Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Жукова, Концы типичных слоев полных картановых слоений, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:39:11

Концы типичных слоев полных картановых слоений

Н. И. Жукова

Целью данной работы является исследование топологии типичных слоев полных картановых слоений. Мы находим оценки количества концов типичных слоев, в том числе в зависимости от структурных алгебр Ли этих слоений.

1. Картановы слоения. Слоение называется *картановым* [1], если оно допускает в качестве трансверсальной структуры картанову геометрию. Заметим, что задание картанова слоения $(M, \mathcal{F})$ типа $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (или типа (G, H)) эквивалентно заданию следующих объектов:

- 1) группы Ли G и ее замкнутой подгруппы Ли H с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно;
- 2) главного H -расслоения $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$;
- 3) H -инвариантного слоения $(\mathcal{R}, F)$, переходящего в слоение $(M, \mathcal{F})$ при отображении π ;
- 4) $\mathfrak{g}$ -значной 1-формы ω на $\mathcal{R}$, обладающей следующими свойствами:
 - (i) $\omega(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$, где A^* – фундаментальное векторное поле, соответствующее A ;
 - (ii) $R_a^* \omega = \text{Ad}_G(a^{-1})\omega$ для любого $a \in H$, где Ad_G – присоединенное представление группы Ли G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$;
 - (iii) для любого $u \in \mathcal{R}$ отображение $\omega_u: T_u \mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{g}$ сюръективно, причем $\ker \omega = T\mathcal{F}$, где $T\mathcal{F}$ – касательное распределение к слоению $(\mathcal{R}, F)$;
 - (iv) производная Ли $L_X \omega$ равна нулю для любого векторного поля X , касательного к слоям слоения $(\mathcal{R}, F)$.

При этом H -расслоение $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ называется *слоеным*, а слоение $(\mathcal{R}, F)$ – *поднятым*. Оно является трансверсально параллелизуемым или e -слоением. Далее мы рассматриваем одну компоненту связности многообразия $\mathcal{R}$, если $\mathcal{R}$ не связно.

Если группа Ли G эффективно действует на однородном пространстве G/H , то говорят, что картаново слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет эффективную трансверсальную картанову геометрию.

Нами показано [1], что слоение, допускающее неэффективную трансверсальную картанову геометрию, допускает также и эффективную трансверсальную картанову геометрию. Поэтому далее мы рассматриваем картановы слоения с эффективными трансверсальными картановыми геометриями. При этом наше определение [1] и определение Блюменталя [2] картанова слоения эквивалентны. Подчеркнем, что компактность слоевого многообразия M не предполагается, если не оговорено противное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Картаново слоение $(M, \mathcal{F})$ называется *полным*, если полным является ассоциированное с ним поднятое e -слоение $(\mathcal{R}, F)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [3]. $\mathfrak{g}$ -Значная 1-форма ω называется *картановой связностью* в слоеном расслоении $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$.

Если $\dim \mathcal{F} = 0$, то ω – картанова связность в смысле Эресмана [4], а главное H -расслоение $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ с картановой связностью ω есть картанова геометрия.

Работа выполнена в рамках проекта реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2011 гг. (грант № П945).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что картаново слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет *нулевую трансверсальную кривизну*, если $\Omega = d\omega + (1/2)[\omega, \omega] = 0$.

Полные картановы слоения образуют категорию $\mathfrak{CS}$, изоморфизмами в которой служат диффеоморфизмы, переводящие слои в слои, сохраняющие трансверсальную картанову геометрию.

Далее мы рассматриваем слоения $(M, \mathcal{F})$ произвольной коразмерности q , где $0 < q < n$, n – размерность многообразия M .

2. Классы картановых слоений. Картановы слоения включают в себя такие широкие классы слоений, как конформные, проективные, псевдоримановы, лоренцевы, римановы, e -слоения, слоения Ли, трансверсально однородные, а также слоения с трансверсально проектируемой связностью и слоения с трансверсальной параболической структурой, где параболическая структура понимается в смысле [5].

