Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Пупырев, Эффективизация нижней оценки для $\|(4/3)^k\|$, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 927–935

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:36:48

Эффективизация нижней оценки для $\|(4/3)^k\|$

Ю. А. Пупырев

В работе получена эффективная нижняя оценка для $\|(4/3)^k\|$, где $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Классической проблемой Варинга является вычисление порядка $g(k)$ множества $\{1^k, 2^k, \dots\}$ как аддитивного базиса целых положительных чисел. Известно, что неравенство

$$\left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^k \right\} \leq 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k \quad (1)$$

влечет представление

$$g(k) = 2^k + \left[\left(\frac{3}{2} \right)^k \right] - 2, \quad (2)$$

где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначают соответственно целую и дробную части числа.

В 1957 г. Малер [1] использовал обобщение Риду известной теоремы Рота, чтобы показать, что неравенство

$$\left\| \left(\frac{3}{2} \right)^k \right\| \leq C^k,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого, $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$, имеет лишь конечное число решений в целых k для любого $C < 1$. В частности, в случае $C = 3/4$ получается неравенство (1), а вместе с ним и представление (2), для всех $k \geq K$, где K – абсолютная, но *неэффективная* постоянная.

В связи с этим возникла задача получить нетривиальную (с $C > 1/2$) и эффективную (в терминах K) оценку вида

$$\left\| \left(\frac{3}{2} \right)^k \right\| > C^k \quad \text{для всех } k \geq K. \quad (3)$$

Первое продвижение в решении этой задачи сделали в 1975 г. Бейкер и Коэтс [2]. Применяв эффективные оценки линейных форм для p -адических логарифмов, они показали справедливость (3) с $C = 2^{-(1-10^{-64})}$.

В 1981 г. Бэйкерс [3] существенно улучшил этот результат, доказав, что неравенство (3) выполняется с $C = 2^{-0.9} = 0.5358\dots$ при $k \geq 5000$. Доказательство Бэйкерса основано на приближениях Паде к остатку биномиального ряда $(1-z)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-z)^n$.

В 1990 г. Дубицкас [4] использовал конструкцию Бэйкерса для получения оценки (3) с $C = 0.5769\dots$. В этом же году Делмер и Дезуер [5] построили быстрый алгоритм вычисления $g(k)$, а Кубина и Вундерлих [6] проверили неравенство (1) для всех $k \leq 471600000$.

В 1993 г. Беннет [7], [8] рассмотрел обобщение проблемы Варинга, именно, задачу о порядке $g_N(k)$ аддитивного базиса

$$S_N^{(k)} = \{1^k, N^k, (N+1)^k, \dots\}, \quad N \geq 2,$$

множества целых положительных чисел. Он установил лучшие на данный момент оценки для последовательностей $\|(1+1/N)^k\|$:

$$\left\| \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \right\| > 3^{-k} \quad \text{при} \quad 4 \leq N \leq k \cdot 3^k$$

и с их помощью получил представление

$$g_N(k) = N^k + \left[\left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \right] - 2 \quad (4)$$

при $4 \leq N \leq (k+1)^{(k-1)/k} - 1$.

В 2003 г. Хабсигер [9], пользуясь, как и Дубицкас, конструкцией Бэйкерса, получает оценку (3) с $C = 0.5770\dots$; его работа также содержит оценку

$$\left\| \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\| > 0.57434^k \quad \text{при} \quad k \geq 5, \quad (5)$$

полученную на основе вычислений в [5] и [6].

Наконец, в 2007 г. Зудилин [10], модифицировав конструкцию Бэйкерса, а именно, рассмотрев приближения Паде к остатку ряда $1/(1-z)^{m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} z^n$ и получив точные оценки p -адических порядков возникающих биномиальных коэффициентов, пришел к оценке

$$\left\| \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\| > 0.5803^k \quad \text{для всех} \quad k \geq K,$$

где K – некоторая эффективная постоянная. Конструкция работы [10] позволила ему также получить оценки

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{4}{3}\right)^k \right\| &> 0.4914^k && \text{при} \quad k \geq K_1, \\ \left\| \left(\frac{5}{4}\right)^k \right\| &> 0.5152^k && \text{при} \quad k \geq K_2, \end{aligned}$$

где K_1 и K_2 – эффективные постоянные. Указанная оценка снизу для $\|(4/3)^k\|$ дополняет результат Беннета [7] о порядке аддитивного базиса $\{1^k, 3^k, 4^k, \dots\}$, который требует выполнения $\|(4/3)^k\| > (4/9)^k$ при $k \geq 6$, с тем условием, что последнее неравенство будет проверено в диапазоне $6 \leq k \leq K_1$.

