Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 453–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:43:09

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОДНОРОДНОЙ СТРОГО ПСЕВДО-ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ЕЕ НОРМАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Лобода

1. Основные формулировки. В 3-мерном комплексном пространстве рассмотрим вещественную гиперповерхность, локально однородную относительно голоморфных преобразований. Везде в статье локальная однородность многообразия M в некоторой его точке P означает существование локальной группы Ли G , действующей на M транзитивно вблизи точки P . При этом элементами группы G являются биголоморфные преобразования объемлющего M пространства, определенные вблизи P .

Локально однородные гиперповерхности двумерных комплексных пространств были полностью описаны (в явной форме и в терминах соответствующих алгебр Ли) Э. Картаном в [1]. А в силу [2] локально однородная невырожденная по Леви (а значит, строго псевдо-выпуклая) гиперповерхность 2-мерного комплексного пространства определяется тейлоровскими коэффициентами своего нормального мозеровского (см. [3]) уравнения не более, чем восьмого порядка.

ТЕОРЕМА 1. *Локально однородная строго псевдо-выпуклая гиперповерхность 3-мерного комплексного пространства определяется тейлоровскими коэффициентами своего нормального уравнения не более, чем седьмого порядка.*

Ниже приводятся два утверждения, уточняющие этот результат.

ТЕОРЕМА 2. *Локально однородная строго псевдо-выпуклая гиперповерхность 3-мерного комплексного пространства, имеющая более, чем дискретную группу изотропии, определяется тейлоровскими коэффициентами своего нормального уравнения не более, чем шестого порядка.*

Напомним, что для группы изотропии $\text{Aut}_P(M)$ однородной несферической строго псевдо-выпуклой гиперповерхности M 3-мерного комплексного пространства выполняется (см. [4]) оценка $\dim \text{Aut}_P(M) \leq 2$.

Полный список однородных поверхностей, имеющих в точности 2-мерные группы изотропии, построен в [5].

ТЕОРЕМА 3. *Все локально-однородные строго псевдо-выпуклые вещественные гиперповерхности 3-мерных комплексных пространств, имеющие 1-мерные группы изотропии, задаются с точностью до локальной голоморфной эквивалентности следующим списком попарно неэквивалентных однородных поверхностей пространства $\mathbb{C}^3$ ($z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $w = u + iv$ – координаты в этом пространстве):*

$$v = x_2^2 + ((1 + x_1)^\alpha - 1), \quad \alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty), \quad (1)$$

$$v = x_2^2 - ((1 + x_1)^\alpha - 1), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (2)$$

$$v = x_2^2 + (1 + x_1) \ln(1 + x_1), \quad (3)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + u^2 = 1, \quad (4)$$

$$-x_1^2 - x_2^2 + u^2 = 1, \quad (5)$$

$$1 \pm (|z_1|^2 + |z_2|^2) + |w|^2 = a|1 + z_1^2 + z_2^2 + w^2|, \quad a > 1, \quad (6)$$

$$1 \pm (|z_1|^2 + |z_2|^2) - |w|^2 = a|1 + z_1^2 + z_2^2 - w^2|, \quad 0 < a < 1. \quad (7)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00594 и № 99-01-00969, а также Программы поддержки ведущих научных школ, грант № 0015-06-008.

2. Схема доказательства. Для доказательства теорем 1–3 рассматривается алгебра $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей, касательных к однородной поверхности M . Для любого такого поля Z , имеющего в координатах вблизи $M = \{\Phi(z_1, z_2, w) = 0\}$ вид

$$Z = f^{(1)}(z, w) \frac{\partial}{\partial z_1} + f^{(2)}(z, w) \frac{\partial}{\partial z_2} + g(z, w) \frac{\partial}{\partial w},$$

выполняется тождество

$$\operatorname{Re}\{Z(\Phi)\}|_M \equiv 0. \quad (8)$$

Задавая вещественно-аналитическую поверхность M нормальным в смысле Мозера уравнением

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \sum_{k, l \geq 2, m \geq 0} h_{klm}(z, \bar{z}) u^m \quad (9)$$

и учитывая голоморфность $f^{(1)}, f^{(2)}, g$, рассмотрим левую часть (8) как аналитическую функцию от пяти вещественных переменных $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, u$.

Обозначая через $(k, \bar{l}, m)$ набор степеней соответственно по переменным $z, \bar{z}, u$, будем рассматривать $(k, \bar{l}, m)$ -компоненты основного тождества (8).

