Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Протасов, Разбиения групп на большие подмножества, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 471–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:55:41

РАЗБИЕНИЯ ГРУПП НА БОЛЬШИЕ ПОДМНОЖЕСТВА

И. В. Протасов

Подмножество A группы G называется *большим*, если найдется такое конечное подмножество F , что $G = FA = AF$. В статье [1] А. Белла и В. И. Малыхин поставили следующий вопрос.

Можно ли любую бесконечную группу разбить на два больших подмножества?

Цель заметки – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Любую бесконечную группу можно разбить на счетное число больших подмножеств.*

Схема доказательства такова. Вначале строится разбиение группы на счетное число больших подмножеств при условии, что на группе можно указать некоторое счетное семейство разбиений на конечные подмножества. Затем доказывается, что каждая бесконечная группа допускает такое семейство разбиений.

Семейство $\{\mathfrak{R}_n, n \in \omega\}$ разбиений группы G на конечные подмножества назовем *правильным*, если для любого $n \in \omega$ выполнены следующие условия:

- 1) все подмножества разбиения $\mathfrak{R}_n$ имеют равное число элементов;
- 2) разбиение $\mathfrak{R}_{n+1}$ является укрупнением разбиения $\mathfrak{R}_n$, т.е. каждое подмножество разбиения $\mathfrak{R}_{n+1}$ является объединением ≥ 2 подмножеств разбиения $\mathfrak{R}_n$;
- 3) найдется такое конечное подмножество F_n , что $A \subseteq F_n x$ для всех $A \in \mathfrak{R}_n, x \in A$.

ЛЕММА 1. *Если группа G допускает правильное семейство разбиений $\{\mathfrak{R}_n, n \in \omega\}$, то G можно разбить на счетное число больших подмножеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что подмножества разбиения $\mathfrak{R}_0$ неодноразмерны. Положим $L_0 = \{A^{-1} : A \in L_0\}$ и рассмотрим пару разбиений $\mathfrak{R}_0, L_0$. По теореме об общей трансверсали [2, теорема 7.4.4] найдется такое подмножество $B \subset G$, что $|A \cap B_0| = |A^{-1} \cap B_0| = 1$ для всех подмножеств $A \in \mathfrak{R}_0$. По условию 3) $F_0 B_0 = G, B_0 F_0^{-1} = G$. Следовательно, $(F_0 \cup F_0^{-1}) B_0 = B_0 (F_0 \cup F_0^{-1})$ и подмножество B_0 большое. Положим $\mathfrak{R}'_1 = \{A \setminus B_0 : A \in \mathfrak{R}_1\}, L'_1 = \{R^{-1} : R \in \mathfrak{R}_1\}$. По условиям 1), 2) все подмножества разбиений $\mathfrak{R}'_1$ и L'_1 множества $G \setminus B_0$ непустые и содержат одинаковое число элементов. Применим теорему об общей трансверсали к разбиениям $\mathfrak{R}'_1, L'_1$ и выберем подмножество $B_1 \subset G \setminus B_0$ такое, что $|A \cap B_1| = |A^{-1} \cap B_1| = 1$ для всех $A \in \mathfrak{R}'_1$. По условию 3) $F_1 B_1 = B_1 F_1^{-1} = G$. Положим $\mathfrak{R}'_2 = \{A \setminus (B_0 \cup B_1) : A \in \mathfrak{R}_2\}, L'_2 = \{R^{-1} : R \in \mathfrak{R}_2\}$ и построим соответствующую трансверсаль B_2 . Условия 1), 2) гарантируют возможность продолжить этот процесс счетное число шагов, а условие 3) показывает, что все подмножества построенного дизъюнктного семейства $\{B_n, n \in \omega\}$ большие. Присоединим к одному из этих подмножеств $G \setminus \bigcup_{n \in \omega} B_n$; получим искомое разбиение группы.

ЛЕММА 2. *Если в группе G существует возрастающая цепь $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$ конечных подгрупп, то G допускает правильное семейство разбиений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять в качестве $\mathfrak{R}_n$ разбиение группы G на правые смежные классы по подгруппе H_n и положить $F_n = H_n$.

Для построения правильного семейства разбиений на группе, содержащей бесконечную конечно порожденную подгруппу, нам понадобится специальная нумерация множества вершин графа.

Пусть $Gr = (V, E)$ – связный граф с множеством вершин V и множеством ребер $E, E \subseteq V \times V, E^{-1} = E, E^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in E\}$. Для произвольных вершин $x, y \in V$ определим число $d(x, y)$ как длину кратчайшего пути между x и y . Положим также $B(x, m) = \{y \in d(x, y) \leq m\}, x \in V, m \in \omega$.