В настоящей работе на основе конструкции из работы [10] и техники из работы [9] проведена эффективизация нижней оценки для $\|(4/3)^k\|$, а именно, получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Для $\|(4/3)^k\|$ имеем

$$\left\| \left(\frac{4}{3} \right)^k \right\| > 0.4910^k \quad \text{при } k \geq 5\,868\,122\,745\,713\,241\,570.$$

Кроме того, мы улучшаем оценку (5).

ТЕОРЕМА 2. Для $\|(3/2)^k\|$ имеем

$$\left\| \left(\frac{3}{2} \right)^k \right\| > 0.5795^k \quad \text{при } k \geq 871\,387\,440\,264.$$

Так как доказательства теорем 1 и 2 имеют отличия лишь вычислительного характера, мы полностью приведем только доказательство теоремы 1, а в последнем пункте укажем необходимые изменения для доказательства теоремы 2.

Величины наименьших значений параметра k в теоремах 1 и 2 обусловлены необходимостью оценивать простые в большом количестве интервалов: при этом требуется высокая точность (см. (18) на с. 934). Проверка неравенств в теоремах при меньших k остается за пределами вычислительных возможностей.

2. Аппроксимации Паде. Следуя работе [10], зафиксируем два положительных целых параметра a и b , удовлетворяющих неравенству $3a \leq b$, и запишем

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3} \right)^{2(b+1)} &= \left(\frac{16}{9} \right)^{(b+1)} = 2^{b+1} \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{-(b+1)} = 2^{b+1} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{b+l}{b} \left(\frac{1}{8} \right)^l (-1)^l \\ &= 2^{b+1} 2^{-3a} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{b+l}{b} 2^{3(a-l)} (-1)^{-l} \\ &= 2^{b-3a+1} (-1)^a \sum_{l=0}^{\infty} \binom{b+l}{b} 2^{3(a-l)} (-1)^{(a-l)} \\ &\equiv 2^{b-3a+1} (-1)^a \sum_{l=a}^{\infty} \binom{b+l}{b} 2^{3(a-l)} (-1)^{(a-l)} \pmod{\mathbb{Z}} \\ &\equiv 2^{b-3a+1} (-1)^a \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{a+b+\nu}{b} \left(-\frac{1}{8} \right)^{\nu} \pmod{\mathbb{Z}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, как и в работе [10], будем рассматривать приближения Паде к функции

$$F(z) = F(a, b; z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{a+b+\nu}{b} z^{\nu}. \quad (7)$$

Для произвольного неотрицательного целого $n \leq b$ из [10] получаем функции

$$\begin{aligned} Q_n(z^{-1}) &= \frac{(a+b+n)!}{(a+n-1)!n!(b-n)!} \int_0^1 t^{a+n-1} (1-t)^{b-n} (1-z^{-1}t)^n dt, \\ R_n(z) &= \frac{(a+b+n)!}{(a+n-1)!n!(b-n)!} \cdot z^n \int_0^1 t^n (1-t)^{a+n-1} (1-zt)^{-(a+b+n+1)} dt \end{aligned} \quad (8)$$

такие, что

$$Q_n(z^{-1})F(z) = P_n(z^{-1}) + R_n(z), \quad (9)$$

где многочлен $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P_n \leq n-1$.

Определив, как и в [10], для каждого простого $p > \sqrt{a+b+n}$ показатели

$$e_{p,n} = \min_{\mu \in \mathbb{Z}} \left(-\left\{ -\frac{a+n}{p} \right\} + \left\{ -\frac{a+n+\mu}{p} \right\} + \left\{ \frac{\mu}{p} \right\} - \left\{ \frac{a+b+n}{p} \right\} + \left\{ \frac{a+b+\mu}{p} \right\} + \left\{ \frac{n-\mu}{p} \right\} \right),$$

получим, что

$$\Phi^{-1}Q_n(x), \quad \Phi^{-1}P_n(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad \Phi = \Phi(a, b, n) = \prod_{p > \sqrt{a+b+n}} p^{e_{p,n}},$$

см. [10].

3. Аналитические и арифметические оценки. Представим параметры a, b и n в виде

$$a = \alpha m, \quad b = \beta m, \quad n = \gamma m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для простоты дальнейшего изложения будем предполагать, что $\gamma, \beta - \gamma \geq 2$.