Учтем при этом следующее уточнение результата [3] (см. еще [6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Многочлен h_{220} из нормального уравнения (9) несферической поверхности M можно привести к одному из двух видов:*

$$h_{220} = \pm E_0, \quad (10)$$

или

$$h_{220} = \pm(aE_0 + E_3), \quad a \geq 0, \quad (11)$$

где $E_0 = (|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4)$, $E_3 = (|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)$.

Из $(2, \bar{2}, 0)$ - и $(3, \bar{2}, 0)$ -компонент основного тождества получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если в нормальном уравнении (9) однородной поверхности M многочлен h_{220} имеет вид (11), то группа изотропии M может быть только дискретной.*

В этом случае размерность алгебры $\mathfrak{g}$ равна размерности самой поверхности M , т.е. 5. При этом координатами в алгебре $\mathfrak{g}$ являются

$$p_1 = f^{(1)}(0, 0) \in \mathbb{C}, \quad p_2 = f^{(2)}(0, 0) \in \mathbb{C}, \quad q = g(0, 0) \in \mathbb{R},$$

а компоненты $(f^{(1)}, f^{(2)}, g)$ любого поля Z из этой алгебры линейно выражаются через $(p, \bar{p}, q)$.

Тогда любая $(k, \bar{l}, m)$ -компонента тождества (8) (помимо уже рассмотренных) имеет вид

$$qh_{k, l, m+1} + \partial h_{k+1, l, m}(p) + \bar{\partial} h_{k, l+1, m}(\bar{p}) = \varphi(p, \bar{p}, q), \quad (12)$$

где правая часть линейна по $p, \bar{p}, q$ и выражается через многочлены h_{str} из нормального уравнения (9) с меньшими весами $(s + t + 2r)$.

ЛЕММА (о единственности). *Уравнение (12), выполняющееся тождественно по $p, \bar{p}, q$, позволяет выразить $h_{k, l, m+1}, h_{k+1, l, m}, h_{k, l+1, m}$ через многочлены h_{str} из правой части.*

Индукция по весу и использование леммы о единственности приводят в этом случае к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если в нормальном уравнении (9) однородной поверхности многочлен h_{220} приводится к виду (11), то все многочлены h_{klm} из этого уравнения однозначно определяются набором*

$$J = \{h_{220}, h_{221}, h_{222}, h_{320}, h_{321}, h_{420}, h_{330}\}. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Многочлены опорного набора (13) формируются из тейлоровских коэффициентов уравнения (9) не более, чем шестого порядка.

Рассмотрим теперь многочлен h_{220} вида (10). Здесь справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $h_{220} = \varepsilon E_0$ ($\varepsilon = \pm 1$) и однородная поверхность M имеет более, чем дискретную группу изотропии, то многочлен h_{320} из ее нормального уравнения (9) можно привести к виду

$$h_{320} = \omega_1(z_1^3\bar{z}_1^2 - 2z_1^2z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 - z_1z_2^2\bar{z}_2^2), \quad \omega_1 \geq 0. \quad (14)$$

В рамках (14) мы обсудим два случая. В первом из них считаем коэффициент ω_1 строго положительным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если нормальное уравнение (9) однородной поверхности M удовлетворяет условиям

$$h_{220} = \varepsilon E_0, \quad h_{320} = \omega_1(z_1^3\bar{z}_1^2 - 2z_1^2z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 - z_1z_2^2\bar{z}_2^2), \quad \omega_1 > 0, \quad (15)$$

то

- а) все многочлены h_{klm} из нормального уравнения выражаются через опорный набор многочленов $J_1 = \{h_{220}, h_{320}, h_{420}\}$;
- б) $h_{420} = s_1 z_1^4 \bar{z}_1^2$ и коэффициенты $\varepsilon, \omega_1, s_1$ опорного набора связаны соотношением

$$3\varepsilon\omega_1^4 - 7s_1\omega_1^2 + 4\varepsilon s_1^2 - 12\omega_1^2 = 0. \quad (16)$$

Для однородных поверхностей из второго случая в (14), т.е. при

$$h_{220} = \varepsilon(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4), \quad h_{320} = 0 \quad (17)$$

из $(3, \bar{2}, 0)$ -компоненты основного тождества следует, что многочлен

$$h_{420} = s_8(z_1^3z_2\bar{z}_1^2 + z_1^2z_2^2\bar{z}_1\bar{z}_2 + z_1z_2^3\bar{z}_2^2), \quad s_8 \geq 0.$$

Изучение $(2, \bar{2}, 1)$ -, $(4, \bar{2}, 0)$ -, $(3, \bar{3}, 0)$ -, $(3, \bar{2}, 1)$ -компонент при условии $s_8 = 0$ приводит к однородным поверхностям с 2-мерными группами изотропии (см. [5]). Каждая из них определяется парой многочленов h_{220}, h_{330} .

