграл также равен I_{-1} .

ТЕОРЕМА 4. Если li – логарифмический интеграл, то

$$I_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{\text{li}(x-x^2)}{x} dx + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим

$$-\frac{1}{\ln xy} = \int_0^1 (xy)^t dt - \frac{xy}{\ln xy}$$

в (7). Следуя доказательству предложения 1, получим

$$I_{-1} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}} \right) \frac{dt}{t^2} - \iint_T \frac{dx dy}{\ln xy}.$$

Подставляя ряд (15) в первый интеграл и интегрируя почленно, получим ряд в искомой формуле. Полагая $y = u/x$ во втором интеграле, получим

$$\iint_T \frac{dx dy}{\ln xy} = \int_0^1 \frac{1}{x} \int_{x-x^2}^x \frac{du}{\ln u} dx = \int_0^1 \frac{\text{li}(x) - \text{li}(x-x^2)}{x} dx,$$

и, проводя следующие вычисления (см. [15; раздел 6.212]), завершим доказательство:

$$\int_0^1 \frac{\text{li}(x)}{x} dx = \lim_{q \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\text{li}(x)}{x^{q+1}} dx = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\ln(1-q)}{q} = -1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеет место следующая формула для константы Эйлера:

$$\gamma = \int_0^\infty \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \binom{t+k}{k}} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (20) заменим xy на $1-y$. Подставляя результат в (11) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_0^\infty \int_0^1 \int_{1-y}^1 \frac{1-x}{xy} (1-y)^t dx dy dt = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{-\ln(1-y) - y}{y} (1-y)^t dy dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 y^{k-1} (1-y)^t dy dt. \end{aligned}$$

Следуя доказательству предложения 1, приходим к искомой формуле.

6. Интегралы по многомерным аналогам треугольника T . Существует несколько путей обобщения треугольника T и интеграла I_n . Простейшим обобщением T является многогранник

$$V_m := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in [0, 1]^m \mid x_1 + x_j \geq 1, j = 2, \dots, m\}.$$

ТЕОРЕМА 6. При $m \geq 2$ и $n \geq 0$ интеграл

$$K_{m,n} := \int \cdots \int_{V_m} \frac{(-\ln(x_1 x_2 \cdots x_m))^n}{x_1 x_2 \cdots x_m} dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

равен целой линейной комбинации кратных дзета значений с весом $m+n$, а именно,

$$K_{m,n} = n! \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{(k_2 + \dots + k_m + m - 1)!}{(k_2 + 1)! \cdots (k_m + 1)!} \zeta(k_2 + \dots + k_m + m, \{1\}_{k_1}). \quad (21)$$

Он также равен полиному от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно значений дзета функции Римана в целых точках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая $(-\ln(x_1 x_2 \cdots x_m))^n = (-\ln x_1 - \ln x_2 - \dots - \ln x_m)^n$, получим

$$K_{m,n} = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!} \times \int_0^1 \frac{(-\ln x_1)^{k_1}}{x_1} \left(\int_{1-x_1}^1 \frac{(-\ln x_2)^{k_2}}{x_2} dx_2 \cdots \int_{1-x_1}^1 \frac{(-\ln x_m)^{k_m}}{x_m} dx_m \right) dx_1.$$

Так как

$$\int_{1-x_1}^1 \frac{(-\ln x)^k}{x} dx = \frac{(-\ln(1-x_1))^{k+1}}{k+1},$$

мы имеем

$$K_{m,n} = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! (k_2 + 1)! \cdots (k_m + 1)!} \int_0^1 \frac{(-\ln x_1)^{k_1}}{x_1} (-\ln(1-x_1))^{k_2 + \dots + k_m + m - 1} dx_1.$$

Вычисляя последний интеграл с помощью формул (5) и (14), приходим к утверждению теоремы.

В случае $m = 2$ многогранник V_2 является треугольником T , интеграл $K_{2,n}$ является треугольным интегралом I_n и теорема 6 сводится к теореме 1. В частности, формула (21) для $K_{m,n}$ является весовой версией формулы (2) для I_n .