В дальнейшем нам потребуются оценки величин $|Q_n(z^{-1})|$ и $|R_n(z)|$ в точке $z = -1/8$ и величины Φ . Оценим сначала

$$\log \left(\frac{(\alpha m + \beta m + \gamma m)!}{(\alpha m + \gamma m - 1)! n! (\beta m - \gamma m)!} \right).$$

Воспользуемся формулой Стирлинга (см., например, [11])

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2} \right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\{x\} - \{x\}^2}{(x+s)^2} dx;$$

получим

$$\begin{aligned} & \log \left(\frac{(\alpha m + \beta m + \gamma m)!}{(\alpha m + \gamma m - 1)! n! (\beta m - \gamma m)!} \right) \\ &= m(\alpha + \beta + \gamma) \log(m(\alpha + \beta + \gamma) + 1) + \frac{1}{2} \log(m(\alpha + \beta + \gamma) + 1) \\ & \quad - m(\alpha + \gamma) \log(m(\alpha + \gamma)) + \frac{1}{2} \log(m(\alpha + \gamma)) \\ & \quad - m\gamma \log(m\gamma + 1) - \frac{1}{2} \log(m\gamma + 1) \\ & \quad - m(\beta - \gamma) \log(m(\beta - \gamma) + 1) - \frac{1}{2} \log(m(\beta - \gamma) + 1) - \log(2\pi) + 1 + I, \end{aligned}$$

где

$$I = \int_0^\infty \frac{\{x\} - \{x\}^2}{2} \left(\frac{1}{(m(\alpha + \beta + \gamma) + 1 + x)^2} - \frac{1}{(m(\alpha + \gamma) + x)^2} - \frac{1}{(m\gamma + 1 + x)^2} - \frac{1}{(m(\beta - \gamma) + 1 + x)^2} \right) dx \leq 0.$$

Поэтому, пользуясь неравенствами $\log(1+x) \leq x$ и $\log(1+x) \geq x-x^2/2$ при $x \in (0, 1)$, получаем

$$\begin{aligned} & \log\left(\frac{(\alpha m + \beta m + \gamma m)!}{(\alpha m + \gamma m - 1)!n!(\beta m - \gamma m)!}\right) \\ & \leq mA(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{1}{\beta - \gamma} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{(\beta - \gamma)^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) \\ & \quad + \frac{1}{2}(\log(\alpha + \beta + \gamma) - \log(\alpha + \gamma) - \log \gamma - \log(\beta - \gamma)) \\ & \quad + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{1}{\beta - \gamma} - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{1}{4m^2}\left(\frac{1}{(\beta - \gamma)^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) - \log(2\pi) + 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma) \log(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) \log(\alpha + \gamma) - \gamma \log \gamma - (\beta - \gamma) \log(\beta - \gamma).$$

Очевидно, имеем

$$\frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{1}{\beta - \gamma} - \frac{1}{\gamma} \leq 0.$$

Пользуясь неравенством $\log(x_1 + x_2) \leq \log x_1 + \log x_2$ при $x_1, x_2 \geq 2$, получаем

$$\log(\alpha + \beta + \gamma) - \log(\alpha + \gamma) - \log \gamma - \log(\beta - \gamma) \leq \log \beta - \log \gamma - \log(\beta - \gamma) \leq 0.$$

Далее, рассмотрим выражение при коэффициенте $1/(2m)$ в (10):

$$\frac{1}{(\beta - \gamma)^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{1}{\beta - \gamma} - \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{\gamma} \leq 0.$$

Учитывая три последние оценки и замечая, что $\log(2\pi) - 1 > 0.8$, из (10) получаем

$$\log\left(\frac{(\alpha m + \beta m + \gamma m)!}{(\alpha m + \gamma m - 1)!n!(\beta m - \gamma m)!}\right) \leq mA(\alpha, \beta, \gamma).$$

Теперь оценим интегралы в (8). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{(\alpha+\gamma)m-1} (1-t)^{(\beta-\gamma)m} (1-z^{-1}t)^{\gamma m} dt \\ & \leq \left(\max_{t \in [0,1]} |t^{\alpha+\gamma} (1-t)^{\beta-\gamma} (1-z^{-1}t)^{\gamma}| \right)^{m-1} \int_0^1 t^{\alpha+\gamma-1} (1-t)^{\beta-\gamma} (1-z^{-1}t)^{\gamma} dt, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\gamma m} (1-t)^{(\alpha+\gamma)m-1} (1-zt)^{-(\alpha+\beta+\gamma)m-1} dt \\ & \leq \left(\max_{t \in [0,1]} |t^{\gamma} (1-t)^{\alpha+\gamma} (1-zt)^{-(\alpha+\beta+\gamma)}| \right)^{m-1} \\ & \quad \times \int_0^1 t^{\gamma} (1-t)^{\alpha+\gamma-1} (1-zt)^{-(\alpha+\beta+\gamma)-1} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Для оценки Φ обозначим через $\mathcal{P}$ все множество простых чисел, а через $\mathcal{P}(\alpha, \beta, \gamma, m)$ – множество простых, входящих в произведение $\Phi(\alpha m, \beta m, \gamma m)$. Для вычисления Φ вводится функция

