Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Прибавкина, Медленно синхронизируемые автоматы с нулем и непокрывающие множества, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 422–430

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 06:13:54

Медленно синхронизируемые автоматы с нулем и непокрывающие множества

Е. В. Прибавкина

Используя комбинаторные свойства непокрывающих множеств в свободном моноиде, мы строим серию конечных детерминированных синхронизируемых автоматов с нулем, для которых кратчайшее синхронизирующее слово имеет длину $n^2/4 + n/2 - 1$, где n – число состояний.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. В данной работе под *конечным детерминированным автоматом* будем понимать тройку $\mathcal{A} = \langle Q, A, \delta \rangle$, где Q – конечное множество состояний, A – конечное множество входных символов (*входной алфавит*) и $\delta: Q \times A \rightarrow Q$ – *функция перехода*. Функция δ естественным образом продолжается на свободный моноид A^* над A ; это продолжение мы также будем обозначать через δ . Автомат $\mathcal{A} = \langle Q, A, \delta \rangle$ называется *синхронизируемым*, если существует слово $w \in A^*$ такое, что $\delta(q, w) = \delta(q', w)$ для всех $q, q' \in Q$. Любое слово с таким свойством называется *синхронизирующим* для автомата $\mathcal{A}$. Синхронизируемые автоматы находят многочисленные приложения в различных областях: тестировании реактивных систем, робототехнике, молекулярных вычислениях и др., и их изучению уделяется большое внимание, см. обзоры [1]–[3].

Для удобства в дальнейшем автомат с n состояниями будем называть *n -автоматом*. В 1964 г. Черни [4] построил серию n -автоматов над двубуквенным алфавитом, для которых кратчайшие синхронизирующие слова имеют длину $(n-1)^2$. Позднее он предположил, что эта конструкция реализует наихудший случай, т.е. что любой синхронизируемый n -автомат обладает синхронизирующим словом длины не более $(n-1)^2$. Эта *гипотеза Черни* остается открытой уже более 40 лет, несмотря на то, что она была доказана для некоторых классов автоматов, см. [1]–[3]. Известно, см., например, [5; предложение 3] что доказательство гипотезы Черни в общем случае сводится к доказательству ее в двух частных случаях: когда граф автомата является сильно-связным, т.е. каждое состояние достижимо из любого другого, и когда автомат обладает *нулем*, т.е. выделенным состоянием 0, для которого $\delta(0, a) = 0$ для любой буквы $a \in A$. Поэтому получение оценок максимальной длины кратчайших синхронизирующих слов именно для рассматриваемого в работе класса *синхронизируемых автоматов с нулем* представляет заметный интерес.

Ясно, что любой синхронизируемый автомат с нулем обладает ровно одним нулем, и любое синхронизирующее слово переводит такой автомат в нулевое состояние.

Относительно несложные рассуждения показывают, что длина синхронизирующего слова для произвольного синхронизируемого n -автомата с нулем не превосходит $n(n-1)/2$, см., например, [6]. Эта оценка является точной, поскольку для каждого n существует синхронизируемый n -автомат с нулем, имеющий $n-1$ входной символ, для которого кратчайшее синхронизирующее слово имеет длину $n(n-1)/2$ (рис. 1).

Рис. 1. Синхронизируемый n -автомат с нулем над $(n-1)$ -буквенным алфавитом, для которого кратчайшее синхронизирующее слово имеет длину $n(n-1)/2$

Особенность этого примера состоит в том, что число букв растет вместе с числом состояний, что контрастирует с примером Черни, где число букв не зависит от числа состояний. Таким образом, возникает естественный вопрос об определении максимальной длины $c_m(n)$ кратчайших синхронизирующих слов для n -автоматов с нулем над фиксированным m -буквенным алфавитом как функции от числа состояний n .