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $m \geq 2$, то

$$K_{m,0} = (m-1)! \zeta(m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $n = 0$ в теореме 6, получим $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ в (21).

Существует другое, более естественное доказательство следствия 6, которое не использует теорему 6.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 6. Воспользуемся представлением

$$\zeta(m) = K'_m := \int \cdots \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 \cdots dx_m}{1 - x_1 \cdots x_m}.$$

(Чтобы доказать эту формулу, разложим подынтегральное выражение в геометрический ряд и проинтегрируем почленно.) Проведем замену переменных

$$x_1 = y_m, \quad x_2 = \frac{y_{m-1}}{y_m}, \quad x_3 = \frac{y_{m-2}}{y_{m-1}}, \quad \dots, \quad x_{m-1} = \frac{y_2}{y_3}, \quad x_m = \frac{1 - y_1}{y_2}.$$

(При $m = 2$ сравним это выражение с преобразованием интеграла I_0 в интеграл Бейкера для $\zeta(2)$ во введении.) Получим

$$\zeta(m) = \int \cdots \int \frac{dy_1 \cdots dy_m}{y_1 \cdots y_m},$$

где интеграл берется по многограннику, определенному как $1 \geq y_m \geq y_{m-1} \geq \cdots \geq y_2 \geq 0$, $y_2 + y_1 \geq 1$, $y_1 \leq 1$. В силу симметрии можно поменять между собой переменные y_i и y_j при $i > j > 1$. Применяя все перестановки переменных $y_2, \dots, y_m$, получим

$$(m-1)! \zeta(m) = \int \cdots \int_{V'_m} \frac{dy_1 \cdots dy_m}{y_1 \cdots y_m},$$

где интеграл берется по

$$V'_m := \{(y_1, y_2, \dots, y_m) \in [0, 1]^m \mid y_1 + y_j \geq 1, j = 2, \dots, m\}.$$

Это и есть интеграл $K_{m,0}$ и, таким образом, второе доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Интеграл K'_m равносильен интегралу Чена (Дринфилда–Концевича) [7; раздел 1]

$$\int \cdots \int \frac{dY_1 dY_2 \cdots dY_m}{(1 - Y_1)Y_2 \cdots Y_m}$$

по многограннику $1 \geq Y_m \geq \cdots \geq Y_1 \geq 0$: положим $y_1 = 1 - Y_1$ и $y_j = Y_j$ для $j = 2, \dots, m$.

Если переписать (21) в виде

$$K_{m,n} = n! \sum_{p=0}^n a_{m,p} \zeta(m+p, \{1\}_{n-p}),$$

где $a_{m,p}$ обозначает сумму коэффициентов полинома

$$a_{m,p} := \sum_{\substack{k_2 \geq 0, \dots, k_m \geq 0 \\ k_2 + \dots + k_m = p}} \frac{(k_2 + \dots + k_m + m - 1)!}{(k_2 + 1)! \cdots (k_m + 1)!},$$

то для любого фиксированного $m \geq 2$ можно получить замкнутое выражение для $a_{m,p}$. Например,

$$a_{2,p} = 1, \quad a_{3,p} = 4 \cdot 2^p - 2, \quad a_{4,p} = 27 \cdot 3^p - 24 \cdot 2^p + 3.$$

В общем случае имеем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Выберем $m \geq 2$ и $p \geq 0$. Тогда целые числа $a_{m,p}, a_{m-1,p+1}, \dots, a_{2,p+m-2}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\sum_{t=0}^{m-2} \binom{m-1}{t} a_{m-t,p+t} = (m-1)^{m+p-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что если ввести обозначение

$$S_{m,p} := \{(k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^{m-1} \mid k_j \geq -1, j = 2, \dots, m; k_2 + \dots + k_m = p\},$$

то

$$\sum_{S_{m,p}} \frac{(k_2 + \dots + k_m + m - 1)!}{(k_2 + 1)! \dots (k_m + 1)!} = \sum_{\substack{l_2 \geq 0, \dots, l_m \geq 0 \\ l_2 + \dots + l_m = p+m-1}} \frac{(l_2 + \dots + l_m)!}{l_2! \dots l_m!} = (m-1)^{p+m-1}.$$