$$\varphi(x) = \min_{0 \leq y < 1} \{-\{-(\alpha + \gamma)x\} + \{-(\alpha + \gamma)x - y\} + \{y\} - \{(\alpha + \beta + \gamma)x\} + \{(\alpha + \beta)x + y\} + \{\gamma x - y\}\},$$

принимаящая в точке m/p значение $e_{n,p}$. Функция $\varphi(x)$ периодична с периодом 1 и принимает целые значения (более точно [10], $\varphi(x) \in \{0, 1\}$). Решением уравнения $\varphi(x) = 1$ является набор полуинтервалов (иногда отрезков), лежащих в $[0, 1)$, которым должна принадлежать $\{x\}$. Если левые и правые концы этих полуинтервалов обозначить соответственно через a_i и b_i , то условие $a_i \leq x < b_i$ (т.е. $e_{n,p} = \varphi(m/p) = 1$) эквивалентно

$$a_i + N \leq \frac{m}{p} < b_i + N, \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

откуда

$$p \in \left(\frac{m}{b_i + N}, \frac{m}{a_i + N} \right], \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

и, значит,

$$\bigcup_{N=0}^{[\sqrt{m}/\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}]} \bigcup_i \left(\frac{m}{b_i + N}, \frac{m}{a_i + N} \right] \cap \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\alpha, \beta, \gamma, m),$$

так как для $p > \sqrt{a+b+n}$ необходимо $m/N \geq \sqrt{a+b+n}$. Таким образом,

$$\log \Phi \geq \sum_{N=0}^{[\sqrt{m}/\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}]-1} \sum_i \left(\theta\left(\frac{m}{a_i + N}\right) - \theta\left(\frac{m}{b_i + N}\right) \right), \quad (13)$$

где $\theta(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} \log p$.

4. Доказательство теоремы 1. Нашей целью является получение оценки снизу для модуля величины ε_k , где

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k = M_k + \varepsilon_k, \quad M_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < |\varepsilon_k| < \frac{1}{2}.$$

Представим $k \geq 3$ в виде $k = 2(\beta m + 1) + j$ с неотрицательными целыми m и $j < 2\beta$. Умножим обе части (9) на $\Phi^{-1} 2^{b-3a+1+2j} (-1)^a$ и подставим $z = -1/8$:

$$\begin{aligned} Q_n(-8) \Phi^{-1} 3^j \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^j 2^{b-3a+1} (-1)^a F\left(a, b, -\frac{1}{8}\right) \\ = P_n(-8) \Phi^{-1} 2^{b-3a+1+2j} (-1)^a + R_n\left(-\frac{1}{8}\right) \Phi^{-1} 2^{b-3a+1+2j} (-1)^a. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (6), (7) видим, что

$$\left(\frac{4}{3}\right)^j 2^{b-3a+1} (-1)^a F\left(a, b, -\frac{1}{8}\right) \equiv \left(\frac{4}{3}\right)^{2(b+1)+j} \pmod{\mathbb{Z}} = \left(\frac{4}{3}\right)^k,$$

так что левая часть представляется в виде $M'_k + \varepsilon_k$ и равенство (14) можно переписать в виде

$$Q_n(-8)\Phi^{-1}3^j \cdot \varepsilon_k = M''_k + R_n\left(-\frac{1}{8}\right)\Phi^{-1}2^{b-3a+1+2j}(-1)^a. \quad (15)$$

Предполагая, что

$$\left|R_n\left(-\frac{1}{8}\right)\Phi^{-1}2^{b-3a+1+2j}(-1)^a\right| < \frac{2}{3},$$

из (15) получаем

$$|Q_n(-8)\Phi^{-1}3^j| \cdot |\varepsilon_k| \geq |M''_k| - \left|R_n\left(-\frac{1}{8}\right)\Phi^{-1}2^{b-3a+1+2j}(-1)^a\right| > \frac{1}{3},$$