ЛЕММА 3. *Пусть $Gr = (V, E)$ – конечный связный граф, $|V| = n, x, y \in V, x \neq y$ и $(x, y) \in E$. Тогда существует биекция $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow V$ такая, что $f(1) = x, f(n) = y$ и $d(f(i), f(i+1)) \leq 3$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя граф Gr его остовом, можно считать, что граф Gr является деревом. Применим индукцию по числу n . Для $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что $n > 2$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. $|B(x, 1)| = 2$, т.е. $B(x, 1) = \{x, y\}$. Удаляя вершину x и ребро (x, y) , получим дерево $Gr' = (V', E')$, где $V' = V \setminus \{x\}$, $E' = E \setminus \{(x, y)\}$. Так как $|V| \geq 2$, существует такая вершина $z \in V'$, что $(y, z) \in E'$. По предположению индукции существует биекция $f': \{2, 3, \dots, n\} \rightarrow V'$ такая, что $f'(z) = 2$, $f'(y) = n$ и $d(f'(i), f'(i+1)) \leq 3$ для всех $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Определим биекцию $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow V$ по правилу $f(1) = x$ и $f(i) = f'(i)$ для всех $i \in \{2, 3, \dots, n\}$. Так как $d(x, z) = 2$, то f – искомая нумерация.

Случай 2. $|B(x, 1)| > 2$. Если $|B(y, 1)| = 2$, то заменой пары x, y на y, x возвращаемся к первому случаю. Таким образом, $|B(x, 1)| > 2$ и $|B(y, 1)| > 2$. Удаляя ребро (x, y) , получим два дерева $Gr_1 = (V_1, E_1)$ и $Gr_2 = (V_2, E_2)$, $x \in V_1, y \in V_2$. Пусть $|V_1| = k, k < n$.

Выберем произвольную вершину $x' \in V_1$, смежную с вершиной x . По предположению индукции существует биекция $f_1: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow V_1$ такая, что $f_1(1) = x, f_1(k) = x'$ и $d(f_1(i), f_1(i+1)) \leq 3$ для всех $i \in \{2, 3, \dots, k-1\}$.

Выберем произвольную вершину $y' \in V_2$, смежную с вершиной y . По предположению индукции существует биекция $f_2: \{k+1, k+2, \dots, n\} \rightarrow V_2$ такая, что $f_2(k+1) = y', f_2(n) = y$ и $d(f_2(i), f_2(i+1)) \leq 3$ для всех $i \in \{k+1, k+2, \dots, n-1\}$.

Наконец, определим биекцию $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow V$ по правилу $f(i) = f_1(i), i \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $f(i) = f_2(i), i \in \{k+1, k+2, \dots, n\}$. Так как расстояние между x' и y' в графе Gr равно 3, то f – искомая биекция.

Бесконечное дерево $Tr = (V, E)$ назовем *одностовольным*, если найдется такое счетное подмножество вершин $V' = \{v_n : n \in \omega\}$, что $(v_n, v_{n+1}) \in E, n \in \omega$ и после стирания ребер $E' = \{(v_n, v_{n+1}) : n \in \omega\}$ дерево Tr распадается на конечные деревья. Подграф (V', E') называется *стволом* дерева Tr .

ЛЕММА 4. Пусть $Tr = (V, E)$ – одностовольное дерево. Тогда существует биекция $f: \{1, 2, \dots\} \rightarrow V$ такая, что $d(f(i), f(i+1)) \leq 3$ для всех $i \in \{1, 2, \dots\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (V', E') – ствол дерева $Tr, V' = \{v_n : n \in \omega\}, E' = \{(v_n, v_{n+1}) : n \in \omega\}$. Тогда граф $(V, E \setminus E')$ является дизъюнктивным объединением конечных деревьев $Tr_n = (V_n, E_n), v_n \in V_n$. Если $|V_n| = 1$, положим $v'_n = v_n$. Иначе, выберем любую вершину $v'_n \in V_n$, смежную в графе Tr_n с вершиной v_n . Обозначим $k_n = |V_n|, n \in \omega$. По лемме 3 существуют биекции

$$\begin{aligned} f_0: \{1, 2, \dots, k_0\} &\rightarrow V_0, & f_0(v'_0) &= 1, & f_0(v_0) &= k_0, \\ f_1: \{k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, k_0 + k_1\} &\rightarrow V_1, & f_1(v'_1) &= k_0 + 1, & f_1(v_1) &= k_0 + k_1, \\ f_2: \{k_0 + k_1 + 1, k_0 + k_1 + 2, \dots, k_0 + k_1 + k_2\} &\rightarrow V_2, \\ f_2(v'_2) &= k_0 + k_1 + 1, & f_2(v_2) &= k_0 + k_1 + k_2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

удовлетворяющие условию $d(f_n(i), f_n(i+1)) \leq 3$ для всех $n \in \omega, i \in \{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-1} + 1, \dots, k_0 + k_1 + \dots + k_n\}$.

