Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 478–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:03:10

ДЕФОРМАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДИСКРЕТНОЙ СЕРИИ ЭРМИТОВО СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ В КЛАССЕ ЧИСТЫХ ПСЕВДОПРЕДСТАВЛЕНИЙ

А. И. Штерн

1. Формулировка основного результата. Напомним, что простая группа Ли называется *эрмитово симметрической*, если центр ее универсальной накрывающей группы бесконечен (см. [1]). Кроме того, напомним, что для данного $\varepsilon \geq 0$ отображение $\pi: G \rightarrow L(H)$ группы G в пространство линейных операторов в гильбертовом пространстве H называется *унитарным (ε -)псевдопредставлением* группы G в пространстве H , если оператор $\pi(g)$ унитарен для любого $g \in G$ и $\|\pi(gh) - \pi(g)\pi(h)\| \leq \varepsilon$ для любых $g, h \in G$ [2]. Псевдопредставление π называется *чистым*, если ограничение π на любую аменабельную подгруппу H группы G является обычным унитарным представлением группы H . Это условие является весьма ограничительным, так как псевдопредставление может не удовлетворять этому условию даже на подгруппах, порожденных одним элементом (см. [3]).

Оказывается, неприводимые унитарные представления простых эрмитово симметрических групп Ли (в том числе описанные в [4] неприводимые унитарные представления дискретной серии для таких групп Ли, которые не могут быть непрерывно деформированы в классе унитарных представлений), могут быть непрерывно деформированы в классе чистых унитарных псевдопредставлений. А именно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть G – простая эрмитово симметрическая группа Ли. Для любого (сильно непрерывного) неприводимого унитарного представления σ группы G в некотором гильбертовом пространстве H существует (сильно непрерывное по параметру) однопараметрическое семейство $t \mapsto \pi_t^\sigma$, $t \in \mathbb{R}$, попарно неэквивалентных чистых неприводимых унитарных ε_t -псевдопредставлений группы G в том же пространстве H , удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) $\varepsilon_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$;
- 2) норма $\|\pi_t^\sigma(g) - \sigma(g)\|$ стремится к нулю при $t \rightarrow 0$ для любого $g \in G$.

В настоящей заметке выписаны явные формулы, относящиеся к модельному случаю $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ или, что эквивалентно, к случаю изоморфной группы $\mathrm{SU}(1, 1)$. Полное доказательство теоремы будет приведено в одной из следующих публикаций.

2. Деформация неприводимых унитарных представлений группы $\mathrm{SU}(1, 1)$. Примем обозначения, использованные в [5]. Пусть $\tilde{G}$ – универсальная накрывающая группа группы $\mathrm{SU}(1, 1)$. Мы воспользуемся ее стандартной параметризацией: $\tilde{G} = \{(\gamma, \omega) \mid \gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| < 1, \omega \in \mathbb{R}\}$; групповая операция имеет вид $(\gamma, \omega)(\gamma', \omega') = (\gamma'', \omega'')$, $(\gamma, \omega), (\gamma', \omega'), (\gamma'', \omega'') \in \tilde{G}$, где

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (\gamma + \gamma' \exp(-2i\omega'))(1 + \bar{\gamma}\gamma' \exp(-2i\omega))^{-1}, \\ \omega'' &= \omega + \omega' + \frac{1}{2i} \ln \{ (1 + \bar{\gamma}\gamma' \exp(-2i\omega))(1 + \gamma\bar{\gamma}' \exp(2i\omega))^{-1} \}. \end{aligned}$$

Здесь $\ln$ понимается в смысле главного значения.

Пусть T – одномерный тор. Определим действие группы $\tilde{G}$ на T формулой

$$\exp(i\theta) \cdot g = \exp(2i\omega) \left(\frac{\exp(i\theta) + \gamma}{\exp(i\theta)\bar{\gamma} + 1} \right).$$

Напомним определение представлений основной серии группы $\tilde{G}$ [5, (2.2.9)]. Для любых $\rho \in \mathbb{R}$ и $h \in (-1/2, 1/2]$ формула

$$\begin{aligned} & [U_h(g, \rho)f](\exp(i\theta)) \\ &= \exp(-2i\omega h) \left(\frac{1 + \exp(i\theta)\bar{\gamma}}{1 + \exp(-i\theta)\gamma} \right)^h |\exp(i\theta)\bar{\beta} + \bar{\alpha}|^{-1-2i\rho} f(\exp(i\theta) \cdot g), \\ & f \in H = L^2(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \exp i\omega(1 - |\gamma|^2) - \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \exp i\omega\gamma(1 - |\gamma|^2) - \frac{1}{2}$$

являются матричными элементами образа g_0 элемента $g \in \tilde{G}$ в $SU(1, 1)$, а именно:

$$g_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

определяет неприводимое (за исключением случая $\rho = 0$ и $h = 1/2$) унитарное представление группы $\tilde{G}$ в гильбертовом пространстве H .

