Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. К. Логинов, О линейных представлениях аналитических
луп Муфанг, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 456–
460

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-

зумевают, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 02:15:42

О ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЛУП МУФАНГ

Е. К. Логинов

1. Напомним, что *луной* называется бинарная система G с единичным элементом, в которой уравнения $ax = b$ и $ya = b$ однозначно разрешимы для всех $a, b \in G$. *Лупы Муфанг* выделяются из класса всех луп тождествами

$$ab \cdot ca = a(bc \cdot a), \quad (cb \cdot c)a = c(b \cdot ca), \quad a(b \cdot cb) = (ab \cdot c)b, \quad (1)$$

которые называют *центральным*, *левым* и *правым тождествами Муфанг* соответственно. Хорошо известно [1], что в произвольной лупе два из них являются следствием третьего. *Аналитической луной Муфанг* называется аналитическое многообразие, снабженное структурой лупы Муфанг такой, что операция умножения является аналитической. Естественно определяются локальные аналитические лупы Муфанг.

С лупами Муфанг тесно связаны *альтернативные алгебры*, которые определяются тождествами

$$x^2y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x.$$

Важнейшим примером неассоциативной альтернативной алгебры является алгебра Кэли–Диксона. Напомним ее конструкцию [2], [3].

Пусть A – алгебра над полем F с инволюцией $x \rightarrow \bar{x}$ (здесь и всюду ниже мы рассматриваем конечномерные алгебры с единицей характеристики 0). Зафиксируем $\alpha \in F$ ($\alpha \neq 0$) и определим на векторном пространстве $A \oplus A$ операцию умножения

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - \alpha\bar{y}_2y_1, y_2x_1 + y_1\bar{x}_2).$$

Полученная алгебра (A, α) называется *алгеброй, полученной из A с помощью процесса Кэли–Диксона*. Ясно, что A изоморфно вкладывается в (A, α) и что $\dim(A, \alpha) = 2 \dim A$. Пусть $e = (0, 1)$. Тогда $e^2 = -\alpha$ и $(A, \alpha) = A \oplus Ae$. Для произвольного элемента $z = x + ye$ в (A, α) положим $\bar{z} = \bar{x} - ye$. Тогда отображение $z \rightarrow \bar{z}$ есть инволюция алгебры (A, α) , продолжающая инволюцию алгебры A . Таким образом, последовательно получаются следующие альтернативные алгебры:

- 1) F – поле;
- 2) $\mathbb{C}(\alpha) = (F, \alpha)$ – поле, если многочлен $x^2 + \alpha$ неприводим над F ; в противном случае $\mathbb{C}(\alpha) \simeq F \oplus F$;
- 3) $\mathbb{H}(\alpha, \beta) = (\mathbb{C}(\alpha), \beta)$ – алгебра обобщенных кватернионов; эта алгебра ассоциативна, но не коммутативна;
- 4) $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma) = (\mathbb{H}(\alpha, \beta), \gamma)$ – алгебра Кэли–Диксона.

На алгебре Кэли–Диксона индуктивный процесс построения альтернативных алгебр обрывается.

Алгебры типа 1)–4) называются *композиционными*. На любой из них существует невырожденная квадратичная форма (норма) $n(x) = x\bar{x}$, удовлетворяющая равенству $n(xy) = n(x)n(y)$. В частности, над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел описанная конструкция дает три расщепляемых алгебры (если $\alpha = \beta = \gamma = -1$) и четыре алгебры с делением (если $\alpha = \beta = \gamma = 1$): поле $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, алгебру кватернионов $\mathbb{H}$ и алгебру чисел Кэли (октонионов) $\mathbb{O}$, взятые с евклидовой нормой $n(x) = |x|$. Заметим также, что всякая простая неассоциативная альтернативная алгебра изоморфна алгебре Кэли–Диксона $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ [3].