так что

$$|\varepsilon_k| > \frac{\Phi}{3^{j+1}|Q_n(-8)|} \geq \frac{\Phi}{3^{2\beta}|Q_n(-8)|}. \quad (16)$$

Выберем $\alpha = 5$, $\beta = 15$, $\gamma = 6$. Тогда получаем следующий набор интервалов, которым должна принадлежать $\{x\}$ для выполнения $\varphi(x) = 1$:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{13}, \frac{1}{11}\right] \cup \left[\frac{2}{13}, \frac{1}{6}\right) \cup \left[\frac{7}{26}, \frac{3}{11}\right] \cup \left[\frac{4}{13}, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{11}{26}, \frac{4}{9}\right) \cup \left[\frac{7}{13}, \frac{6}{11}\right] \\ & \cup \left[\frac{8}{13}, \frac{7}{11}\right] \cup \left[\frac{17}{26}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{10}{13}, \frac{7}{9}\right) \cup \left[\frac{21}{26}, \frac{9}{11}\right] \cup \left[\frac{23}{26}, \frac{8}{9}\right) \cup \left[\frac{25}{26}, 1\right). \end{aligned}$$

Будем использовать следующие оценки для $\theta(x)$: сверху [11; с. 360]

$$\theta(x) < 1.000081 \cdot x \quad \text{при } x > 0$$

и снизу [11; (5.6b*)]

$$\theta(x) > x \left(1 - 0.0077629 \cdot \frac{1}{\log x}\right) \quad \text{при } x \geq e^{22}. \quad (17)$$

Заметим, что из (17) для $x \geq 194\,604\,091\,523\,774\,719$ имеем

$$1 - 0.0077629 \cdot \frac{1}{\log x} > 0.999805.$$

Подставляя эти оценки в (13), получаем

$$\log \Phi > 3.234849567 \cdot m \quad \text{для } m \geq 194\,604\,091\,523\,774\,719.$$

Далее,

$$A(\alpha, \beta, \gamma) < 27.80808398,$$

и для интеграла из (11)

$$\begin{aligned} & \log \left(\max_{t \in [0,1]} (t^{\alpha+\gamma}(1-t)^{\beta-\gamma}(1+8t)^\gamma) \right) < -3.234642374, \\ & \log \left(\int_0^1 t^{\alpha+\gamma-1}(1-t)^{\beta-\gamma}(1+8t)^\gamma dt \right) < -4.190395757, \end{aligned}$$

а для интеграла из (12)

$$\begin{aligned}\log\left(\max_{t \in [0,1]} \left(t^\gamma (1-t)^{\alpha+\gamma} \left(1 + \frac{t}{8}\right)^{-(\alpha+\beta+\gamma)}\right)\right) &< -12.09679235, \\ \log\left(\int_0^1 t^\gamma (1-t)^{\alpha+\gamma-1} \left(1 + \frac{t}{8}\right)^{-(\alpha+\beta+\gamma)-1} dt\right) &< -13.03740416.\end{aligned}$$

Таким образом, учитывая

$$\log\left(\frac{1}{8}\right)^\gamma < -12.47664925,$$

приходим к

$$\begin{aligned}\left|R_n\left(-\frac{1}{8}\right)\Phi^{-1}2^{b-3a+1+2j}\right| \\ < \exp\{(27.80808398 - 12.09679235 - 12.47664925 - 3.234849567) \cdot m\} \\ < \exp\{-0.0002 \cdot m\} < \frac{2}{3} \quad \text{при } m \geq 194\,604\,091\,523\,774\,719;\end{aligned}\quad (18)$$

значит, мы можем пользоваться неравенством (16) при данных m . Тогда

$$|Q_n(-8)| < \exp\{(27.80808398 - 3.234642374) \cdot m\} = \exp\{24.573441606 \cdot m\},$$

откуда

$$\begin{aligned}|\varepsilon_k| &> \exp\{(3.234849567 - 24.573441606) \cdot m\} \\ &= \exp\{-21.338592039 \cdot m\} \quad \text{при } m \geq 194\,604\,091\,523\,774\,719.\end{aligned}$$

Вспоминая, что $k > 2\beta m$, получаем

$$\begin{aligned}|\varepsilon_k| &> \exp\{-21.338592039 \cdot m\} \\ &> \exp\{-0.7112864013 \cdot k\} > 0.4910^k \quad \text{при } k \geq 5\,868\,122\,745\,713\,241\,570.\end{aligned}$$

5. Доказательство теоремы 2. В случае теоремы 2 выбираем параметры a и b , удовлетворяющие неравенству $2a \leq b$, и имеем

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3(b+1)} \equiv 3^{b-2a+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{a+b+\nu}{b} \left(\frac{1}{9}\right)^\nu \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (19)$$

Поэтому нам потребуются оценки величин $|Q_n(z^{-1})|$ и $|R_n(z)|$ в точке $z = 1/9$.