Для построения искомой деформации неприводимых унитарных представлений основной серии группы $SU(1, 1)$ мы используем нетривиальный псевдохарактер χ на группе $\tilde{G}$ [6], определенный формулой

$$\chi((\gamma, \omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \omega_n, \quad \text{где } (\gamma, \omega)^n = (\gamma_n, \omega_n) \in \tilde{G} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Явное выражение для псевдохарактера χ вычислено в [7]. В частности, там показано, что функция χ удовлетворяет условиям

$$|\chi((\gamma, \omega)(\gamma', \omega')) - \chi((\gamma, \omega)) - \chi((\gamma', \omega'))| < \frac{\pi}{2}$$

для любых $(\gamma, \omega), (\gamma', \omega') \in \tilde{G}$, причем ограничение функции χ на любую аменабельную подгруппу в $\tilde{G}$ является непрерывным гомоморфизмом этой подгруппы в группу $\mathbb{R}$. По этой причине формула $\psi_t(g) = \exp(it\chi(g))$, $g \in \tilde{G}$, определяет функцию $\psi_t: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{T}$, удовлетворяющую условию

$$|\psi_t(gg') - \psi_t(g)\psi_t(g')| \leq \sup_{|\phi| < \pi/2} |\exp(it\phi) - 1|, \quad g, g' \in \tilde{G}.$$

При $|t| < 2$ это приводит к неравенству

$$|\psi_t(gg') - \psi_t(g)\psi_t(g')| < \left| \exp\left(\frac{it\pi}{2}\right) - 1 \right|, \quad g, g' \in \tilde{G}.$$

Отсюда следует, что при данном $\rho \in \mathbb{R}$ формула

$$\pi_h^\rho(g) = \psi_{2h}(g)U_h(g, \rho), \quad g \in \tilde{G}, \quad (1)$$

определяет чистое псевдопредставление группы $\tilde{G}$ унитарными операторами в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ для любого $h \in \mathbb{R}$. Неприводимость семейства $\pi_h^\rho(g)$, $g \in \tilde{G}$, следует из неприводимости представлений основной серии [5]. Центр Z группы $\tilde{G}$ образован элементами вида $(0, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, и согласно (1) они переходят в единичный оператор: $\pi_h^\rho((0, n\pi)) = 1_{L^2(\mathbb{T})}$. Для любого $g \in \tilde{G}$ подгруппа A_g , порожденная g и Z , аменабельна. Поэтому ограничение чистого псевдопредставления π_h^ρ на эту подгруппу есть обычное унитарное представление группы A_g . Следовательно, $\pi_h^\rho(g(0, n\pi)) = \pi_h^\rho(g)$ для любого $g \in \tilde{G}$. Таким образом, π_h^ρ постоянна на смежных классах по центру, и потому определяет чистое псевдопредставление факторгруппы группы $\tilde{G}$ по ее центру и, в частности, чистое псевдопредставление группы $SU(1, 1)$. Ограничение каждого из построенных

чистых псевдопредставлений группы $SU(1, 1)$ на максимальную компактную подгруппу диагональных матриц $K \subset SU(1, 1)$ содержит ненулевой K -инвариантный вектор, и соответствующие матричные элементы различны при различных $h \in \mathbb{R}$; следовательно, чистые псевдопредставления π_h^ρ попарно неэквивалентны. Утверждения 1) и 2) теоремы проверяются непосредственно, и, тем самым, формула $h \mapsto \pi_h^\rho$, $h \in \mathbb{R}$, определяет искомую деформацию представлений основной серии π^ρ , отвечающих $h = 0$.

Деформация неприводимых унитарных представлений второй части основной серии (отвечающих значению $h = 1/2$) строится совершенно аналогичным образом. Кроме того, тем же приемом получается деформация представлений дополнительной серии. Наконец, аналогичные формулы $\pi_t^{\pm, h}(g) = \psi_t(g)U^\pm(g, h)$, $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $\pm h > 0$, $g \in \tilde{G}$, определяют деформацию представлений дискретной серии группы $SU(1, 1)$, отвечающих знаку $\pm$ и полужелому числу $\pm\nu$, если $t = h \mp \nu \in \mathbb{R}$, а ν – положительное полуцелое число.

Автор благодарен А. С. Мищенко за внимание к работе и рецензенту за замечания, позволившие улучшить изложение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
2. Штерн А. И. // Функцион. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 70–73.
3. Shtern A. I. // Russian J. Math. Physics. 1994. V. 2. № 3. P. 353–382.
4. Schmid W. // Invent. Math. 1975. V. 30. № 1. P. 47–144.
5. Sally P. J., Jr. Analytic Continuation of the Irreducible Unitary Representations of the Universal Covering Group of $SL(2, \mathbb{R})$. Mem. Amer. Math. Soc. V. 69. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1967.
6. Shtern A. I. // Russian J. Math. Physics. 2001. V. 8. № 1. P. 115–126.
7. Shtern A. I. // Ann. Global Anal. Geom. 2001. V. 20. № 3. P. 199–221.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступило
04.04.2001
Исправленный вариант
27.08.2002