Теперь заметим, что если $S_{m,p,t}$ – подмножество множества $S_{m,p}$, состоящего из тех $(m-1)$ -наборов $(k_2, \dots, k_m)$, в которых в точности t чисел среди k_j равны -1 , то

$$\begin{aligned} \sum_{S_{m,p,t}} \frac{(k_2 + \dots + k_m + m - 1)!}{(k_2 + 1)! \dots (k_m + 1)!} &= \binom{m-1}{t} \sum_{\substack{l_2 \geq 0, \dots, l_m \geq 0 \\ l_2 + \dots + l_{m-t} = p+t}} \frac{(l_2 + \dots + l_m + m - 1 - t)!}{(l_2 + 1)! \dots (l_m + 1)!} \\ &= \binom{m-1}{t} a_{m-t,p+t}. \end{aligned}$$

Наконец, из того, что $S_{m,p}$ – объединение непересекающихся множеств,

$$S_{m,p} = \bigcup_{t=0}^{m-2} S_{m,p,t},$$

следует утверждение предложения.

Другим обобщением треугольника T является многогранник

$$W_m := \{(x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m \mid x_i + x_j \geq 1, 1 \leq i < j \leq m\}.$$

Заметим, что он симметричен по всем переменным в отличие от V_m .

Сначала мы обобщим треугольный интеграл I_0 на интеграл по W_m , а затем продолжим обобщение интегралов I_n на W_m для всех $n \geq 0$.

Напомним, что для всех комплексных s и всех z таких, что $|z| < 1$, полилогарифм $\text{Li}_s(z)$ определяется сходящимся рядом

$$\text{Li}_s(z) := \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r^s}.$$

ТЕОРЕМА 7. Если $m \geq 2$, то интеграл

$$L_m := \int \dots \int_{W_m} \frac{dx_1 \dots dx_m}{x_1 \dots x_m}$$

равен полиному от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно значений $\ln 2$, $\zeta(m)$ и $\text{Li}_s(1/2)$ при $s = 2, 3, \dots, m$, именно,

$$L_m = m! \zeta(m) - (m-1) \ln^m 2 - m! \sum_{p=0}^{m-2} \frac{\ln^p 2}{p!} \text{Li}_{m-p}\left(\frac{1}{2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из симметрии W_m следует, что

$$L_m = m! \int \cdots \int_{W'_m} \frac{dx_1 \cdots dx_m}{x_1 \cdots x_m},$$

где W'_m – многогранник, заданный неравенствами $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m \leq 1$ и $x_1 + x_2 \geq 1$. Последовательно интегрируя по $x_m, x_{m-1}, \dots, x_2$ и полагая, что $x = x_1, y = x_2$, получим

$$L_m = m(m-1) \iint_H \frac{(-\ln y)^{m-2}}{xy} dx dy,$$

где H – треугольник, заданный неравенствами $0 \leq x \leq y \leq 1$ и $x + y \geq 1$. (Таким образом, H является верхней половиной треугольника T , разделенного пополам линией $y = x$.) Так как H также определяется неравенствами $1/2 \leq y \leq 1$ и $1 - y \leq x \leq y$, мы видим, что

$$\begin{aligned} L_m &= m(m-1) \int_{1/2}^1 \frac{(-\ln y)^{m-2} (\ln y - \ln(1-y))}{y} dy \\ &= (m-1) \left(-(\ln 2)^m + m \int_{1/2}^1 \frac{(-\ln y)^{m-2} (-\ln(1-y))}{y} dy \right). \end{aligned}$$

Разложение в ряд

$$\frac{-\ln(1-y)}{y} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{y^{r-1}}{r}$$

приводит к равенству

$$\int_{1/2}^1 \frac{(-\ln y)^{m-2} (-\ln(1-y))}{y} dy = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \int_{1/2}^1 y^{r-1} (-\ln y)^{m-2} dy.$$

Теперь рассмотрим тождество

$$\int_{1/2}^1 y^{t+r-1} dy = \frac{1}{t+r} - \frac{1}{(t+r)2^{t+r}}.$$

Если его продифференцировать l раз по t и затем положить $t = 0$, то мы получим

$$\int_{1/2}^1 y^{r-1} (-\ln y)^l dy = \frac{l!}{r^{l+1}} - \frac{l!}{2^r} \sum_{p=0}^l \frac{\ln^p 2}{r^{l-p+1} p!}.$$

Полагая $l = m - 2$, приходим к утверждению теоремы.