Множество всех обратимых элементов конечномерной альтернативной алгебры A над полем $\mathbb{R}$ замкнуто относительно умножения и образует аналитическую лупу Муфанг. Екасательная алгебра изоморфна коммутаторной алгебре $A^{(-)}$ алгебры A . Если A – альтернативная неассоциативная алгебра, то коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ уже не является алгеброй Ли. Вместо тождества Якоби в ней выполняется тождество Мальцева

$$J(x, y, xz) = J(x, y, z)x,$$

где $J(x, y, z) \equiv (xy)z + (yz)x + (zx)y$ – яковбиан элементов x, y, z , и тождество Сейгла

$$(xy \cdot z)t + (yz \cdot t)x + (zt \cdot x)y + (tx \cdot y)z = (xz)(yt). \quad (2)$$

Тождества Мальцева и Сейгла эквивалентны [4]. Антикоммутативная алгебра, удовлетворяющая таким тождествам, называется *алгеброй Мальцева*.

Алгебры Мальцева и альтернативные алгебры тесно связаны. Так, всякая простая нелиевая алгебра Мальцева изоморфна факторалгебре $A^{(-)}/F \cdot 1$, где A – алгебра Кэли–Диксона над полем F [5]–[7]. В частности, существует единственная с точностью до изоморфизма простая компактная нелиевая алгебра Мальцева над полем $\mathbb{R}$. Она имеет размерность 7 и изоморфна факторалгебре $\mathbb{O}^{(-)}/\mathbb{R} \cdot 1$. Полупростая алгебра A разлагается в прямую сумму $A = N(A) \oplus J(A)$ лиева центра $N(A)$ и идеала $J(A)$, порожденного яковбианами. Кроме того, $N(A)$ – полупростая алгебра Ли, а $J(A)$ – прямая сумма простых нелиевых алгебр Мальцева [6], [8].

Между локальными аналитическими лупами Муфанг и вещественными алгебрами Мальцева существует соответствие, аналогичное классическому соответствию Ли между локальными группами Ли и алгебрами Ли [9], [10]. Эти результаты полностью переносятся на аналитические лупы

Муфанг в целом [11]. А именно, существует единственная с точностью до изоморфизма односвязная аналитическая лупа Муфанг G в целом с данной касательной алгеброй Мальцева, и любая связная аналитическая лупа Муфанг с той же касательной алгеброй может быть получена из G факторизацией по дискретной центральной нормальной подгруппе. Всякая односвязная полупростая лупа Муфанг разлагается в прямое произведение полупростой группы Ли и простых нелиевых луп Муфанг, каждая из которых аналитически изоморфна одному из пространств S^7 , $S^3 \times \mathbb{R}^4$ или $S^7 \times \mathbb{R}^7$. Фактически, односвязная простая неассоциативная лупа Муфанг изоморфна множеству элементов нормы 1 в алгебре Кэли–Диксона над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

2. Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс линейных алгебр над полем F . Предположим, что для некоторой алгебры $A \in \mathcal{K}$ и векторного пространства M над F определены отображения $(\rho, \lambda): A \rightarrow \text{End } M$. Тогда прямую сумму $\tilde{A} = A \oplus M$ векторных пространств A и M можно превратить в алгебру, определив умножение по правилу

$$(a, x)(b, y) = (ab, x\rho_b + y\lambda_a). \quad (3)$$

Полученную алгебру $\tilde{A}$ называют *расщепляемым нулевым расширением алгебры A с помощью M* . Если алгебра $\tilde{A}$ снова принадлежит классу $\mathcal{K}$, то M называется *бимодулем* над алгеброй A (или *A -модулем*) в классе $\mathcal{K}$, а упорядоченная пара отображений (ρ, λ) – *бипредставлением* (или просто *представлением*) алгебры A в классе $\mathcal{K}$ (см. [12], [13]). Ясно, что понятия бимодуля и бипредставления взаимно определяют друг друга. Часто оказывается удобно использовать краткие обозначения xa и ax вместо введенных выше $x\rho_a$ и $x\lambda_a$.

