Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, Т. В. Белоглазова, К. П. Лазарев, Об одном классе разнорядковых обыкновенных дифференциальных уравнений на графе, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 469–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 07:49:55

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАЗНОПОРЯДКОВЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ

Ю. В. Покорный, Т. В. Белоглазова, К. П. Лазарев

Задачи Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка на геометрических графах достаточно хорошо изучены (см., например, [1]–[5], где получены аналоги теорем Штурма, изучена неосцилляция и спектральная задача). Такие задачи возникают при описании упругих колебаний системы, образованной из скрепленных между собой струн. Для систем из стержней, описываемых уравнениями четвертого порядка на произвольных графах, получены более скромные результаты [6]. В частных случаях осцилляционность спектра задач для цепочки стержней установлена в [7]–[10], а для цепочки стержней и струн в [8]. В данной работе рассматривается модельная задача для системы из стержней и струн с циклом.

1. Плоская упругая система образована треугольником, составленным из шарнирно-сочлененных стержней, растянутого за вершины тремя конечными струнами. Обозначая всю геометрическую конфигурацию через Γ и точки Γ через x , рассмотрим множество непрерывных на Γ скалярнозначных функций $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Среди них мы будем искать одномерные поперечные отклонения исходной физической системы.

Будем считать заданными на Γ непрерывную функцию $f(x)$ и достаточно гладкие внутри ребер функции $p(x)$ и $q(x)$, причем внутри ребер треугольника $p(x) > 0$, $q(x) = 0$, а на остальных ребрах $p(x) = 0$, $q(x) > 0$. Тогда на ребрах треугольника отклонение стержней определяется уравнением $(pu'')' = f$, а на остальных ребрах отклонение струн – уравнением $-(qu')' = f$. Это можно записать в виде

$$(pu'')' - (qu')' = f. \quad (1)$$

Вершины фигуры Γ , отличные от вершин треугольников, естественно считать границей Γ и обозначать через $\partial\Gamma$. Здесь имеет место условие Дирихле

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Пусть a – какая-либо из вершин треугольника. Если γ – какое-либо из ребер, примыкающее к a (их множество обозначается через $\Gamma(a)$) и u_γ – сужение на γ функции $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, то *крайними для a значениями функции u_γ и ее производных* мы называем предельные значения $u(x)$, $u'(x)$, ... в точке $a+0$ при параметризации γ “от a ”, т.е. внутрь ребра γ . Задание уравнения (1) ввиду четности порядка не зависит от ориентации ребер Γ . Точно также не требует ориентации и условие непрерывности u . Однако без подобных ориентаций не может обойтись важнейшее физическое условие баланса напряжений

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(a)} [(p_\gamma u_\gamma'')' - q_\gamma u_\gamma'](a+0) = 0, \quad u_{\gamma_1}''(a+0) = u_{\gamma_2}''(a+0) = 0, \quad (3)$$

где γ_1, γ_2 – примыкающие к a стороны треугольника. Будем условия (3) относить к решениям исходной задачи вместе с условиями непрерывности, оставляя роль краевых условий равенствам (2).

Нас будут интересовать свойства решений задачи (1)–(3), связанные не только с ее разрешимостью, но и со знаками решений, знаком функции Грина и некоторыми свойствами соответствующей спектральной задачи.

2. Мы называем задачу (1)–(3) *невыврожденной*, если она однозначно разрешима при любых $f \in C(\Gamma)$. Невыврожденность эквивалентна следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. *Соответствующая однородная задача (1)–(3) имеет только тривиальное на Γ решение $u \equiv 0$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00418, № 01-01-00417, № 02-01-00307, Минобразования РФ (КЦ СПбГУ), грант № Е00-1.0-154, и программы “Университеты России”, грант № УР.04.01.047.

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество решений однородной задачи (1), (3) (без условий на $\partial\Gamma$) трезмерно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует единственная непрерывная на $\Gamma \times \Gamma$ функция $G(x, s)$ такая, что решение системы (1)–(3) выражается формулой

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, s) f(s) ds$$

($G(x, s)$ – функция Грина задачи (1)–(3)).

ТЕОРЕМА 2. Функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) неотрицательна на $(\Gamma \times \Gamma)$.

3. Обозначим через Lu оператор, действующий на функциях $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (2), (3), по правилу $Lu \equiv (pu'')'' - (qu')'$. Тогда задачу (1)–(3) можно записать в виде

$$Lu = f,$$

и нас интересует спектральная задача

$$Lu = \lambda tu, \quad t > 0. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 3. Весь спектр задачи (4) вещественен и наименьшее по модулю собственное значение строго положительное и простое (т.е. имеет единственную, причем одномерную, корневую цепочку).

4. Рассмотрим теперь нелинейную спектральную задачу

$$Lu = \lambda f(u). \quad (5)$$

Пусть $f(0) = 0$ и $f(u)$ вогнута по u , в том смысле, что $f(\lambda u) > \lambda f(u)$ при $(0 < \lambda < 1)$ (см. [11]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(u)$ строго возрастает по u . Тогда существует интервал (λ_0, λ_1) такой, что для любого $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ существует единственная собственная функция $u_\lambda(x)$ задачи (5), причем u_λ строго возрастает по λ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пенкин О. М., Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н. // Краевые задачи. Пермь, 1983. С. 64–70.
2. Пенкин О. М., Покорный Ю. В. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 4. С. 701–703.
3. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 6. С. 1306–1308.
4. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1141–1190.
5. Покорный Ю. В. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 661–671.
6. Боровских А. В., Мустафокулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В. // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 6. С. 730–732.
7. Покорный Ю. В., Лазарев К. П. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 658–670.
8. Лазарев К. П. О спектре некоторых негладких многоточечных задач. Дисс. ... к.ф.-м.н. Воронеж: ВГУ, 1988.
9. Покорный Ю. В., Мустафокулов Р. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1358–1365.
10. Покорный Ю. В., Мустафокулов Р. // Изв. вузов. Матем. 1999. Т. 44. № 2. С. 75–82.
11. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.