Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, А. Н. Куликов, Н. Х. Розов, Аттракторы
сингулярно возмущенных параболических систем первой
степени негрубости в плоской области, *Матем. заметки*,
2004, том 75, выпуск 5, 663–669

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:53:06

УДК 517.926

АТТРАКТОРЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ НЕГРУБОСТИ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

А. Ю. Колесов, А. Н. Куликов, Н. Х. Розов

Изучается вопрос об аттракторах краевой задачи

$$u_t = \sqrt{\varepsilon}(D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1)\Delta u + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad u_x|_{x=0, x=l_1} = u_y|_{y=0, y=l_2} = 0,$$

где $0 \leq \varepsilon \ll 1$, $u \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, Δ – оператор Лапласа, $-D_0$ – гурвицева матрица. Для такой краевой задачи при определенных предположениях установлено существование любого конечного фиксированного числа устойчивых циклов, если $\varepsilon > 0$ выбрано надлежаще малым. Иными словами, показано, что в этой краевой задаче имеет место феномен буферности.

Библиография: 8 названий.

1. В области $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ рассмотрим краевую задачу

$$u_t = \sqrt{\varepsilon}(D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1)\Delta u + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad u_x|_{x=0, x=l_1} = u_y|_{y=0, y=l_2} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $u \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ (при $N = 2$ интересующая нас и изучаемая ниже особенность не реализуется); Δ – оператор Лапласа; матрица $-D_0$ гурвицева, а D_1 – произвольна. Основное предположение, при котором будет изучаться вопрос об аттракторах этой краевой задачи, состоит в следующем: при всех $z > 0$ матрица $A_0 - zD_0$ является гурвицевой, причем при малых z она имеет простые собственные значения $\lambda(z)$, $\bar{\lambda}(z)$: $\lambda(0) = i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, которые отходят от мнимой оси с касанием первого порядка. Последнее означает, что

$$\operatorname{Re}(D_0 a, b) = 0, \quad \kappa = \operatorname{Im}(D_0 a, b) \neq 0, \quad \operatorname{Re}(D_0 a_1, b) > 0, \quad (2)$$

где $A_0 a = i\omega_0 a$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$, $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, $(*, *)$ – евклидово скалярное произведение, а вектор a_1 , удовлетворяющий условию $(a_1, b) = 0$, – решение алгебраического уравнения

$$A_0 a_1 - i\omega_0 a_1 = D_0 a - (D_0 a, b)a. \quad (3)$$

Считаем также, что у матрицы A_0 , кроме пары $\pm i\omega_0$, все остальные собственные значения имеют отрицательные действительные части.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01286.

Перечислим ограничения, касающиеся вектор-функции $F \in C^\infty$. Будем предполагать, что, во-первых, она имеет в нуле тейлоровское разложение вида

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad (4)$$

где $F_2, F_3, \dots$ – квадратичная, кубическая и т.д. симметричные формы; во-вторых, $\operatorname{Re} d < 0$, где

$$d = 2(F_2(c_0, a), b) + 2(F_2(c_2, \bar{a}), b) + 3(F_3(a, a, \bar{a}), b), \quad (5)$$

$$c_0 = -2A_0^{-1}F_2(a, \bar{a}), \quad c_2 = [2i\omega_0 I - A_0]^{-1}F_2(a, a). \quad (6)$$

Наконец, сформулируем последнее допущение, характеризующее некоторую общность положения. Это допущение относится к области Ω : отношение l_1^2/l_2^2 иррационально.

Вопрос об автоколебаниях параболической краевой задачи, которая получается, если в задаче (1) написать ε вместо $\sqrt{\varepsilon}$, а матрицу D_1 отбросить, рассматривался в статьях [1]–[3]. Там изучался “основной случай”, когда $\operatorname{Re}(D_0 a, b) > 0$. Условия же (2) выделяют более тонкую особенность – класс краевых задач “первой степени негрубости”, что влечет соответствующую малость диффузии и наличие в краевой задаче (1) матрицы D_1 , характеризующей отход от особенности. Исследование такого типа краевых задач берет свое начало с работы [4], где указанная особенность обнаружена в одной из математических моделей экологии. В работе [4] посредством численного анализа установлено так называемое *явление буферности*, т.е. существование у краевой задачи при подходящем выборе параметров любого конечного числа однотипных аттракторов, и была поставлена проблема теоретического объяснения этого феномена.