Далее до п. 4 все выкладки остаются без изменения.

Теперь записываем

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k = M_k + \varepsilon_k, \quad M_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < |\varepsilon_k| < \frac{1}{2},$$

и представляем $k \geq 3$ в виде $k = 3(\beta m + 1) + j$ с неотрицательными целыми m и $j < 3\beta$. Умножаем обе части (9) на $\Phi^{-1}3^{b-2a+1+j}$ и подставляем $z = 1/9$:

$$Q_n(9)\Phi^{-1}2^j \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^j 3^{b-2a+1} F\left(a, b, \frac{1}{9}\right) = P_n(9)\Phi^{-1}3^{b-2a+1+j} + R_n\left(\frac{1}{9}\right)\Phi^{-1}3^{b-2a+1+j}. \quad (20)$$

Из (19), (7) замечаем, что

$$\left(\frac{3}{2}\right)^j 3^{b-2a+1} F\left(a, b, \frac{1}{9}\right) \equiv \left(\frac{3}{2}\right)^{3(b+1)+j} \pmod{\mathbb{Z}} = \left(\frac{3}{2}\right)^k,$$

и, представляя левую часть в виде $M'_k + \varepsilon_k$, записываем равенство (20) в виде

$$Q_n(9)\Phi^{-1}2^j \cdot \varepsilon_k = M''_k + R_n\left(\frac{1}{9}\right)\Phi^{-1}3^{b-2a+1+j}. \quad (21)$$

Предполагая, что

$$\left|R_n\left(\frac{1}{9}\right)\Phi^{-1}3^{b-2a+1+j}\right| < \frac{1}{2},$$

из (21) получаем

$$|Q_n(9)\Phi^{-1}2^j| \cdot |\varepsilon_k| \geq |M''_k| - \left|R_n\left(\frac{1}{9}\right)\Phi^{-1}3^{b-2a+1+j}\right| > \frac{1}{2},$$

так что находим

$$|\varepsilon_k| > \frac{\Phi}{2^{j+1}|Q_n(9)|} \geq \frac{\Phi}{2^{3\beta}|Q_n(9)|}. \quad (22)$$

Выбирая $\alpha = 9$, $\beta = 19$, $\gamma = 9$ и проделывая подсчеты, как и в доказательстве теоремы 1, получаем

$$|\varepsilon_k| > 0.5795^k \quad \text{для} \quad k \geq 871\,387\,440\,264.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Mahler, “On the fractional parts of powers of real numbers. II”, *Mathematika*, **4** (1957), 122–124.
- [2] A. Baker, J. Coates, “Fractional parts of powers of rationals”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **77** (1975), 269–279.
- [3] F. Beukers, “Fractional parts of powers of rationals”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **90:1** (1981), 13–20.
- [4] А. К. Дубицкас, “Оценка снизу величины $\|(3/2)^k\|$ ”, *УМН*, **45:4** (1990), 153–154.
- [5] F. Delmer, J.-M. Deshouillers, “The computation of $g(k)$ in Waring’s problem”, *Math. Comp.*, **54:190** (1990), 885–893.
- [6] J. Kubina, M. Wunderlich, “Extending Waring’s conjecture up to 471 600 000”, *Math. Comp.*, **55:192** (1990), 815–820.
- [7] M. A. Bennett, “Fractional parts of powers of rational numbers”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **114:2** (1993), 191–201.
- [8] M. A. Bennett, “An ideal Waring problem with restricted summands”, *Acta Arith.*, **66:2** (1994), 125–132.
- [9] L. Habsieger, “Explicit lower bounds for $\|(3/2)^k\|$ ”, *Acta Arith.*, **106:3** (2003), 299–309.
- [10] W. Zudilin, “A new lower bound for $\|(3/2)^k\|$ ”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **19:1** (2007), 311–323.
- [11] L. Schoenfeld, “Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II”, *Math. Comp.*, **30:134** (1976), 337–360.

Ю. А. Пупырев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pupyrev@mi.ras.ru

Поступило

15.09.2008

Исправленный вариант

20.02.2009