Бимодуль M над альтернативной алгеброй A является альтернативным A -модулем тогда и только тогда, когда в расщепляемом нулевом расширении $\tilde{A}$ выполнены соотношения

$$(a, b, x) = -(x, b, a) = -(a, x, b) = (b, x, a),$$

где $a, b \in A$, $x \in M$ и ассоциатор $(a, b, x) = ab \cdot x - a \cdot bx$. Альтернативными бимодулями являются регулярный бимодуль над альтернативной алгеброй и бимодуль Кэли–Диксона над ассоциативной композиционной алгеброй. Последний определяется как A -подмодуль Ae композиционной алгебры $(A, \alpha) = A \oplus Ae$, где ρ и λ индуцированы левым и правым умножением A на (A, α) . Имеется и другой способ определения бимодуля Кэли–Диксона: положить $M = A$, а операторы ρ и λ определить как правое умножение в A на $\bar{a}$ и a соответственно.

Известно [14], [15], что всякий альтернативный бимодуль над полупростой альтернативной алгеброй вполне приводим, а всякий неприводимый бимодуль над альтернативной алгеброй либо ассоциативен, либо является подмодулем регулярного бимодуля над алгеброй Кэли–Диксона, либо подмодулем бимодуля Кэли–Диксона над алгеброй обобщенных кватернионов.

В соответствии с тождеством Сейгла (2) линейное отображение $\tau: A \rightarrow \text{End } M$ называется *представлением алгебры Мальцева A* , если для любых $x, y, z \in A$ справедливо соотношение

$$\tau xy \cdot z = \tau x \tau y \tau z - \tau z \tau x \tau y + \tau y \tau z \tau x - \tau y z \tau x.$$

В этом случае M называется *Мальцевским A -модулем*. Так как алгебра A антикоммутиративна, понятие мальцевского A -модуля эквивалентно понятию бимодуля.

Хорошо известно [6], [16], что всякое представление полупростой алгебры Мальцева вполне приводимо, а всякий неприводимый бимодуль либо лиев, либо является регулярным бимодулем над простой неассоциативной алгеброй Мальцева, либо $\text{sl}(2, F)$ -модулем размерности 2 таким, что $\tau(a) = \bar{a}$, где $\bar{a}$ – матрица, присоединенная к матрице $a \in \text{sl}(2, F)$.

3. Понятие представления линейной алгебры без труда переносится на лупы Муфанг. Пусть M – линейное пространство над полем F и (ρ_a, λ_a) – обратимые линейные преобразования M , где $a \in G$. Определим на множестве $\tilde{G} = G \times M$ умножение (3). Если отображения $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } M$ таковы, что полученный группоид $\tilde{G}$ снова является лупой Муфанг, то векторное пространство M называется *G -модулем*, а упорядоченная пара отображений (ρ_a, λ_a) – *линейным представлением лупы G* . Если G – аналитическая лупа Муфанг, то дополнительно требуется, чтобы и лупа $\tilde{G}$ была аналитической. Известны [17], [18] следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } M$ является линейным представлением лупы Муфанг G тогда и только тогда, когда*

- а) ассоциатор (a, b, x) кососимметричен;
- б) $x(b \cdot ab) = (xb \cdot a)b$ и $(ab \cdot a)x = a(b \cdot ax)$

для всех $a, b \in G$ и $x \in M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякий неприводимый G -модуль лупы Муфанг G является подмодулем некоторого неприводимого альтернативного бимодуля.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Всякая аналитическая лупа Муфанг вкладывается в лупу обратимых элементов некоторой альтернативной алгебры над полем вещественных чисел.*

Пусть G – связная аналитическая лупа Муфанг и G' – локально изоморфная ей односвязная лупа. Допустим, что касательная алгебра A_G обладает представлением $A_G \rightarrow M$. Это означает, что расщепляемое нулевое расширение $\tilde{A}_G = A_G \oplus M$ алгебры A_G является алгеброй Мальцева. Поэтому мы можем построить соответствующие локальные лупы Муфанг U и $\tilde{U}$ с помощью ряда Кемпбелла–Хаусдорфа

$$xy = x + y + \frac{1}{2}[xy] + \frac{1}{12}[[xy]y] + \frac{1}{12}[x[xy]] + \dots$$

Определим отображения $(\rho, \lambda): U \rightarrow \text{Aut } M$ равенствами

$$\rho_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\tau_x)^n, \quad \lambda_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-\tau_x)^n,$$

где B_n – числа Бернулли, а $y\tau_x = [yx]$. Очевидно, операторы ρ_x и λ_x аналитичны, обратимы и удовлетворяют условиям предложения 1. Поэтому пара отображений (ρ, λ) является представлением локальной лупы U .