В случае краевой задачи для уравнения из (1) “первой степени негрубости” с граничными условиями Неймана на отрезке сформулированная проблема теоретически решена в статье [5]. Точнее говоря, там доказано существование у указанной краевой задачи произвольно фиксированного числа устойчивых гармонических по времени циклов, бифурцирующих при $\varepsilon > 0$ из нулевого положения равновесия. В настоящей работе, являющейся продолжением статьи [5], устанавливается, что переход от отрезка к плоской области не приводит к принципиальным изменениям, т.е. явление буферности сохраняется.

Для удобства последующего анализа выполним в (1) замены $x/l_1 \rightarrow x$, $y/l_2 \rightarrow y$. В результате приходим к краевой задаче в квадрате $\Omega_0 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$:

$$u_t = \sqrt{\varepsilon}(D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1)Lu + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad u_x|_{x=0, x=1} = u_y|_{y=0, y=1} = 0, \quad (7)$$

где $L = a_1^2 \partial^2 / \partial x^2 + a_2^2 \partial^2 / \partial y^2$, $a_j = 1/l_j$, $j = 1, 2$. При решении проблемы аттракторов получившейся задачи воспользуемся методом квазинормальных форм Ю. С. Колесова [1]–[3]. С этой целью заметим, что при $\varepsilon = 0$ и после отбрасывания нелинейности задача (7) допускает семейство периодических решений

$$u = \eta(x, y)a \exp(i\omega_0 t) + \bar{\eta}(x, y)\bar{a} \exp(-i\omega_0 t), \quad (8)$$

где $\eta(x, y)$ – произвольная комплекснозначная функция. Поэтому при $\varepsilon > 0$, используя существование семейства (8), ее возможные автоколебательные режимы, бифурцирующие из нулевого состояния равновесия, будем искать в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, \tau, s, x, y) + \varepsilon u_1(t, \tau, s, x, y) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, \tau, s, x, y) + \dots, \quad (9)$$

где $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$, $s = \varepsilon t$, все функции периодичны по t с периодом $2\pi/\omega_0$,

$$u_0 = \eta_0(\tau, s, x, y) a \exp(i\omega_0 t) + \bar{\eta}_0(\tau, s, x, y) \bar{a} \exp(-i\omega_0 t), \quad (10)$$

а η_0 – пока произвольная (подлежащая определению) комплекснозначная амплитуда. Отметим, что в отличие от случая, рассматривавшегося в [1]–[3], здесь присутствуют два медленных временных масштаба. Причина этого – дополнительное вырождение (2).

Итак, подставим соотношения (9), (10) вместе с тейлоровским разложением (4) в краевую задачу (7) и будем последовательно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε . В итоге получим серию линейных неоднородных уравнений вида

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - A_0 u_j = g_j(t, \tau, s, x, y), \quad j \geq 1, \quad (11)$$

в которых переменные τ, s, x, y рассматриваются как параметры.

На первом шаге, т.е. после приравнивания коэффициентов при ε , для u_1 приходим к уравнению (11) при $j = 1$, в котором

$$g_1 = -\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + D_0 L u_0 + F_2(u_0, u_0). \quad (12)$$

Умножая, далее, скалярно коэффициент при $\exp(i\omega_0 t)$ в правой части равенства (12) на вектор b и приравнявая результат к нулю, для фигурирующей в (10) комплекснозначной амплитуды η_0 получаем краевую задачу

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} = i\kappa L \eta_0, \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \Big|_{y=0, y=1} = 0, \quad (13)$$

откуда, в свою очередь, η_0 определяется в виде

$$\eta_0 = \sum_{n,k=0}^{\infty} \xi_{n,k}(s) \exp(-i\kappa \omega_{n,k} \tau) e_{n,k}(x, y). \quad (14)$$

Здесь $\omega_{n,k} = \pi^2(a_1^2 n^2 + a_2^2 k^2)$, $e_{n,k}(x, y) = 2 \cos(n\pi x) \cos(k\pi y)$, а пока произвольные амплитуды $\xi_{n,k}$ таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_{n,k}^2 |\xi_{n,k}|^2$ (в этом случае $\eta_0 \in W^2_2$ по переменным x, y).

После нахождения η_0 (см. (14)) уравнение (11) при $j = 1$ становится разрешимым в классе периодических по t функций. Несложный подсчет показывает, что для u_1 получается формула

$$u_1 = -L\eta_0 a_1 \exp(i\omega_0 t) - L\bar{\eta}_0 \bar{a}_1 \exp(-i\omega_0 t) + |\eta_0|^2 c_0 + \eta_0^2 c_2 \exp(2i\omega_0 t) + \bar{\eta}_0^2 \bar{c}_2 \exp(-2i\omega_0 t) + \eta_1 a \exp(i\omega_0 t) + \bar{\eta}_1 \bar{a} \exp(-i\omega_0 t), \quad (15)$$

где a_1 – решение уравнения (3); c_0, c_2 – векторы (6); $\eta_1 = \eta_1(\tau, s, x, y)$ – произвольная комплекснозначная функция.