ПРИМЕР 1. Положим $m = 2$, что дает

$$L_2 = \iint_{W_2} \frac{1}{xy} = 2\zeta(2) - \ln^2 2 - 2\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

С другой стороны, $L_2 = I_0 = \zeta(2)$. Это доказывает формулу Эйлера для дилогарифма в точке $1/2$ [1; раздел 1.2], [2; с. 43–45], [16; раздел 1.4]:

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2 2^r} = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\ln^2 2}{2}. \quad (22)$$

Теперь возьмем $m = 3$. Применяя формулу Ландена для трилогарифма в точке $1/2$ [16; формула 6.12],

$$\text{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7\zeta(3)}{8} - \frac{\pi^2 \ln 2}{12} + \frac{\ln^3 2}{6}, \quad (23)$$

получим

$$L_3 = \iiint_{W_3} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{x_1 x_2 x_3} = 6\zeta(3) - 2\ln^3 2 - 6\text{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) - 6\ln 2 \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\zeta(3).$$

Таким образом, что удивительно, оба числа L_3 и I_1 являются рациональными кратными числа $\zeta(3)$.

Наконец, полагая $m = 4$ и применяя формулы для $\text{Li}_2(1/2)$ и $\text{Li}_3(1/2)$, получим

$$L_4 = \frac{4}{15}\pi^4 - \ln^4 2 + \pi^2 \ln^2 2 - 21\zeta(3) \ln 2 - 24\text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right).$$

Теперь обобщим I_n на интеграл по многогранник W_m . Сначала расширим определение полилогарифма $\text{Li}_s(z)$, вводя определение *кратного полилогарифма*

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_l}(z) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_l^{s_l}}.$$

ТЕОРЕМА 8. Если $m \geq 2$ и $n \geq 0$, то интеграл

$$M_{m,n} := \int \dots \int_{W_m} \frac{(-\ln(x_1 \dots x_m))^n}{x_1 \dots x_m} dx_1 \dots dx_m$$

равен полиному от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно значений $\ln 2$, $\zeta(a, \{1\}_{m+n-a})$ при $m \leq a \leq m+n$ и $\text{Li}_{b, \{1\}_c}(1/2)$ при $b+c \leq m+n$, $b \geq 2$, $0 \leq c \leq n$.

В явном виде, если $A(k_2) := 1/k_2!$ и если

$$A(k_2, \dots, k_m) := \frac{1}{k_2! \dots k_m!} \cdot \frac{1}{(k_m+1)(k_{m-1}+k_m+2) \dots (k_3 + \dots + k_m + m-2)}$$

при $m \geq 3$, то

$$\begin{aligned} M_{m,n} = m!n! & \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} A(k_2, \dots, k_m) \\ & \times \left[(k_2 + \dots + k_m + m-2)! \zeta(k_2 + \dots + k_m + m, \{1\}_{k_1}) \right. \\ & - \frac{\ln^{m+n} 2}{(k_1+1)!(m+n)} \\ & \left. - (k_2 + \dots + k_m + m-2)! \sum_{p=0}^{k_2 + \dots + k_m + m-2} \frac{\ln^p 2}{p!} \text{Li}_{k_2 + \dots + k_m + m-p, \{1\}_{k_1}}\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 7 (случай $n = 0$).

Отметим, что имеет место равенство интегралов $M_{2,n} = I_n$.

В качестве примера применения теоремы 8 получим следующее соотношение между некоторыми кратными значениями полилогарифма и кратными дзета значениями. (Это соотношение также можно вывести из формулы свертки Гёльдера [17; (7.2)]).

