Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Маламуд, В. И. Могилевский, Обобщенные резольвенты изометрического оператора, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 460–465

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:18:49

М. М. Маламуд, В. И. Могилевский

1. Введение. В теории расширений симметрического оператора A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ хорошо известна следующая формула М. Г. Крейна для обобщенных резольвент оператора A с равными дефектными числами (см., например, [1])

$$\mathbb{R}_\lambda := P_{\tilde{\mathfrak{H}}}(\tilde{A} - \lambda) \upharpoonright \mathfrak{H} = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm. \quad (1)$$

Формула (1) устанавливает биективное соответствие между обобщенными резольвентами $\mathbb{R}_\lambda$ и оператор-функциями $\tau(\lambda)$ пополненного класса Неванлинны $\tilde{R}_{\mathcal{H}}$ ($\tau \in \tilde{R}_{\mathcal{H}}$). Здесь $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ – расширение с выходом в $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, а A_0 – фиксированное расширение в $\mathfrak{H}$.

В [2] приведен простой вывод формулы Крейна (1) и найдена ее связь с граничными тройками $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ оператора A^* . Именно, в [2] показано, что $A_0 = \text{Ker } \Gamma_0$, $\gamma(\lambda) := (\Gamma_0[\mathfrak{H}_\lambda])^{-1} - \gamma$ -поле оператора A , $M(\lambda) := \Gamma_1\gamma(\lambda)$ – функция Вейля, соответствующая тройке Π , а $\mathbb{R}_\lambda g$ – решение граничной задачи $(A^* - \lambda)f = g$, $\{\Gamma_0\mathbb{R}_\lambda g, -\Gamma_1\mathbb{R}_\lambda g\} \in \tau(\lambda)$.

С другой стороны, в работах [3], [4] (см. также библиографию в [3]) получен аналог формулы Крейна для обобщенных резольвент изометрического оператора V ($V^*V = I$).

Далее, в работе [5] нами получен аналог формулы Крейна для резольвент дуальной пары $\{A, B\}$ (напомним, что пару $\{A, B\}$ замкнутых линейных операторов A и B в $\mathfrak{H}$ называют *дуальной парой* (ДП), если $(Af, g) = (f, Bg)$, $f \in \mathcal{D}(A)$, $g \in \mathcal{D}(B)$). Именно, упомянутая формула из [5] имеет вид (1) и устанавливает биективное соответствие между множеством $\Omega(\{A, B\}, \lambda_0)$ обобщенных резольвент $\mathbb{R}_\lambda$ голоморфных в точке λ_0 и множеством голоморфных в точке λ_0 семейств τ , для которых $0 \in \rho(\tau(\lambda_0) + M(\lambda_0))$.

Заметим, что пара операторов $\{A, A\}$ является дуальной в точности тогда, когда A симметричен ($A \subset A^*$). Для этого случая упомянутая формула из [5] дополняет формулу Крейна и совпадает с ней для самосопряженных расширений $\tilde{A} = \tilde{A}^*$, если только граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ такова, что $A_i := \text{ker } \Gamma_i = A_i^*$, $i = 0, 1$.

В настоящем сообщении мы приводим более общий, чем в [3], [4], вариант формулы для обобщенных U -резольвент (U унитарен в $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$) изометрического оператора V и показываем, что она

также является следствием общей формулы из [5], примененной к ДП $\{V, V^{-1}\}$. Именно, каждая граничная тройка П ДП $\{V, V^{-1}\}$ порождает формулу обобщенных резольвент вида (1), а ее параметры A_0, M, γ и τ выражаются, как и в симметрическом случае ($\{A, B\} = \{A, A\}$), через граничные операторы. Заметим, однако, что в случае ДП $\{V, V^{-1}\}$ аналогом класса Неванлинны, которому в симметрическом случае принадлежат M и τ , является класс Шура сжимающих в $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ оператор-функций.

В связи с этим естественно возникает, оказавшаяся нетривиальной, задача описания граничных троек П дуальной пары $\{V, V^{-1}\}$, в которых обобщенным U -резольвентам соответствуют в формуле (1) оператор-функции $\tau(\lambda)^{-1}$, принадлежащие классу Шура в $\mathbb{D}^e := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Мы называем такие тройки *сжимающими* и описываем их (см. предложение 7).