На втором шаге рассмотрению подлежит уравнение (11) при $j = 2$ с неоднородностью

$$g_2 = -\frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + D_0 L u_1 + D_1 L u_0 + A_1 u_0 + 2F_2(u_0, u_1) + F_3(u_0, u_0, u_0). \quad (16)$$

Из условий его разрешимости в требуемом классе функций с учетом (15), (16) выводим аналогичную (13) краевую задачу

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} = i\kappa L \eta_1 + f(\tau, s, x, y), \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial \eta_1}{\partial y} \Big|_{y=0, y=1} = 0, \quad (17)$$

где

$$f = -\frac{\partial \eta_0}{\partial s} + (A_1 a, b) \eta_0 + (D_1 a, b) L \eta_0 - (D_0 a_1, b) L^2 \eta_0 + d |\eta_0|^2 \eta_0, \quad (18)$$

комплексная постоянная d определяется формулой (5), а переменная s рассматривается как параметр.

При анализе краевой задачи (17) существенную роль играет предположение об иррациональности числа a_1^2/a_2^2 , поскольку оно исключает одновременное выполнение равенств вида

$$\omega_{n,k} = \omega_{n_1,k_1} + \omega_{n_2,k_2} - \omega_{n_3,k_3}, \quad n = n_1 \pm n_2 \pm n_3, \quad k = k_1 \pm k_2 \pm k_3$$

при произвольном выборе комбинаций знаков “+” и “–” во втором и третьем из них (тождественные резонансы, когда $(n, k) = (n_1, k_1)$, $(n_2, k_2) = (n_3, k_3)$, здесь, естественно, не рассматриваются). Таким образом, функция η_1 может быть найдена из (17) в форме формального тригонометрического ряда переменной τ в том и только в том случае, если в неоднородности (18) отсутствуют гармоники вида $\exp(-i\kappa \omega_{n,k} \tau) e_{n,k}(x, y)$, $n, k = 0, 1, \dots$. Поэтому приравняем коэффициенты при указанных гармониках к нулю. В итоге для фигурирующих в (14) амплитуд $\xi_{n,k}$ приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{n,k} = & \left[\gamma_{n,k} + d \left(\frac{9}{4} |\xi_{n,k}|^2 + 6 |\xi_{n,0}|^2 + 6 |\xi_{0,k}|^2 + 8 |\xi_{0,0}|^2 + 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} |\xi_{n,m}|^2 \right. \right. \\ & + 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |\xi_{m,k}|^2 + 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} |\xi_{m,r}|^2 \\ & \left. \left. + 4 \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{\infty} |\xi_{0,r}|^2 + 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |\xi_{m,0}|^2 \right) \right] \xi_{n,k}, \quad n, k \geq 1, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{n,0} = & \left[\gamma_{n,0} + d \left(3 |\xi_{n,0}|^2 + 8 |\xi_{0,0}|^2 + 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |\xi_{m,0}|^2 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{0,m}|^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |\xi_{m,r}|^2 + 3 \sum_{r=1}^{\infty} |\xi_{n,r}|^2 \right) \right] \xi_{n,0}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\dot{\xi}_{0,k} = \left[\gamma_{0,k} + d \left(3|\xi_{0,k}|^2 + 8|\xi_{0,0}|^2 + 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} |\xi_{0,m}|^2 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{m,0}|^2 + 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ r \neq k}}^{\infty} |\xi_{m,r}|^2 + 3 \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{m,k}|^2 \right) \right] \xi_{0,k}, \quad k \geq 1, \quad (21)$$

$$\dot{\xi}_{0,0} = \left[\gamma_{0,0} + d \left(4|\xi_{0,0}|^2 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{0,m}|^2 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{m,0}|^2 + 2 \sum_{m,r=1}^{\infty} |\xi_{m,r}|^2 \right) \right] \xi_{0,0}, \quad (22)$$

где $\gamma_{n,k} = (A_1 a, b) - \omega_{n,k}(D_1 a, b) - \omega_{n,k}^2(D_0 a_1, b)$, а точка – дифференцирование по s .