3. Структурная алгебра Ли картанова слоения. Заметим, что слоения Ли можно определить как картановы типа $\mathfrak{g}/\{0\}$ с нулевой трансверсальной кривизной. Как известно [6], замыкание $\overline{\mathcal{L}}$ произвольного слоя $\mathcal{L}$ полного e -слоения $(\mathcal{R}, F)$ представляет собой гладкое подмногообразие в $\mathcal{R}$, а слоение $(\overline{\mathcal{L}}, \mathcal{F}|_{\overline{\mathcal{L}}})$ является слоением Ли с всюду плотными слоями. Структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ этого слоения называется *структурной алгеброй Ли картанова слоения* $(M, \mathcal{F})$ [1], обозначается через $\mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ и является инвариантом слоения $(M, \mathcal{F})$ в категории $\mathfrak{CS}$.

4. Типичные слои. Напомним, что пересечение счетного семейства открытых подмножеств в многообразии M называется G_δ -подмножеством в M .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – полное картаново слоение, а $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$ – его слоеное расслоение. Тогда

- 1) сужение $\pi|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow L := \pi(\mathcal{L})$ проекции π на произвольный слой $\mathcal{L}$ поднятого слоения $(\mathcal{R}, F)$ является регулярным накрывающим отображением на слой L слоения $\mathcal{F}$ с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе голономии $\Gamma(L, x)$ слоя $L \ni x$;
- 2) объединение слоев без голономии образует всюду плотное G_δ -подмножество M_0 в M , дополнение которого имеет меру нуль в M , причем все слои из M_0 диффеоморфны между собой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Слои, принадлежащие M_0 , называются *типичными слоями картанова слоения*, а многообразие, диффеоморфное слоям из M_0 , называется *стандартным типичным слоем* этого слоения и обозначается через L_0 .

5. Концы многообразий. Напомним основные понятия, связанные с множеством концов $\mathcal{E}(L)$ многообразия L , следуя [7]. Пусть $\mathcal{K}(L)$ – множество подмножеств K из L , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) подмножество K является связным компактным подмногообразием с краем ∂K и имеет коразмерность 0 в L ;
- 2) не существует предкомпактных компонент связности дополнения $L \setminus K$;
- 3) для любых двух различных компонент A_0 и A_1 края ∂K не существует пути h в L такого, что $h(0) \in A_0$, $h(1) \in A_1$ и $h((0, 1)) \cap K = \emptyset$.

Пусть $\mathcal{P}(L)$ – множество замыканий P_i всех компонент связности дополнений $L \setminus K$, где K пробегает $\mathcal{K}(L)$. *Убегающей последовательностью* называется убывающая последовательность $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов $P_n \in \mathcal{P}(L)$, $P_1 \supset \dots \supset P_n \supset P_{n+1} \supset \dots$ такая, что $\bigcap_n P_n = \emptyset$. Две убегающие последовательности $\{P_n\}$ и $\{P'_m\}$ называются *эквивалентными*, если для каждого n существует такое m , что $P'_m \subset P_n$. Проверка показывает, что это

действительно отношение эквивалентности, поэтому корректно следующее определение: класс эквивалентности $\epsilon = [\{P_n\}]$ называется *концом многообразия* L .

Множество всех концов многообразия L обозначается через $\mathcal{E}(L)$ и наделяется топологией следующим образом. Рассмотрим $\epsilon = [\{P_n\}] \in \mathcal{E}(L)$ и $P \in \mathcal{P}(L)$. Выполнение включения $P_n \subset P$ для некоторого n обозначается через $\epsilon \triangleleft P$. Пусть

$$\mathcal{E}(P) := \{\epsilon \in \mathcal{E}(L) \mid \epsilon \triangleleft P\}.$$

Для любого $P \in \mathcal{P}(L)$ множество $\mathcal{E}(P)$ непусто. При этом семейство

$$\Sigma := \{\mathcal{E}(P) \mid P \in \mathcal{P}(L)\}$$

образует базу некоторой топологии на множестве концов $\mathcal{E}(L)$. Множество концов $\mathcal{E}(L)$, наделенное этой топологией, представляет собой компактное, вполне несвязное, хаусдорфово, метризуемое топологическое пространство.

Для многообразия L существует такая компактификация L^* , что топологическое пространство концов $\mathcal{E}(L)$ гомеоморфно подпространству $L^* \setminus L$ в L^* . При этом компактификация L^* характеризуется следующими свойствами [8]:

- 1) топологическое пространство L^* связно;
- 2) подмножество L открыто в L^* ;
- 3) подпространство $L^* \setminus L$ вполне несвязно;
- 4) для любой точки $\epsilon \in L^* \setminus L$ и любой связной открытой окрестности U точки ϵ в L^* подмножество $U \setminus (L^* \setminus L)$ связно.