Для этого случая из формулы вида (1) для ДП $\{V, V^{-1}\}$ мы получаем в $\mathbb{D}^e$ формулу

$$\mathbb{R}_\lambda := P_{\mathfrak{H}}(\tilde{U} - \lambda) \upharpoonright \mathfrak{H} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_{\Pi}(\lambda)K(\lambda)(I - M(\lambda)K(\lambda))^{-1}\gamma_{\Pi^*}^*(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{D}^e, \quad (2)$$

в которой функция Вейля $M(\lambda)$ строго сжимающая в $\mathbb{D}^e$. Здесь $\tilde{U}$ – унитарное расширение с выходом в $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, а A_0 – фиксированное сжимающее расширение в $\mathfrak{H}$, причем $A_0[\mathcal{D}(V)^{\perp}]$ – строгое сжатие, а $K(\lambda) = \tau(\lambda)^{-1}$ пробегает класс Шура в $\mathbb{D}^e$.

При этом так же, как и в [2], все параметры из формулы (2) выражаются через граничные операторы граничной тройки П дуальной пары $\{V, V^{-1}\}$.

Заметим еще, что совокупности сжатий $A_0 := \ker \Gamma_0^{V^{-1}}$ и функций Вейля $M(\lambda)$, соответствующих сжимающим граничным тройкам, описаны в следствии 9 и теореме 11.

В случае специальной граничной тройки Π_0 вида (8) формула (2) совпадает с таковой из [3], [4], а найденная связь с тройкой Π_0 позволяет дополнить ее в некоторых аспектах.

2. Предварительные сведения. Пусть $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]([\mathfrak{H}])$ – множество ограниченных операторов из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ (в $\mathfrak{H}$), P_L – ортопроектор на подпространство L в $\mathfrak{H}$. Введем следующие обозначения: $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ ($\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$) – множество замкнутых линейных отношений (подпространств) в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ (в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$); $T^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1)$ – отношение, сопряженное к $T \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$; $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ и $\text{Ker } T$ – область определения, образ и ядро отношения T соответственно. Замкнутый оператор T из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ будем отождествлять с его графиком, так что $T \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$.

Пусть $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)^{-1} \in [\mathfrak{H}]\}$ – множество регулярных точек линейного отношения $T \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{N}_T := \mathcal{D}(T)^{\perp} = T^*(0)$, $\hat{\mathfrak{N}}_T := \{0\} \oplus \mathfrak{N}_T \subset T^*$. Обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda(T)$ дефектное подпространство отношения T , т.е. $\mathfrak{N}_\lambda(T) := \mathfrak{H} \ominus \mathcal{R}(T - \bar{\lambda}) = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda})$ и $\hat{\mathfrak{N}}_\lambda(T) := \{f, \lambda f\} : f \in \mathfrak{N}_\lambda(T)\} \subset \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$.

Напомним, далее, некоторые определения и результаты из [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейное отношение $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ называется *собственным расширением* ДП $\{A, B\}$, если $A \subset \tilde{A} \subset B^*$, т.е. $A \subset \tilde{A}$ и $B \subset \tilde{A}^*$. Множество собственных расширений ДП $\{A, B\}$ обозначим $\text{Ext}\{A, B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупности $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^B, \Gamma^A\}$, в которой $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ – гильбертовы пространства, а $\Gamma^B = (\Gamma_0^B, \Gamma_1^B)^{\top} : B^* \rightarrow \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ и $\Gamma^A = (\Gamma_0^A, \Gamma_1^A)^{\top} : A^* \rightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$ – линейные отображения, называется *граничной тройкой* ДП $\{A, B\}$, если $\Gamma^B B^* = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, $\Gamma^A A^* = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$ и справедлива следующая формула Грина:

$$(f', g) - (f, g') = (\Gamma_0^B \hat{f}, \Gamma_0^A \hat{g}) - (\Gamma_1^B \hat{f}, \Gamma_1^A \hat{g}), \quad \hat{f} = \{f, f'\} \in B^*, \quad \hat{g} = \{g, g'\} \in A^*. \quad (3)$$

С каждой граничной тройкой $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^B, \Gamma^A\}$ ДП $\{A, B\}$ естественно связаны собственные расширения $A_0 := \text{Ker } \Gamma_0^B$ и $A_1 := \text{Ker } \Gamma_1^B \in \text{Ext}\{A, B\}$. Справедливы следующие соотношения:

- 1) $\text{Ker } \Gamma^B = A$ и $\text{Ker } \Gamma^A = B$, причем $\Gamma^B \in [B^*, \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1]$ и $\Gamma^A \in [A^*, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0]$;
- 2) совокупность $\Pi^* = \{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \Gamma^A, \Gamma^B\}$ является граничной тройкой для ДП $\{B, A\}$;

- 3) отображение $\Gamma^B: \hat{f} \rightarrow \{\Gamma_0^B \hat{f}, \Gamma_1^B \hat{f}\} (\hat{f} \in B^*)$ задает биективное соответствие между множествами $\text{Ext}\{A, B\}$ и $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1): \tilde{A} \rightarrow \Gamma^B(\tilde{A}) =: \theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$; полагаем $\tilde{A}_\theta := \tilde{A}$, т.е.

$$\tilde{A}_\theta := (\Gamma^B)^{-1}\theta = \{\hat{f} \in B^* : \Gamma^B \hat{f} \in \theta\}, \quad \theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1),$$

при этом $(\tilde{A}_\theta)^* \in \text{Ext}\{B, A\}$ и $(\tilde{A}_\theta)^* = \tilde{A}_{\theta^*}$ (для тройки Π^*);

- 4) если $B_0 := \text{Ker } \Gamma_0^A \in \text{Ext}\{B, A\}$ и $B_1 = \text{Ker } \Gamma_1^A \in \text{Ext}\{B, A\}$, то $B_0 = A_0^*$ и $B_1 = A_1^*$.

Граничной тройке Π сопоставляем γ -поле $\gamma_\Pi(\lambda) := \pi_1(\Gamma_0^B \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(B))^{-1} (\in [\mathcal{H}_0, \mathfrak{N}_\lambda(B)])$, $\lambda \in \rho(A_0)$, где π_1 (π_2) – ортопроектор в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ на первую (вторую) компоненту. В [5] показывается, что $\gamma_\Pi(\lambda)$ – голоморфная в $\rho(A_0)$ оператор-функция, удовлетворяющая соотношению

$$\gamma_\Pi(\mu) = \gamma_\Pi(\lambda) + (\mu - \lambda)(A_0 - \mu)^{-1}\gamma_\Pi(\lambda), \quad \lambda, \mu \in \rho(A_0).$$

Аналогично граничной тройке Π^* сопоставляется γ -поле $\gamma_{\Pi^*}(z) = \pi_1(\Gamma_0^A \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_z(A))^{-1} (\in [\mathcal{H}_1, \mathfrak{N}_z(A)])$, $z \in \rho(A_0^*)$. Оператор-функция $\gamma_{\Pi^*}(z)$ голоморфна в $\rho(A_0^*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [5]. Оператор-функция $M(\lambda) := M_\Pi(\lambda)$, определенная в $\rho(A_0)$ равенством $\Gamma_1^B \hat{f}_\lambda = M(\lambda)\Gamma_0^B \hat{f}_\lambda$, $\hat{f}_\lambda = \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\} \in \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(B)$, $\lambda \in \rho(A_0)$, называется *функцией Вейля*, соответствующей граничной тройке Π .

Оператор-функция $M(\lambda)$ голоморфна в $\rho(A_0)$, принимает значения в $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ и удовлетворяет равенству

$$M(\mu) - M(\lambda) = (\mu - \lambda)\gamma_{\Pi^*}^*(\bar{\lambda})\gamma_\Pi(\mu), \quad \mu, \lambda \in \rho(A_0).$$

Кроме того, функция Вейля $M_{\Pi^*}(z)$, $z \in \rho(A_0^*)$, соответствующая тройке Π^* , связана с $M_\Pi(\lambda)$ равенством $M_{\Pi^*}(\bar{\lambda}) = M_\Pi^*(\lambda)$, $\lambda \in \rho(A_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [5]. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^B, \Gamma^A\}$ – граничная тройка ДП $\{A, B\}$, $M(\lambda)$ – соответствующая функция Вейля, $A_0 := \text{Ker } \Gamma_0^B$ и $\tilde{A} = \tilde{A}_\theta \in \text{Ext}\{A, B\}$. Тогда