Получившаяся система позволяет разобраться с проблемой существования и устойчивости у исходной задачи (7) циклов и торов, бифургирующих из нулевого состояния равновесия. Для того чтобы сформулировать строгий результат, будем считать, что в качестве фазового пространства задачи (7) взято $\dot{W}_2^2(\Omega_0; \mathbb{R}^N)$, где $\dot{W}_2^2$ – замыкание в метрике W_2^2 линейала гладких вектор-функций, удовлетворяющих граничным условиям из (7). Что же касается системы (19)–(22), то в силу условия $\text{Re}(D_0 a_1, b) > 0$ (см. (2)) она представляет собой абстрактную параболическую систему [6] в пространстве последовательностей $\xi = \{\xi_{n,k}, \bar{\xi}_{n,k}\}$, для которых конечна норма

$$\|\xi\| = \left(|\xi_{0,0}|^2 + \sum_{n,k: n+k>0} \omega_{n,k}^2 |\xi_{n,k}|^2 \right)^{1/2}.$$

Предположим, далее, что система (19)–(22) имеет автомодельный тор вида

$$\xi_{n_j, k_j}(s) = \rho_j \exp(i\psi_j s), \quad j = 1, \dots, p, \quad \xi_{n,k} = 0 \quad \text{при } (n, k) \neq (n_j, k_j), \quad (23)$$

где $p \geq 1$, $\rho_j > 0$, $\psi_j \in \mathbb{R}$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Любому автомодельному тору системы (19)–(22) вида (23), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, в краевой задаче (7) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует p -мерный инвариантный тор той же устойчивости, задающийся равенствами

$$u = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^p [a \exp(i\varphi_j) + \bar{a} \exp(-i\varphi_j)] \rho_j e_{n_j, k_j}(x, y) + \varepsilon u_*(\varphi, x, y, \varepsilon), \quad (24)$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \omega_0 - \sqrt{\varepsilon} \omega_{n_j, k_j} + \varepsilon \psi_j + \varepsilon^{3/2} \psi_{*, j}(\varphi, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, p.$$

Здесь $\varphi = \text{colop}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, а 2π -периодические по φ функции u_* и $\psi_* = \text{colop}(\psi_{*,1}, \dots, \psi_{*,p})$ ограничены равномерно по ε , φ (вместе с любым фиксированным числом производных по φ) в метрике $\dot{W}_2^2(\Omega_0; \mathbb{R}^N)$ и $\mathbb{R}^p$ соответственно.

Подробно обоснование сформулированной теоремы мы здесь воспроизводить не будем, поскольку оно без каких-либо дополнительных трудностей реализуется по описанной в [5] схеме с привлечением развитых в [3] методов доказательства существования инвариантных торов в сингулярно возмущенных системах.

2. Итак, вопрос об аттракторах краевой задачи (7) сводится к аналогичному вопросу для ее квазинормальной формы (19)–(22). За аттракторы же последней отвечает, в свою очередь, конечномерная система, получающаяся из (19)–(22), если положить равными нулю те компоненты $\xi_{n,k}$, для которых $\tau'_{n,k} = \operatorname{Re} \gamma_{n,k} \leq 0$. Действительно, из структуры уравнений (19)–(22) и условия $\operatorname{Re} d < 0$ следует, что модули упомянутых компонент стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала две простейшие ситуации. Предположим сначала, что при некоторых фиксированных $n, k \geq 0$ выполняется условие самовозбуждения $\tau'_{n,k} > 0$. Тогда система (19)–(22) имеет, очевидно, автомодельный цикл

$$\xi_{n,k}(s) = \rho_{n,k} \exp(i\psi_{n,k}s), \quad \xi_{m,r}(s) \equiv 0 \quad \text{при } (m,r) \neq (n,k), \quad (25)$$

где $\rho_{n,k} = \sqrt{-4\tau'_{n,k}/(9\operatorname{Re} d)}$, $\psi_{n,k} = \operatorname{Im} \gamma_{n,k} + \frac{9}{4}\rho_{n,k}^2 \operatorname{Im} d$. Нетрудно выписать также и условия устойчивости данного цикла. Не останавливаясь на соответствующих вычислениях, заметим, что эти условия заведомо справедливы, если возбуждена только мода $e_{n,k}(x,y)$, т.е. $\tau'_{m,r} < 0$ при $(m,r) \neq (n,k)$.