СЛЕДСТВИЕ 7. Если $n \geq 0$, то

$$\sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n-k} \frac{\ln^p 2}{p!} \operatorname{Li}_{n-k+2-p, \{1\}_k} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1 - 2^{n+1}}{(n+2)!} \ln^{n+2} 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \zeta(n-k+2, \{1\}_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 8 возьмем $m = 2$ и положим $k_1 = k$, так что $k_2 = n - k$. Тогда $A(k_2) = 1/(n-k)!$ и

$$M_{2,n} = 2n! \sum_{k=0}^n \left[\zeta(n-k+2, \{1\}_k) - \frac{\ln^{n+2} 2}{(k+1)!(n-k)!(n+2)} - \sum_{p=0}^{n-k} \frac{\ln^p 2}{p!} \operatorname{Li}_{n-k+2-p, \{1\}_k} \left(\frac{1}{2} \right) \right].$$

Теперь подставим $M_{2,n} = I_n$, и применим теорему 1, (i) и тождество

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)!}.$$

ПРИМЕР 2. Случай $n = 0$ — это формула Эйлера (22) при $\operatorname{Li}_2(1/2)$. Полагая $n = 1$ и подставляя $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$, получим соотношение

$$\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) \ln 2 + \operatorname{Li}_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln^3 2}{2} + \zeta(3),$$

которое является частным случаем уравнения (7.3) в [17]. Подставляя значения $\operatorname{Li}_2(1/2)$ и $\operatorname{Li}_3(1/2)$ в (22) и (23), получим формулу

$$\operatorname{Li}_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2 2^r} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1} \right) = \frac{\zeta(3)}{8} - \frac{\ln^3 2}{6}.$$

Наконец, добавляя $\operatorname{Li}_3(1/2)$, получим суммирование Рамануджана [13; с. 258]

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2 2^r} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r} \right) = \zeta(3) - \frac{\pi^2 \ln 2}{12}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Cartier, “Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents”, *Astérisque*, **282**, Exp. № 885 (2002), 137–173.
- [2] W. Dunham, *Euler: The Master of Us All*, Dolciani Math. Exp., **22**, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.
- [3] S. Zlobin, *On a certain integral over a triangle*, [arXiv: math.NT/0511239](https://arxiv.org/abs/math.NT/0511239).

- [4] F. Beukers, “A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ ”, *Bull. London Math. Soc.*, **11**:3 (1979), 268–272.
- [5] K. S. Kölbig, J. A. Mignaco, E. Remiddi, “On Nielsen’s generalized polylogarithms and their numerical calculation”, *Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT)*, **10**:1 (1970), 38–73.
- [6] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, “Evaluations of k -fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k ”, Research paper R5, *Electron. J. Combin.*, **4**:2 (1997).
- [7] M. Waldschmidt, “Multiple polylogarithms: an introduction”, *Number Theory and Discrete Mathematics*, Proc. Int. Conf. held at Panjab University (Panjab University, Chandigarh, October 2–6, 2000), Trends Math., eds. A. K. Agarwal et al., Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, 1–12.
- [8] J. Sondow, “Criteria for irrationality of Euler’s constant”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**:11 (2003), 3335–3344.
- [9] J. Sondow, “Double integrals for Euler’s constant and $\ln 4/\pi$ and an analog of Hadjicostas’s formula”, *Amer. Math. Monthly*, **112**:1 (2005), 61–65.
- [10] J. Ser, “Sur une expression de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, **182** (1926), 1075–1077.
- [11] J. Sondow, *An infinite product for e^γ via hypergeometric formulas for Euler’s constant, γ* , arXiv: [math.CA/0306008](https://arxiv.org/abs/math.CA/0306008), 2003.
- [12] J. Sondow, “A faster product for π and a new integral for $\ln \pi/2$ ”, *Amer. Math. Monthly*, **112**:8 (2005), 729–734.
- [13] B. C. Berndt, *Ramanujan’s Notebooks*, part I, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [14] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, Dover Publ., New York, 1981.
- [15] S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego, 2000.
- [16] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North-Holland Publ., New York, 1981.
- [17] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, P. Lisonek, “Special values of multiple polylogarithms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353**:3 (2001), 907–941.

Дж. Сондоу

E-mail: jsondow@alumni.princeton.edu

Поступило

09.02.2007

С. А. Злобин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: sirg_zlobin@mail.ru