- 1) $\lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta) \cap \rho(A_0)$ точно тогда, когда $0 \in \rho(\theta - M(\lambda))$;
- 2) справедлива следующая формула для канонических резольвент:

$$(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_\Pi(\lambda)(\theta - M(\lambda))^{-1}\gamma_{\Pi^*}^*(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \rho(A_\theta) \cap \rho(A_0). \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Отношением запрета, соответствующим граничной тройке Π , называется линейал $\mathcal{F}_\Pi = \Gamma^B \hat{\mathfrak{N}}_B = \{\{\Gamma_0^B \hat{n}, \Gamma_1^B \hat{n}\} : \hat{n} = \{0, n\} \in \hat{\mathfrak{N}}_B\} \subset \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Дуальная пара $\{A, B\}$ называется *ограниченной*, если $A \in [\mathcal{D}(A), \mathfrak{H}]$ и $B \in [\mathcal{D}(B), \mathfrak{H}]$. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^B, \Gamma^A\}$ – граничная тройка для ограниченной ДП $\{A, B\}$ такая, что $A_0 \in [\mathfrak{H}]$. Тогда

- 1) корректно определены операторы

$$\gamma_\Pi = \pi_2(\Gamma_0^B \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_B)^{-1} \in [\mathcal{H}_0, \mathfrak{N}_B], \quad \gamma_{\Pi^*} = \pi_2(\Gamma_0^A \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_A)^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathfrak{N}_A];$$

- 2) $\mathcal{F}_\Pi \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ и справедливо равенство

$$M(\lambda) = \mathcal{F}_\Pi + \gamma_{\Pi^*}^*(A_0 - \lambda)^{-1}\gamma_\Pi, \quad \lambda \in \rho(A_0). \quad (5)$$

3. Сжимающие граничные тройки. Пусть V – изометрия в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(V)$ и образом $\mathcal{R}(V)$. Положим $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_V (= \mathcal{D}(V)^\perp)$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{V^{-1}} (= \mathcal{R}(V)^\perp)$. Так как $(V^{-1})^* = (V^*)^{-1}$, имеет место эквивалентность $\{f, f'\} \in (V^{-1})^* \iff \{f', f\} \in V^*$. Пусть, далее, $C(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) := \{T \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2] : \|T\| \leq 1\}$ – множество сжатий из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, а $C_0(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) := \{T \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2] : \|T\| < 1\}$ – множество строгих сжатий; $C(\mathfrak{H}) := C(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ и $C_0(\mathfrak{H}) := C_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$.

Обозначим $C(V) := \text{Ext}\{V, V^{-1}\} \cap C(\mathfrak{H})$ – множество собственных сжимающих расширений ДП $\{V, V^{-1}\}$. Всякое сжимающее расширение $\tilde{A}$ изометрии V имеет вид $\tilde{A} = \text{diag}(V, T) \in [\mathcal{D}(V) \oplus \mathfrak{N}, \mathcal{R}(V) \oplus \mathfrak{M}]$, где $T \in C(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ – сжатие, и, значит, обязательно является собственным, $A \in C(V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Граничную тройку $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ ДП $\{V, V^{-1}\}$ назовем *сжимающей*, если верна эквивалентность

$$\tilde{A} = \tilde{A}_\theta \in C(V) \iff K := \theta^{-1} \in C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0).$$

Приведем критерий сжимаемости граничной тройки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ – граничная тройка ДП $\{V, V^{-1}\}$, $A_0 = \text{Ker } \Gamma_0^{V^{-1}}$, $\mathcal{F}_\Pi$ – запретный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ – сжимающая граничная тройка;
- 2) $A_0 \in C(V)$ и оператор

$$U = \begin{pmatrix} A_0 & \gamma_\Pi \\ -\gamma_{\Pi^*}^* & \mathcal{F}_\Pi \end{pmatrix} : \mathfrak{H} \oplus \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H} \oplus \mathcal{H}_1 \quad (6)$$

унитарен;

- 3) справедливы равенства

$$\Gamma_1^{V^{-1}}\{f, f'\} = -\Gamma_0^V\{f', f\}, \quad \Gamma_0^{V^{-1}}\{f, f'\} = -\Gamma_1^V\{f', f\}, \quad \{f, f'\} \in (V^{-1})^*. \quad (7)$$

При выполнении каждого из условий 1)–3) функция Вейля $M(\lambda)$, соответствующая тройке Π , является голоморфной и строго сжимающей в $\mathbb{D}^e := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Если Π – сжимающая граничная тройка ДП $\{V, V^{-1}\}$, то $A_0 \upharpoonright \mathfrak{N} \in C_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$. Обратно, если $\tilde{A}_0 \in C(V)$, причем $\tilde{A}_0 \upharpoonright \mathfrak{N} \in C_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$, то существует сжимающая граничная тройка $\Pi_0 = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$, для которой $\tilde{A}_0 = A_0 := \text{Ker } \Gamma_0^{V^{-1}}$.