Будем обозначать $\text{Card } \mathcal{E}(L)$ через $e(L)$. Заметим, что $\mathcal{E}(L) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда многообразие L компактно, что эквивалентно $e(L) = 0$.

6. Основные теоремы. Пусть $\dim L = 2$ и L^* – компактификация L , указанная выше (см. п. 5). Конец $\epsilon \in \mathcal{E}(L)$ называется *неориентируемым*, если в точке $\epsilon \in L^*$ существует база открытых окрестностей $\{U_j\}$ таких, что $U_j \cap L$ – неориентируемые поверхности. В противном случае конец ϵ *ориентируемый*. Ориентируемый конец $\epsilon \in \mathcal{E}(L)$ называется *непланарным*, если в точке $\epsilon \in L^*$ существует база открытых окрестностей $\{U_j\}$ таких, что род каждой поверхности $U_j \cap L$ не равен нулю.

Применяя теорему А из [9] к слоению $\text{Ли}(\mathcal{L}, \mathcal{F}|_{\mathcal{L}})$, благодаря теореме 1, мы получаем первые два утверждения теоремы 2. Построенный ниже пример показывает, что последнее утверждение теоремы 2 также верно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – полное картаново слоение. Если его структурная алгебра $\text{Ли } \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ отлична от нуля, то множество концов типичных слоев этого слоения либо конечно и состоит из одной или двух точек, либо является канторовым. Если, кроме того, $\dim \mathcal{F} = 2$, то либо все типичные слои некомпактны и имеют род 0; либо все типичные слои ориентируемы и имеют только непланарные концы; либо все концы типичных слоев неориентируемы.

При $\mathfrak{g}_0 = 0$ множество концов типичных слоев этого слоения может быть любым конечным, счетным или канторовым.

ПРИМЕР 1. Пусть ξ – произвольная полная картанова геометрия с главным H -расслоением $p: P \rightarrow T$ над связным многообразием T . В качестве L возьмем $S^2 \setminus N$, сферу S^2 с выколотым конечным; замкнутым счетным или канторовым множеством точек N . Тогда множество концов многообразия L равносильно N . Если N – конечное множество, то топологическое пространство концов $\mathcal{E}(S^2 \setminus N)$ дискретное. Для бесконечных множеств N топология в $\mathcal{E}(S^2 \setminus N)$ не является дискретной. Тривиальное слоение $\mathcal{F} := \{L \times \{y\} \mid y \in T\}$ произведения $L \times T$ можно рассматривать как полное картаново слоение с трансверсальной картановой геометрией ξ , все слои которого типичны, а множество концов любого слоя либо произвольное конечное, либо счетное, либо канторово.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показывают примеры, все указанные в теореме 2 возможности реализуются.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Фундаментальные результаты о концах μ -почти каждого слоя ламинации на компактном пространстве с гармонической мерой μ получены Жисом [10].

Утверждение теоремы 3 опирается на теорему 1 и результат Хопфа [11], согласно которому множество концов любого некомпактного регулярного покрывающего пространства для компактного многообразия является либо одно или двух элементарным, либо канторовым. Кроме того, применяется доказанное ранее автором утверждение о том, что если все слои полного картанова слоения компактны, то это слоение риманово, а пространство слоев – гладкий орбифолд [12].

ТЕОРЕМА 3. Если существует компактный слой полного картанова слоения $(M, \mathcal{F})$, то для стандартного типичного слоя L_0 либо множество концов канторово, либо $e(L_0)$ конечно и равно 0, 1 или 2, причем $e(L_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $(M, \mathcal{F})$ – компактное риманово слоение, а пространство слоев $M/\mathcal{F}$ – гладкий орбифолд.

Гектор, Мацумото и Майнез доказали [7], что для слоения Ли с всюду плотными слоями на компактном многообразии, структурная алгебра Ли которого разрешима, любой слой имеет ровно один или ровно два конца. Мы замечаем, что этот результат обобщается на слоения Ли с всюду плотными слоями, для которых компактность слоеного многообразия заменена требованием полноты этого слоения. Поскольку любое слоение Ли на компактном многообразии является полным римановым слоением, оно всегда полное.