При $s_8 \neq 0$ получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если нормальное уравнение (9) однородной поверхности M удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} h_{220} &= \varepsilon E_0, & h_{320} &= 0, \\ h_{420} &= s_8(z_1^3z_2\bar{z}_1^2 + z_1^2z_2^2\bar{z}_1\bar{z}_2 + z_1z_2^3\bar{z}_2^2), & s_8 &> 0, \end{aligned} \quad (18)$$

то все многочлены h_{klm} из ее нормального уравнения выражаются через опорный набор многочленов $J_2 = \{h_{220}, h_{420}\}$.

Завершается описание однородных поверхностей с 1-мерными группами изотропии ссылкой на следующие технические факты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Нормальные мозеровские уравнения однородных трубчатых поверхностей (1)–(3) относятся к случаю (15). При этом

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\alpha - 2), \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{24}\alpha}{\sqrt{|\alpha - 2|}}, \quad s_1 = \frac{-12\alpha(2\alpha - 1)}{\alpha - 2} \quad (19)$$

для поверхностей (1) и (2), а для поверхности (3) эти же формулы справедливы при $\alpha = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Нормальные мозеровские уравнения однородных поверхностей (4)–(7) относятся к случаю (18). При этом*

- а) $s_8 = 9a$ для поверхностей (6), (7) и $s_8 = \pm 9$ для трубок над сферой и гиперболоидом;
- б) параметр $\varepsilon = \pm 1$ из формул (6), (7) является коэффициентом многочлена h_{220} из формулы (10).

Непосредственно проверяется, что наборы (19) исчерпывают все возможности, предоставляемые формулой (16) и неравенством $\omega_1 > 0$. Аналогично, пара (ε, s_8) из предложения 10 принимает любые значения, возможные в рамках случая (18). Кроме того, все поверхности (1)–(7) имеют 1-мерные группы изотропии (например, уравнение (1) легко превращается в новое уравнение $v = |z_2|^2 + ((1 + x_1)^\alpha - 1)$, инвариантное относительно поворотов комплексной переменной z_2).

Теоремы 2 и 3, тем самым, доказаны.

Для доказательства теоремы 1 вернемся к нерассмотренным возможностям, связанным с многочленом h_{220} вида (10). Помимо случая (15) здесь представляет интерес возможность

$$h_{220} = \varepsilon E_0, \quad h_{320} = \omega_2 z_1^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \omega_2 > 0. \quad (20)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Если нормальное уравнение (9) однородной поверхности M не сводится к случаям (15) или (20), то из $(3, \bar{2}, 0)$ -тождества для такой поверхности следует, что все многочлены h_{klm} из нормального уравнения однозначно определяются тейлоровскими коэффициентами этого уравнения не более, чем шестого порядка.*

В случае (20) ситуация оказывается несколько более сложной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Если нормальное уравнение (9) однородной поверхности M удовлетворяет условиям (20), то из $(3, \bar{2}, 0)$ -, $(2, \bar{2}, 1)$ -, $(4, \bar{2}, 0)$ -тождеств для такой поверхности следует, что все многочлены h_{klm} из нормального уравнения однозначно определяются тейлоровскими коэффициентами этого уравнения не более, чем седьмого порядка.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cartan E. // Ann. Math. Pura Appl. (4). 1932. V. 11. P. 17–90; // Oeuvres II. V. 2. P. 1231–1304.
2. Лобода А. В. // Функцион. анализ и его прил. 2000. Т. 34. № 2. С. 33–42.
3. Chern S. S., Moser J. K. // Acta Math. 1974. V. 133. № 3. P. 219–271.
4. Лобода А. В. // Функцион. анализ и его прил. 1999. Т. 33. № 1. С. 68–71.
5. Лобода А. В. // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 12. С. 3–24.
6. Ежов В. В., Лобода А. В., Шмальц Г. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 624–626.