Определим биекцию $f: \{1, 2, \dots\} \rightarrow V$, полагая $f(i) = f_n(i)$ тогда и только тогда, когда i попадает в область определения функции f_n . Поскольку расстояние в графе Tr между вершинами v_n и v'_{n+1} не превосходит 2, f – искомая нумерация.

ЛЕММА 5. Если группа G содержит бесконечную конечно порожденную подгруппу H , то G допускает правильное семейство разбиений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – конечная система образующих группы $H, S = S^{-1}$. Рассмотрим граф Кэли Сау группы H . Вершинами графа Сау являются элементы группы H , а вершины x, y соединены ребром (x, y) тогда и только тогда, когда $x^{-1}y \in S$. Заметим, что граф Сау связан и выделим его остов $(G, E) = Tr$. Пользуясь леммой Кенига о существовании бесконечной цепи в любом бесконечном локально конечном дереве, множество G вершин дерева Tr можно разбить на

счетные подмножества так, что для любого подмножества A разбиения граф $Gr(A) = (A, E(A))$, $E(A) = E \cap (A \times A)$, является одноствольным деревом. По лемме 4 существует биекция $f_A: \{1, 2, \dots\} \rightarrow A$ такая, что $d(f_A(i), f_A(i+1)) \leq 3$ для всех $i \in \omega$. Определим счетное семейство разбиений $\{\mathfrak{R}'_n(A), n \in \omega\}$ подмножества A , полагая

$$\mathfrak{R}'_n(A) = \{f_A(\{1, 2, \dots, 2^n\}), f_A(\{2^n + 1, 2^n + 2, \dots, 2^{n+1}\}), \dots\}.$$

Положим $m = 3 \cdot 2^n$ и заметим, что

$$f_A(R) \subseteq S^m f_A(i) \quad (*)$$

для любого подмножества R из разбиения $\mathfrak{R}'_n(A)$ и любого элемента $f_A(i) \in R$.

Объединяя разбиения $\mathfrak{R}'_n(A)$ по всем подмножествам A разбиения графа Tr на одноствольные деревья, получим некоторое разбиение $\mathfrak{R}'_n$ подгруппы H . Выберем некоторое множество X представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H . Положим $\mathfrak{R}_n = \{Rx : R \in \mathfrak{R}'_n, x \in X\}$. Очевидно, что семейство разбиений $\{\mathfrak{R}_n, n \in \omega\}$ удовлетворяет условиям 1), 2) определения правильного семейства разбиений, а условие 3) следует из соотношения (*).

Доказательство теоремы следует непосредственно из лемм 1, 2, 5.

Можно ли произвольную бесконечную группу мощности k разбить на K больших подмножеств? Ответ отрицательный и очевидное препятствие – аменабельность. В аменабельной группе каждое большое подмножество имеет положительную банахову меру, а поэтому любое дизъюнктное семейство больших подмножеств не более чем счетно. В статье [1] поставлен следующий вопрос.

Существует ли группа, которую можно разбить на несчетное число больших подмножеств?

Ответ на этот вопрос утвердительный. Покажем, что свободную группу ранга k можно разбить на k больших подмножеств.

Пусть $F(X)$ – свободная группа в алфавите X , $|X| = k$. Вначале укажем разбиение $F(X)$ на k подмножеств больших слева. При этом подмножество A группы G называется *большим слева (справа)*, если найдется такое конечное подмножество F , что $G = FA$ ($G = AF$). Для каждого элемента $x \in X$ обозначим через $S(x)$ множество всех групповых слов, которые начинаются с x либо x^{-1} . Очевидно, что $F(X) = xS(x) \cup S(x)$ и $\{S(x) : x \in X\}$ – дизъюнктное семейство больших слева подмножеств группы $F(X)$. Далее, возьмем произвольную собственную инвариантную подгруппу H группы G конечного индекса. Так как H свободна, по доказанному имеется дизъюнктная система L мощности k больших слева в H подмножеств. Выберем произвольный элемент $g \in G \setminus H$. Тогда $\{A \cup gA^{-1} : A \in L\}$ – дизъюнктная система больших подмножеств группы $F(X)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bella A., Malykhin V. I. // Questions Answers Gen. Topology. 1999. V. 11. P. 183–187. 2. Орз О. Теория графов. М.: Наука, 1980.