Теперь пусть $\tilde{G}'$ – односвязная аналитическая лупа Муфанг, локально изоморфная лупе $\tilde{U}$. Очевидно, лупа $\tilde{G}'$ содержит G' в качестве подлупы. Из левого и правого тождеств Муфанг (1) следует, что для любых элементов $g_i, g_j \in U$, справедливы тождества

$$\rho_{g_i} g_j = \lambda_{g_i} \rho_{g_i} \rho_{g_j} \lambda_{g_i}^{-1}, \quad \lambda_{g_j} g_i = \rho_{g_i} \lambda_{g_i} \lambda_{g_j} \rho_{g_i}^{-1}.$$

Поскольку связная лупа алгебраически порождается элементами любой окрестности единицы, умножение в $\tilde{G}'$ может быть представлено в виде (3), где элементы a, b лежат в лупе G' , а операторы ρ_b, λ_a порождаются операторами $\rho_{g_i}, \lambda_{g_i}$. Таким образом, определено представление $(\rho, \lambda): G' \rightarrow \text{Aut } M$ лупы G' .

Обратно, пусть лупа G обладает представлением $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } M$. Это представление индуцирует представление $(\rho, \lambda): G' \rightarrow \text{Aut } M$. Из предложения 3 следует, что лупа G' может быть вложена в лупу обратимых элементов A^* некоторой альтернативной алгебры A . Вложение $G' \rightarrow A^*$ индуцирует вложение $\sigma: A_G \rightarrow A^{(-)}$. Положим $\tau = \rho - \lambda$. Тогда композиция отображений $\sigma \circ \tau: A_G \rightarrow \text{End } M$ будет представлением алгебры A_G . Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Всякий G -модуль аналитической лупы Муфанг G является A_G -модулем ее касательной алгебры. Обратно, всякий A_G -модуль алгебры Мальцева A_G над полем вещественных чисел является G' -модулем односвязной аналитической лупы Муфанг G' , локально изоморфной G .*

Используя доказанную теорему и предложение 2, видим, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Представление полупростой аналитической лупы Муфанг вполне приводимо. Всякий неприводимый G -модуль аналитической лупы Муфанг G является либо альтернативным, либо мальцевским неприводимым бимодулем.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bruck R. H. A Survey of Binary Systems. New York: Springer-Verlag, 1971. 2. Schafer R. D. An Introduction to Non-Associative Algebras. New York: Academic Press, 1966. 3. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. Л. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978. 4. Sagle A. A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101. P. 426–458. 5. Sagle A. A. // Pacific J. Math. 1962. V. 12. P. 1057–1078. 6. Кузьмин Е. Н. // Алгебра и логика. 1968. Т. 7. С. 48. 7. Филишов В. Т. // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. С. 235. 8. Elduque A. // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107. P. 73–82. 9. Мальцев А. И. // Матем. сб. 1955. Т. 36. №3. С. 569–576. 10. Кузьмин Е. Н. // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. № 1. С. 3–22. 11. Кердман Ф. С. // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. № 5. С. 523–555. 12. Eilenberg S. // Ann. Soc. Polon. Math. 1948. V. 21. P. 125–134. 13. Jacobson N. Structure and Representations of Jordan Algebras. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1968. 14. Schafer R. D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. P. 1–17. 15. McCrimmon K. // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 18. P. 480–486. 16. Elduque A. // Comm. Algebra. 1990. V. 18. № 5. P. 1551–1561. 17. Логинов Е. К. // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 66–73. 18. Логинов Е. К. // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 2. С. 313–315.