Предположим теперь, что, к примеру, $\tau'_{1,2} > 0$, $\tau'_{2,1} > 0$, а все остальные моды не возбуждены. Тогда за аттракторы квазинормальной формы отвечает система

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{1,2} &= \left[\gamma_{1,2} + d \left(\frac{9}{4} |\xi_{1,2}|^2 + 2 |\xi_{2,1}|^2 \right) \right] \xi_{1,2}, \\ \dot{\xi}_{2,1} &= \left[\gamma_{2,1} + d \left(2 |\xi_{1,2}|^2 + \frac{9}{4} |\xi_{2,1}|^2 \right) \right] \xi_{2,1}, \end{aligned}$$

которая при подходящем выборе параметров может иметь устойчивый двумерный автомодельный тор. А отсюда и из сформулированной выше теоремы следует, что устойчивый двумерный тор вида (24) имеет в этом случае и исходная задача (7).

В заключение покажем, что при условиях

$$\operatorname{Re}(A_1 a, b) > 0, \quad D_0 = \nu D_{0,0}, \quad D_1 = \nu D_{1,0}, \quad \operatorname{Re}(D_{1,0} a, b) \geq 0, \quad \nu > 0, \quad (26)$$

и при уменьшении параметра ν в рамках краевой задачи (7) реализуется феномен буферности. С этой целью рассмотрим сразу предельный случай $\nu = 0$, т.е. в системе (19)–(22) положим $\gamma_{n,k} = (A_1 a, b)$, $n, k \geq 0$. Нетрудно заметить, что при выполнении первого из условий (26) получившаяся система имеет счетное число устойчивых автомодельных циклов (25) с номерами $(n, 0)$, $n \geq 1$; $(0, k)$, $k \geq 1$ и $(0, 0)$. Это означает, что при условиях (26) и при подходящем уменьшении параметров ε и ν исходная краевая задача (7) имеет любое наперед заданное конечное число устойчивых циклов, зависящих только от одной пространственной переменной.

Полученный результат на первый взгляд весьма парадоксален: при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии, т.е. при углублении степени сингулярности, происходит, казалось бы, упрощение динамики. Но это упрощение носит временный характер, так как уже при

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad \nu_0 = \operatorname{const} > 0 \quad (27)$$

и при условиях (26) описанный выше метод квазинормализации приводит к краевой задаче

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial s} = i\nu_0 \kappa_0 L \eta_0 + (A_1 a, b) \eta_0 + d |\eta_0|^2 \eta_0, \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \Big|_{y=0, y=1} = 0, \quad (28)$$

где $\kappa_0 = \text{Im}(D_{0,0} a, b)$, динамика которой достаточно сложна.

Действительно, в данном случае, во-первых, сохраняется стандартное утверждение о соответствии (см. [1]–[3]): каждому экспоненциально орбитально устойчивому циклу

$$\eta_0 = \eta_0^*(x, y) \exp(i\alpha_0 s), \quad \alpha_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

краевой задачи (28) в исходной задаче (7) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при условиях (26), (27) отвечает устойчивый цикл с асимптотикой (9), (10), (29); во-вторых, сама квазинормальная форма (28) имеет счетные наборы циклов вида (29), зависящих только от одной пространственной переменной x или y , причем при $\nu_0 \gg 1$ можно гарантировать устойчивость любого конечного их числа (см. [7]). В случае же $\nu_0 \rightarrow 0$ указанные циклы, вообще говоря, теряют устойчивость и происходит усложнение динамики (что косвенным образом следует из проделанного в [8] численного анализа).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колесов Ю. С. Динамика биологических популяций // Межвуз. сб.: Горьковский ун-т, 1984. С. 28–34.
- [2] Колесов Ю. С. Об одной бифуркационной теореме в теории автоколебаний распределенных систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1709–1713.
- [3] Колесов Ю. С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
- [4] Захаров А. А., Колесов Ю. С. // Нелинейные колебания и экология. Ярославль: ЯрГУ, 1984. С. 3–15.
- [5] Колесов А. Ю. Бифуркация периодических решений сингулярно возмущенных параболических систем первой степени негрубости // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42. № 8. С. 1037–1042.
- [6] Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 297–350.
- [7] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Особенности динамики уравнения Гинзбурга–Ландау в плоской области // ТМФ. 2000. Т. 125. № 2. С. 205–220.
- [8] Колесов Ю. С., Харьков А. Е. Аттракторы сингулярно возмущенных систем типа реакция-диффузия с крайней точкой поворота в плоской области // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 2. С. 173–175.

(А. Ю. Колесов, А. Н. Куликов) Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова
(Н. Х. Розов) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
25.03.2002
Исправленный вариант
09.07.2003