В [7] была построена серия n -автоматов с нулем над двухбуквенным алфавитом, кратчайшие синхронизирующие слова для которых имеют длину $n^2/4 + o(n^2)$. Основной результат [7] можно сформулировать так.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого натурального $n \geq 8$ существует синхронизируемый n -автомат с нулем над двухбуквенным алфавитом, кратчайшее синхронизирующее слово для которого имеет длину $\lceil (n^2 + 6n - 16)/4 \rceil$.*

Отметим, что автоматы из теоремы 1 были построены с помощью компьютерных экспериментов, проведенных для малого числа состояний, а затем обобщены в серию для произвольного числа состояний. Конструкция из [7] весьма нетривиальна и, кроме того, не обобщается на случай больших алфавитов. Придадим более точный смысл последнему утверждению. Любую серию синхронизируемых автоматов над двухбуквенным алфавитом можно обобщить на случай произвольного (более чем двухбуквенного) алфавита. Для этого достаточно положить, что каждая новая буква действует тождественно на каждом состоянии. Однако такое обобщение не дает никакой существенно новой информации о свойствах синхронизируемости (кратчайшие синхронизирующие слова остаются теми же самыми, что и до добавления новых букв). Поэтому задачу об оценке функции $c_m(n)$ уместно ставить для тех синхронизируемых автоматов, в которых каждая буква существенна для синхронизации, иначе говоря, каждая буква алфавита входит в каждое синхронизирующее данный автомат слово. Такие автоматы будем называть *существенными*. В то время как для случая $|A| = 2$ известно несколько серий медленно синхронизируемых (с квадратичной функцией $c_2(n)$) существенных автоматов [4], [8], [9], для случая $|A| > 2$ до настоящего времени были известны только отдельные примеры: $c_3(3) = 4$,

$c_3(4) = 9$, $c_3(5) = 16$ (см. обзор [3]). В данной работе мы строим серию медленно синхронизируемых существенных автоматов с нулем.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – произвольный алфавит, $|A| \geq 2$. Для любого $k > |A|$ существует синхронизируемый существенный автомат с нулем и $n = 2k$ состояниями над алфавитом A , кратчайшее синхронизирующее слово для которого имеет длину $n^2/4 + n/2 - 1$.

Наша конструкция приводит к тому же порядку роста длины кратчайшего синхронизирующего слова, что и конструкция, предложенная в [7], но существенно отличается от последней отсутствием ограничений на число входных букв, а также большей прозрачностью. Важно и то, что она была найдена не с помощью компьютерного перебора, а как результат анализа взаимосвязей между синхронизируемыми автоматами с нулем и непокрывающими множествами в свободных моноидах. Напомним, что покрывающие и непокрывающие множества играют важную роль в комбинаторике слов и теории кодов в связи с понятием максимальных кодов (см., например, [10]). По нашему мнению, устанавливаемая в настоящей работе связь между комбинаторными объектами разной природы (кодами и автоматами) представляет и самостоятельный интерес.

Работа организована следующим образом. В п. 2 вводится понятие непокрывающего множества и изучаются свойства непокрываемых слов, необходимые для доказательства основного результата. В п. 3 по конечному множеству слов X строится автомат $\mathcal{F}(X)$ с нулем, распознающий моноид X^* . В п. 4 устанавливается тождественность слов, непокрываемых в X^* , и слов, синхронизирующих построенный автомат $\mathcal{F}(X)$, доказывается теорема 2.

2. Непокрывающие множества. Чтобы зафиксировать используемые в работе терминологию и обозначения, напомним основные определения из комбинаторики слов. Через $|w|$ будем обозначать длину слова w , т.е. число входящих в него букв; длину пустого слова λ будем считать равной нулю: $|\lambda| = 0$. Через A^+ будем обозначать множество всех непустых слов над A , а через A^k – множество всех слов длины k над A . Слово $u \in A^+$ называется фактором слова w (соответственно префиксом, суффиксом), если w представимо в виде $w = xiu$ (соответственно $w = u$, $w = xi$) для некоторых $x, y \in A^*$. Фактор (префикс, суффикс) u слова w называется собственным, если $u \neq w$. Для слова $u = a_1a_2 \cdots a_n \in A^+$ через $u[i \dots j]$, где $1 \leq i, j \leq n$, будем обозначать фактор $a_i a_{i+1} \cdots a_j$, если $i \leq j$, и пустое слово, если $i > j$. Кроме того, будем считать, что $u[0] = \lambda$. Слово $u \in A^*$ будем называть неokaймленным, если никакой его собственный префикс не является одновременно его суффиксом.