Примером сжимающей граничной тройки является тройка $\Pi_0 = \{\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ вида

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{V^{-1}}\hat{f} &= -D_0 P_{\mathfrak{N}} f + (A'_0)^* D_{0*}^{-1}(f' - \tilde{A}_0 f), & \Gamma_0^{V^{-1}}\hat{f} &= D_{0*}^{-1}(f' - \tilde{A}_0 f), \\ \Gamma_1^V\hat{g} &= -D_{0*} P_{\mathfrak{M}} g + A'_0 D_0^{-1}(g' - \tilde{A}_0^* g), & \Gamma_0^V\hat{g} &= D_0^{-1}(g' - \tilde{A}_0^* g), \\ \hat{f} &= \{f, f'\} \in (V^{-1})^*, & \hat{g} &= \{g, g'\} \in V^*, \end{aligned} \quad (8)$$

где $A'_0 := \tilde{A}_0 \upharpoonright \mathfrak{N}$, $D_0 := (I - (A'_0)^* A'_0)^{1/2} \in [\mathfrak{N}]$ и $D_{0*} := (I - A'_0 (A'_0)^*)^{1/2} \in [\mathfrak{M}]$.

Из предложения 7 и формулы (4) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ – сжимающая граничная тройка ДП $\{V, V^{-1}\}$ и $M(\lambda)$ – соответствующая функция Вейля. Тогда

- 1) если $\tilde{A}_\theta \in C(V)$, то $\tilde{A}_\theta[\mathfrak{N}] \in C_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ точно тогда, когда $K := \theta^{-1} \in C_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$;
- 2) расширение $\tilde{A}_\theta \in \text{Ext}\{A, B\}$ унитарно точно тогда, когда оператор θ унитарен;
- 3) если $\tilde{A}_\theta \in C(V)$, то формула (4) для канонических резольвент принимает вид

$$(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_\Pi(\lambda) K (I - M(\lambda) K)^{-1} \gamma_{\Pi^*}^*(\bar{\lambda}), \quad K := \theta^{-1}. \quad (9)$$

Так как для сжимающей граничной тройки Π матрица U вида (6) унитарна, то совокупность $\Delta = (A_0, \gamma_\Pi, -\gamma_{\Pi^*}^*, \mathcal{F}_\Pi)$ образует унитарный узел с характеристической функцией $\theta(\lambda) = \mathcal{F}_\Pi + \lambda \gamma_{\Pi^*}^*(\lambda A_0 - I)^{-1} \gamma_\Pi$ ($\lambda \in \mathbb{D}$) [6]. Отсюда с учетом (5) вытекает

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ – сжимающая граничная тройка ДП $\{V, V^{-1}\}$. Тогда соответствующая функция Вейля $M(\lambda)$ голоморфна в $\mathbb{D}^e$, принимает значения в $C_0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ и связана с характеристической функцией $\theta(\lambda)$ равенством $M(\lambda) = \theta(\lambda^{-1})$ ($\lambda \in \mathbb{D}^e$). Обратно, для каждой голоморфной в $\mathbb{D}^e$ оператор-функции $M(\lambda)$ со значениями в $C_0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ найдутся изометрия V и сжимающая граничная тройка Π для ДП $\{V, V^{-1}\}$ такие, что соответствующая функция Вейля $M_\Pi(\lambda)$ совпадает с $M(\lambda)$.

4. Формула для обобщенных резольвент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Оператор-функция $\mathbb{R}_\lambda$, голоморфная в $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}^e$ со значениями в $[\mathfrak{H}]$, называется обобщенной U -резольвентой изометрического оператора V , если существуют гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ и унитарный оператор $\tilde{U}$ в $\tilde{\mathfrak{H}}$ такие, что $V \subset \tilde{U}$ и $\mathbb{R}_\lambda = P_{\tilde{\mathfrak{H}}}(\tilde{U} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathbb{D} \cup \mathbb{D}^e$.