Полное картаново слоение $(M, \mathcal{F})$ по определению имеет полное поднятое e -слоение $(\mathcal{R}, F)$, следовательно, полным является и слоение Ли $(\mathcal{L}, \mathcal{F}|_{\mathcal{L}})$ с всюду плотными слоями. Поэтому, применяя указанное выше наблюдение и теорему 1, мы получаем утверждение теоремы 4 при выполнении условия 1).

Если трансверсальная кривизна полного картанова слоения $(M, \mathcal{F})$ равна нулю, то поднятое слоение $(\mathcal{R}, F)$ есть слоение Ли типа $\mathfrak{g}/\{0\}$. При этом структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ слоения Ли с всюду плотными слоями $(\mathcal{L}, \mathcal{F}|_{\mathcal{L}})$ является подалгеброй Ли алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, если $\mathfrak{g}$ – разрешимая алгебра, то $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ также разрешима, т.е. из 2) следует 1). Таким образом, описана схема доказательства теоремы 4.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – полное картаново слоение типа $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ с ненулевой структурной алгеброй Ли. Тогда, если выполняется по крайней мере одно из следующих двух условий:

- 1) структурная алгебра $\mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ разрешима;
- 2) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима и слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет нулевую трансверсальную кривизну;

то стандартный типичный слой этого слоения имеет ровно один или ровно два конца.

Доказательство теоремы 5, в отличие от теорем 2–4, использует не слоеное расслоение над полным картановым слоением $(M, \mathcal{F})$, а группоид голономии $G(\mathcal{F})$. Оно опирается на следующие результаты, полученные ранее автором [12], [13]:

- 1) группоид голономии $G(\mathcal{F})$ полного картанова слоения $(M, \mathcal{F})$ является хаусдорфовым многообразием, а канонические проекции $p_j : G(\mathcal{F}) \rightarrow M$, $j = 1, 2$, образуют локально тривиальные расслоения, стандартные слои которых диффеоморфны стандартному типичному слою L_0 слоения $(M, \mathcal{F})$;
- 2) для любого типичного слоя L этого слоения прообраз $p_j^{-1}(L)$ диффеоморфен произведению многообразий $L \times L$.

ТЕОРЕМА 5. Если $(M, \mathcal{F})$ – полное картаново слоение на односвязном компактном многообразии M , то $e(L_0)$ равно 0, 1 или 2. Более того, $e(L_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $(M, \mathcal{F})$ – компактное риманово слоение, а $M/\mathcal{F}$ – гладкий односвязный компактный орбифолд.

СЛЕДСТВИЕ 1 (Винкельнкемпер [14]). Для риманова слоения $(M, \mathcal{F})$ на компактном односвязном римановом многообразии $e(L_0) \in \{0, 1, 2\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Жукова, *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 115–147. [2] R. A. Blumenthal, *Illinois J. Math.*, **31**:2 (1987), 327–343. [3] R. A. Blumenthal, *Michigan Math. J.*, **31**:1 (1984), 55–63. [4] C. Ehresmann, *Colloque de Topologie* (Bruxelles, 1950), Georges Thone, Liege, 1950, 29–55. [5] A. Čap, H. Schichl, *Hokkaido Math. J.*, **29**:3 (2000), 453–505. [6] P. Molino, *Riemannian Foliations*, Progr. Math., **73**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1988. [7] G. Hector, S. Matsumoto, G. Meigniez, *J. Math. Soc. Japan*, **57**:3 (2005), 753–779. [8] F. Raymond, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 947–963. [9] J. Cantwell, L. Conlon, *Comment. Math. Helv.*, **73**:2 (1998), 306–336. [10] E. Ghys, *Ann. of Math.* (2), **141**:2 (1995), 387–422. [11] H. Hopf, *Comment. Math. Helv.*, **16**:1 (1944), 81–100. [12] Н. И. Жукова, *Изв. вузов. Матем.*, 1994, № 2, 78–81. [13] Н. И. Жукова, *Вестн. Нижегородск. ун-та. Сер. матем.*, 2004, № 1, 73–87. [14] H. E. Winkelnkemper, *Differential Geometry*, Progr. Math., **32**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 247–254.

Н. И. Жукова

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: n.i.zhukova@rambler.ru

Поступило

26.07.2008

Исправленный вариант

19.03.2009