Пусть X – конечное множество слов над алфавитом A . Слово $w \in A^*$ называется покрываемым в X^* , если w является фактором некоторого слова из X^* , в противном случае w называется непокрываемым. Говорят, что множество X является покрывающим, если любое слово над алфавитом A является покрываемым в X^* . В противном случае X – непокрывающее множество. Некоторые свойства покрывающих и непокрывающих множеств изучались в [10]. В данной работе мы используем следующий результат из [10].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $X \subseteq A^*$, $k = \max_{x \in X} |x|$, и существует слово u длины k такое, что ни один его фактор не принадлежит множеству X . Тогда множество X непокрываемое, и слово $w = (ua)^{k-1}u$, где a – произвольная буква, является непокрываемым.

Далее будем рассматривать множества вида $X = A^k \setminus \{u\}$, где u – некоторое неокаймленное слово и $k \geq 2$. Из предложения 1 вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Любое множество вида $X = A^k \setminus \{u\}$, $k \geq 2$, $u \in A^k$, является непокрываемым.

ЛЕММА 1. Пусть $X = A^k \setminus \{u\}$, где u – неокаймленное слово. Произвольное непокрываемое в X^* слово имеет вид $v_0uv_1u \cdots uv_muv_{m+1}$, где $v_i \in A^* \setminus A^*uA^*$, $m > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть слово w непокрываемо в X^* . Тогда w содержит u в качестве фактора. Действительно, если это не так, то рассмотрим $z \in A^*$ минимальной длины такое, что длина слова $|wz|$ кратна k . Тогда wz представляется в виде $wz = x_1x_2 \cdots x_s$, где $x_1, x_2, \dots, x_s \in A^k$ (рис. 2). Поскольку w не содержит u в качестве фактора, то все x_i отличны от u ; значит, $x_1, x_2, \dots, x_s \in A^k \setminus \{u\}$; следовательно, слово w покрываемо в X^* .

Рис. 2. Слово w не содержит u в качестве фактора

Предположим теперь, что u входит как фактор в w только один раз, т.е. $w = w'uw''$. Тогда слово $u[2 \dots k]w''$ не содержит u в качестве фактора, поскольку u – неокаймленное. Из предыдущих рассуждений следует, что существует такое слово $z \in A^*$, что $u[2 \dots k]w''z \in X^*$. Аналогично, $w'u[1]$ не содержит u в качестве фактора; следовательно, существует $y \in A^*$ такое, что $yw'u[1] \in X^*$ (см. рис. 3). Следовательно, $ywz \in X^*$, т.е. в этом случае w также можно покрыть в X^* – противоречие.

Рис. 3. Слово w содержит u в качестве фактора только один раз

Таким образом, фактор u входит в w , по крайней мере, два раза, причем, поскольку u неокаймленное, эти вхождения не перекрываются, и w можно представить в виде $w = v_0uv_1u \cdots v_muv_{m+1}$, где v_i не содержат факторов вида u и $m > 0$.

Далее мы даем необходимое и достаточное условие непокрываемости для слова вида $w = v_0uv_1u \cdots v_muv_{m+1}$. Для этого введем несколько вспомогательных понятий.

Позиция $0 \leq i < k$ в j -м вхождении слова u в w называется *запрещенной*, если $u[i + 1 \dots k]v_ju \cdots v_muv_{m+1}z$ не принадлежит X^* ни для какого $z \in A^*$. Для j -го

вхождения слова u в w , где $1 \leq j \leq m$, через S_j будем обозначать множество запрещенных позиций ($S_j \subseteq \{0, 1, \dots, k-1\}$ для любого j). Нетрудно видеть, что слово w является непокрываемым тогда и только тогда, когда $S_1 = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Множество $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subseteq \mathbb{N}$ называется k -представительным, если среди остатков при делении на k его элементов содержатся все положительные вычеты по модулю k , т.е.

$$\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{k-1}\} \subseteq \{s_1 \bmod k, s_2 \bmod k, \dots, s_m \bmod k\}.$$

Докажем теперь критерий непокрываемости слова w .