В следующей теореме дается описание обобщенных U -резольвент изометрии V .

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ – сжимающая граничная тройка ДП $\{V, V^{-1}\}$, $A_0 := \text{Ker } \Gamma_0^{V^{-1}}$ и $A_1 := \text{Ker } \Gamma_1^{V^{-1}} = (A_0^*)^{-1}$. Пусть, далее, $M(\lambda) = M_\Pi(\lambda)$ – соответствующая функция Вейля, а $M_{\Pi^*}(\lambda) = M^*(\bar{\lambda})$ – функция Вейля, соответствующая тройке $\Pi^* = \{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \Gamma^V, \Gamma^{V^{-1}}\}$ ДП $\{V^{-1}, V\}$. Тогда

- i) $\mathbb{D}^e \subset \rho(A_0)$, $\mathbb{D} \subset \rho(A_1)$ и формулы для обобщенных резольвент (в форме Крейна–Наймарка)

$$\mathbb{R}_\lambda = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_\Pi(\lambda)K(\lambda)(I - M(\lambda)K(\lambda))^{-1}\gamma_{\Pi^*}^*(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{D}^e, \quad (10)$$

$$\mathbb{R}_\lambda = (A_1 - \lambda)^{-1} - \lambda^{-2}\gamma_{\Pi^*}(\lambda^{-1})K^*(\bar{\lambda}^{-1})(I - M_{\Pi^*}(\lambda^{-1})K^*(\bar{\lambda}^{-1}))^{-1}\gamma_\Pi^*(\bar{\lambda}^{-1}), \quad (11)$$

$$\lambda \in \mathbb{D},$$

задают биективное соответствие между множеством обобщенных U -резольвент $\mathbb{R}_\lambda$ и множеством голоморфных в $\mathbb{D}^e$ оператор-функций $K(\lambda)$ со значениями в $C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$; при этом каноническим U -резольвентам $\mathbb{R}_\lambda$ и только им соответствуют в (10), (11) постоянные унитарнозначные оператор-функции $K(\lambda) =: K = (K^{-1})^*$ (последнее возможно лишь тогда, когда $\dim \mathfrak{N}_0 = \dim \mathfrak{N}_\infty$);

- ii) формулы для обобщенных резольвент (в форме А. В. Штрауса) имеют вид

$$\mathbb{R}_\lambda = \begin{cases} (\tilde{A}_{\tau_1(\lambda)} - \lambda)^{-1}, & \lambda \in \mathbb{D}^e, \\ (\tilde{A}_{\tau_2(\lambda)} - \lambda)^{-1}, & \lambda \in \mathbb{D}, \end{cases}$$

где $\tau_1(\lambda) := K^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{D}^e$, и $\tau_2(\lambda) := K^*(\bar{\lambda}^{-1})$, $\lambda \in \mathbb{D}$;

- iii) для каждого $g \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $f := \mathbb{R}_\lambda g$ является решением следующей граничной задачи со спектральным параметром $K(\lambda)$ в граничном условии:

$$\hat{f} = \{f, \lambda f + g\} \in (V^{-1})^*, \quad \begin{cases} \Gamma_0^{V^{-1}} \hat{f} = K(\lambda) \Gamma_1^{V^{-1}} \hat{f}, & \lambda \in \mathbb{D}^e, \\ \Gamma_1^{V^{-1}} \hat{f} = K^*(\bar{\lambda}^{-1}) \Gamma_0^{V^{-1}} \hat{f}, & \lambda \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Подчеркнем, что только обе формулы (10) и (11) вместе описывают обобщенные U -резольвенты оператора V . Так, первая из них в отдельности описывает лишь обобщенные резольвенты, порожденные всеми сжимающими расширениями, а вторая – теми растягивающими расширениями $\tilde{A} \in \text{Ext}\{V, V^{-1}\}$, для которых $0 \in \rho(\tilde{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ – сжимающая граничная тройка ДП $\{V, V^{-1}\}$. Полагая $\Gamma_0 := \Gamma_0^{V^{-1}} = \pi_0 \Gamma^{V^{-1}}$ и $\Gamma_1 := \Gamma_1^{V^{-1}} = \pi_1 \Gamma^{V^{-1}}$, замечаем, что отображение $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^T$ сюръективно. Далее, в силу (7) формула Грина (3) принимает вид

$$(f', g') - (f, g) = (\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_0 \widehat{g}) - (\Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g}), \quad \widehat{f} = \{f, f'\} \in (V^{-1})^*, \quad \widehat{g} = \{g, g'\} \in (V^{-1})^*.$$