ЛЕММА 2. Пусть $X = A^k \setminus \{u\}$ для некоторого неокаймленного слова u . Слово $w = v_0 v_1 v_2 \dots v_m v_{m+1}$, где $v_i \in A^* \setminus A^* u A^*$, $m > 0$, является непокрываемым в X^* тогда и только тогда, когда множество

$$\{|v_1|, |v_1| + |v_2|, \dots, |v_1| + |v_2| + \dots + |v_m|\}$$

является k -представительным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим слово $w = v_0 v_1 v_2 \dots v_m v_{m+1}$. Поскольку множество X содержит только слова длины k , для всех j имеем $0 \in S_j$. Кроме того, поскольку никакой собственный префикс слова u не является также его суффиксом, имеем

$$S_{m+1} = \{0\}.$$

Далее, нетрудно видеть, что если определено множество S_j , то ненулевая позиция i принадлежит S_{j-1} тогда и только тогда, когда

$$u[i+1 \dots k] v_{j-1} u[1 \dots \ell] \in X^*, \quad \ell \in S_j.$$

Таким образом, $0 \neq i \in S_m$ тогда и только тогда, когда $u[i+1 \dots k] v_m \in X^*$, т.е. длина фактора $u[i+1 \dots k] v_m$ кратна k ; следовательно, $i \equiv |v_m| \bmod k$. Получаем

$$S_m = \{0, |v_m| \bmod k\}.$$

Далее предположим, что уже вычислено

$$S_j = \{0, |v_j| \bmod k, (|v_j| + |v_{j+1}|) \bmod k, \dots, (|v_j| + \dots + |v_m|) \bmod k\} \quad (2.1)$$

для $0 < j \leq m$. Докажем, что

$$S_{j-1} = \{0, |v_{j-1}| \bmod k, (|v_{j-1}| + |v_j|) \bmod k, \dots, (|v_{j-1}| + |v_j| + \dots + |v_m|) \bmod k\}. \quad (2.2)$$

Пусть $0 < i < k$. Поскольку $X = A^k \setminus \{u\}$ и u неокаймленное, всегда существует ℓ такое, что $0 \leq \ell < k$ и $u[i+1 \dots k] v_{j-1} u[1 \dots \ell] \in X^*$, т.е. длина этого фактора кратна k ; следовательно,

$$i \equiv (|v_{j-1}| + \ell) \bmod k.$$

Поскольку $0 \neq i \in S_{j-1}$ тогда и только тогда, когда $\ell \in S_j$, используя (2.1), получаем (2.2).

Таким образом,

$$S_1 = \{0, |v_1| \bmod k, (|v_1| + |v_2|) \bmod k, \dots, (|v_1| + \dots + |v_m|) \bmod k\}.$$

Учитывая сделанное выше замечание о том, что слово w является непокрываемым тогда и только тогда, когда $S_1 = \{0, 1, \dots, k-1\}$, получаем требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Кратчайшее непокрываемое слово для множества $X = A^k \setminus \{u\}$, где u – неоканчивающееся слово, имеет длину $k^2 + k - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 1 (а также из леммы 2) следует, что слово $w = (ua)^{k-1}u$ для произвольной буквы $a \in A$ является непокрываемым в X^* . Ясно, что длина w равна $k^2 + k - 1$.

Пусть w' – кратчайшее непокрываемое слово для множества X^* . Тогда по лемме 1 оно имеет вид $v_0 u v_1 \dots v_m u v_{m+1}$, где $v_i \in A^* \setminus A^* u A^*$ и $m > 0$. Заметим, что $m \geq k - 1$, и среди слов v_i , $1 \leq i \leq m$, должно быть не менее $k - 1$ непустых (иначе множество $\{|v_1|, |v_1| + |v_2|, \dots, |v_1| + \dots + |v_m|\}$ не является k -представительным, и по лемме 2 слово w можно покрыть). Следовательно, $|w'| \geq k - 1 + k^2 = |w|$.