Положим $\gamma_0(\lambda) := \pi_1(\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(V^{-1}))^{-1}$, $M_0(\lambda) := M(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{D}^e$) и

$$\gamma_1(\mu) := \pi_1(\Gamma_1 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\mu(V^{-1}))^{-1}, \quad \mu \in \mathbb{D}.$$

Пусть, далее, $M_1(\mu) (\in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0])$ определена равенством

$$\Gamma_0 \widehat{f}_\mu = M_1(\mu) \Gamma_1 \widehat{f}_\mu, \quad \widehat{f}_\mu = \{f_\mu, \mu f_\mu\} \in \widehat{\mathfrak{N}}_\mu(V^{-1}), \quad \mu \in \mathbb{D}.$$

Тогда $\gamma_0(\lambda) = \gamma_\Pi(\lambda)$, $\gamma_1(\mu) = -\mu^{-1} \gamma_{\Pi^*}(\mu^{-1})$ и $M_1(\mu) = M_{\Pi^*}(\mu^{-1})$. Отметим также, что в формуле (11) линейное отношение $A_1 (= (A_0^*)^{-1})$ имеет вид $A_1 = \text{Ker } \Gamma_1$. Теперь формулы (10), (11) можно записать в более симметричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_\lambda &= (A_0 - \lambda)^{-1} - \lambda^{-1} \gamma_0(\lambda) K(\lambda) (I - M_0(\lambda) K(\lambda))^{-1} \gamma_1^*(\bar{\lambda}^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D}^e, \\ \mathbb{R}_\lambda &= (A_1 - \lambda)^{-1} + \lambda^{-1} \gamma_1(\lambda) K^*(\bar{\lambda}^{-1}) (I - M_1(\lambda) K^*(\bar{\lambda}^{-1}))^{-1} \gamma_0^*(\bar{\lambda}^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Пусть $\Pi = \{\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ – сжимающая граничная тройка вида (8). Тогда $\gamma_\Pi(\lambda) = -(\tilde{A}_0 - \lambda)^{-1} D_{0*}$, $\gamma_{\Pi^*}(\bar{\lambda}) = -(\tilde{A}_0^* - \bar{\lambda})^{-1} D_0$ и

$$M(\lambda) = (A_0 \upharpoonright \mathfrak{N})^* + D_0 P_{\mathfrak{N}}(\tilde{A}_0 - \lambda)^{-1} D_{0*}, \quad \lambda \in \mathbb{D}^e.$$

Теперь формула (10) принимает вид

$$\mathbb{R}_\lambda = (\tilde{A}_0 - \lambda)^{-1} + (\tilde{A}_0 - \lambda)^{-1} D_{0*} K(\lambda) (I - M(\lambda) K(\lambda))^{-1} D_0 P_{\mathfrak{N}}(\tilde{A}_0 - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{D}^e. \quad (12)$$

Формула (12) для обобщенных резольвент совпадает с таковой из [3], [4], где она получена другими методами. При этом порождаемая тройкой (8) и вытекающая из (11), аналогичная (12) формула для $\lambda \in \mathbb{D}$ в работах [3], [4] отсутствует. Заметим еще, что в формуле (11) $A_1 = (A_0^*)^{-1}$ является, вообще говоря линейным отношением, а не оператором.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М. Г., Лангер Г. К. // Функцион. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 3. С. 54–69.
2. Derkach V. A., Malamud M. M. // J. Func. Anal. 1991. V. 95. № 1. P. 1–95.
3. Langer H., Sorjonen P. // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. 1974. V. 561. P. 3–45.
4. Langer H., Textorius B. // Invariant Subspaces and Other Topics. 6th Oper. Theory Conf. Proc., 1982. P. 103–118.
5. Маламуд М. М., Могилевский В. И. // Докл. НАН Украины. 1997. № 1. С. 30–37.
6. Бродский М. С. // УМН. 1978. Т. 33. № 4. С. 141–168.
7. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.

(М. М. Маламуд) Донецкий национальный университет, Украина
(В. И. Могилевский) Луганский государственный педагогический университет, Украина

Поступило
07.06.2002

E-mail: mdm@dc.donetsk.ua, magellan@gt.slg.ua