3. Построение автомата по множеству X . В этом пункте конечные автоматы рассматриваются как устройства, распознающие языки. Для этого во множестве состояний автомата выделяется начальное состояние q_0 и множество заключительных состояний F . Говорят, что автомат $\mathcal{A} = \langle Q, A, \delta, q_0, F \rangle$ распознает язык $L \subseteq A^*$, если

$$L = \{w \in A^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}.$$

Пусть X – конечное множество слов. Через $\mathcal{F}(X)$ будем обозначать автомат, распознающий моноид X^* , в котором начальное состояние 1 является единственным заключительным, все циклы проходят через это состояние и, кроме того, все слова множества X читаются из начального состояния вдоль всевозможных простых циклов. Такие автоматы известны в литературе как *полувещечные автоматы*, см. например, [11]. Пример полувещечного автомата для множества $X = \{aa, ab, ba, bb, aab\}$ приведен на рис. 4.

Рис. 4. Полувещечный автомат для X^* , где $X = \{aa, ab, ba, bb, aab\}$

В общем случае полувещечный автомат является недетерминированным. Напомним, что отличие такого автомата от детерминированного заключается в том, что функция переходов $\delta: Q \times A \rightarrow Q$ заменяется на функцию $\delta: Q \times A \rightarrow 2^Q$. Отметим, что данное определение не исключает возможности $\delta(q, a) = \emptyset$ для некоторых $q \in Q$ и $a \in A$ (например, для автомата на рис. 4 имеем $\delta(3, a) = \emptyset$). Функция переходов, так же, как и в случае детерминированных автоматов, может быть продолжена на свободный моноид A^+ : если $w = au$, $a \in A$, $u \in A^+$, то полагаем

$$\delta(q, au) = \bigcup_{t \in \delta(q, a)} \delta(t, u).$$

Любой полуцветочный автомат можно дополнить, добавив новое состояние 0 и полагая равными 0 все ранее неопределенные переходы (рис. 5). Кроме того, положим $\delta(0, a) = 0$ для всех букв $a \in A$. Полученный таким образом автомат будем обозначать $\widehat{\mathcal{F}}(X)$.

Рис. 5. Автомат $\widehat{\mathcal{F}}(X)$ для $X = \{aa, ab, ba, bb, aab\}$

В частном случае, когда $X = A^k \setminus \{u\}$, автомат $\widehat{\mathcal{F}}(X)$ будем обозначать через $\widehat{\mathcal{F}}(k, u)$.

4. Непокрывающие множества и синхронизируемые автоматы. Понятие синхронизируемого автомата можно различными способами распространить на случай недетерминированных автоматов. Здесь мы используем одно из возможных таких определений, известное в литературе как *синхронизируемость в сильном смысле* [12].

Недетерминированный автомат $\mathcal{A} = \langle Q, A, \delta \rangle$ называется *синхронизируемым*, если существует слово $w \in A^*$ и состояние $q \in Q$ такие, что $\delta(q', w) = \{q\}$ для любого $q' \in Q$. Иными словами, всевозможные пути, помеченные словом w , из произвольного состояния автомата $\mathcal{A}$ приводят в выделенное состояние q .

Следующее предложение связывает понятия слова, непокрываемого в X^* , и синхронизирующего слова для пополненного полуцветочного автомата $\widehat{\mathcal{F}}(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – непокрывающее множество. Слово w является непокрываемым в X^* тогда и только тогда, когда w является синхронизирующим для $\widehat{\mathcal{F}}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению автомата $\widehat{\mathcal{F}}(X)$ то, что слово w не является фактором никакого слова из X^* , означает, что его нельзя прочесть ни из какого состояния этого автомата. Это эквивалентно тому, что оно переводит в 0 любое состояние автомата $\widehat{\mathcal{F}}(X)$.

Построим автомат $\widehat{\mathcal{F}}(k, u) = \langle Q, A, \delta, 1, \{1\} \rangle$, для $k \geq 2$ и неокаймленного слова $u = a_1 a_2 \dots a_k$.

Этот автомат имеет $n = 2k$ состояний $Q = \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$, переходы определяются следующим образом (см. рис. 6).

Для $1 \leq i \leq k - 1$ полагаем

$$\begin{aligned} \delta(i, a_i) &= i + 1, & \delta(i, b) &= k + i \quad \text{для всех } b \in A \setminus \{a_i\}, \\ \delta(k, a_k) &= 0, & \delta(k, b) &= 1 \quad \text{для всех } b \in A \setminus \{a_k\}. \end{aligned}$$

Для $k + 1 \leq i \leq 2k - 2$ полагаем

$$\delta(i, a) = i + 1, \quad \delta(2k - 1, a) = 1, \quad \delta(0, a) = 0, \quad \text{для всех } a \in A.$$

Рис. 6. Автомат $\widehat{\mathcal{F}}(k, u)$, где $k \geq 2$ и $u = a_1 a_2 \dots a_k$

Заметим, что в данном случае автомат $\widehat{\mathcal{F}}(k, u)$ является детерминированным; кроме того, по предложению 3 слово $w = (ua)^{k-1}u$ является для него кратчайшим синхронизирующим. Таким образом, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть u – неокаймленное слово длины $k \geq 2$ и $X = A^k \setminus \{u\}$. Тогда кратчайшее синхронизирующее слово для детерминированного автомата $\widehat{\mathcal{F}}(k, u)$ с нулем имеет длину $k^2 + k - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $k > |A|$ и u – неокаймленное слово длины k , в котором встречается каждая буква алфавита A . Тогда автомат $\widehat{\mathcal{F}}(k, u)$ является существенным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что слово u является фактором любого непокрываемого слова для $A^k \setminus \{u\}$, т.е. по предложению 3 u является фактором любого синхронизирующего слова для автомата $\widehat{\mathcal{F}}(k, u)$. Поскольку каждая буква алфавита A входит в u , каждая буква входит в каждое синхронизирующее слово для $\widehat{\mathcal{F}}(k, u)$; следовательно, по определению этот автомат является существенным.

Из предложений 4 и 5 следует основная теорема 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Mateescu, A. Salomaa, “Many-valued truth functions, Černý’s conjecture and road coloring”, *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS*, **68** (1999), 134–150.
- [2] S. Sandberg, “Homing and synchronizing sequences”, *Model-Based Testing of Reactive Systems*, Lecture Notes in Comput. Sci., **3472**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 5–33.

- [3] M. V. Volkov, “Synchronizing automata and the Černý conjecture”, *Languages and Automata: Theory and Applications*, Lecture Notes in Comput. Sci., **5196**, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 11–27.
- [4] J. Černý, “Poznamka k homogennym eksperimentom s konecnymi automatami”, *Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied.*, **14**:3 (1964), 208–216.
- [5] M. V. Volkov, “Synchronizing automata preserving a chain of partial orders”, *Theoret. Comput. Sci.*, **410**:37 (2009), 3513–3519.
- [6] I. Rystsov, “Reset words for commutative and solvable automata”, *Theoret. Comput. Sci.*, **172**:1-2 (1997), 273–279.
- [7] P. V. Martugin, “A series of slowly synchronizing automata with a zero state over a small alphabet”, *Inform. and Comput.*, **206**:9-10 (2008), 1197–1203.
- [8] D. Ananichev, V. Gusev, M. Volkov, “Slowly synchronizing automata and digraphs”, *Mathematical Foundations of Computer Science*, Lecture Notes in Comput. Sci., **6281**, Springer-Verlag, Berlin, 2010, 55–65.
- [9] D. S. Ananichev, M. V. Volkov, Yu. I. Zaks, “Synchronizing automata with a letter of deficiency 2”, *Theoret. Comput. Sci.*, **376**:1-2 (2007), 30–41.
- [10] A. Restivo, “Some remarks on complete subsets of a free monoid”, *Noncommutative Structures in Algebra and Geometric Combinatorics*, Quad. “Ricerca Sci.”, **109**, CNR, Rome, 1981, 19–25.
- [11] L. Giambruno, A. Restivo, “An automata-theoretic approach to the study of the intersection of two submonoids of a free monoid”, *Theor. Inform. Appl.*, **42**:3 (2008), 503–524.
- [12] M. Ito, *Algebraic Theory of Automata and Languages*, World Sci. Publ., Singapore, 2004.

Е. В. Прибавкина

Уральский государственный университет им. А. М. Горького,
г. Екатеринбург
E-mail: elena.pribavkina@usu.ru

Поступило

28.08.2008

Исправленный вариант

21.12.2010