Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, О квазиклассических теориях поля, симметричных относительно группы Ли, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 474–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:23:33

О КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ, СИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ЛИ

О. Ю. Шведов

1. Асимптотические решения эволюционных уравнений, зависящих от малого параметра, во многих случаях выражаются [1] в каждый момент времени через элемент X некоторого гладкого многообразия $\mathcal{X}$ (“расширенного фазового пространства”) и элемента $f \in \mathcal{F}_X$ некоторого предгильбертова пространства $\mathcal{F}_X$, зависящего, вообще говоря, от X . Например, приближенные решения уравнения

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\left(x, -i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

построенные с помощью теории комплексного роста Маслова [2] в точке, выражаются через зависящие от t функции $S^t \in \mathbb{R}$, $P^t, Q^t \in \mathbb{R}^n$ и зависящую от $t \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ функцию $f^t(\xi)$, $f^t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\psi^t(x) = e^{\frac{i}{\varepsilon} S^t} e^{\frac{i}{\varepsilon} P^t(x - Q^t)} f^t\left(\frac{x - Q^t}{\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (2)$$

В данном случае $\mathcal{X} = \{(S, P, Q)\} = \mathbb{R}^{2n+1}$, $\mathcal{F}_X = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку начальные данные для (S, P, Q, f) однозначно определяют (S^t, P^t, Q^t, f^t) [2], определены преобразования эволюции

$$\begin{aligned} u_t: (S^0, P^0, Q^0) \in \mathcal{X} &\mapsto (S^t, P^t, Q^t) \in \mathcal{X}, \\ U_t(u_t X \leftarrow X): f^0 \in \mathcal{F}_X &\mapsto f^t \in \mathcal{F}_{u_t X}. \end{aligned} \quad (3)$$

Общие свойства асимптотических решений абстрактных уравнений могут быть исследованы с помощью понятия абстрактного канонического оператора [3], [4]. Совокупность (X, f) рассматривается как точка на некотором (“квазиклассическом”) векторном расслоении $(\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \pi)$: гладкое многообразие $\mathcal{X}$ является базой расслоения, а пространства $\mathcal{F}_X$ – слоями. Переходя к пополнению, можно считать пространства $\mathcal{F}_X$ полными. При этом преобразование (3) является автоморфизмом расслоения.

Часто встречаются динамические системы, инвариантные не только относительно эволюции: релятивистская и калибровочная инвариантность являются основополагающими аксиомами квантовой теории поля [5]. Сформулируем соответствующие определения для квазиклассических теорий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 1. Будем говорить, что на расслоении $(\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \pi)$ действует калибровочная группа $\mathcal{L}$, если для каждого $\alpha \in \mathcal{L}$ задана совокупность $\lambda_\alpha: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $V_\alpha(\lambda_\alpha X \leftarrow X): \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda_\alpha X}$ гладкого отображения λ_α и унитарных преобразований $V_\alpha(\lambda_\alpha X \leftarrow X)$, определяющая автоморфизм расслоения $(\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \pi)$, причем

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} &= \lambda_{\alpha_1 \alpha_2}, \\ V_{\alpha_1}(\lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} X \leftarrow \lambda_{\alpha_2} X) V_{\alpha_2}(\lambda_{\alpha_2} X \leftarrow X) &= V_{\alpha_1 \alpha_2}(\lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} X \leftarrow X). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Две точки (X_1, f_1) и (X_2, f_2) пространства расслоения $\mathcal{Z}$ называются калибровочно эквивалентными, $(X_1, f_1) \sim (X_2, f_2)$, если для некоторого $\alpha \in \mathcal{L}$

$$\lambda_\alpha X_1 = X_2, \quad V_\alpha(X_2 \leftarrow X_1) f_1 = f_2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-1062 и № 02-01-06080.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что на квазиклассическом расслоении $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ с калибровочной группой $\mathcal{L}$ действует группа G , если

- 1) при всех $g \in G$ заданы отображения $u_g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, причем
 - а) отображения $(g, X) \mapsto u_g X$ гладкие;
 - б) при любых $\alpha \in \mathcal{L}$ и $g \in G$ $u_g \lambda_\alpha u_g^{-1} = \lambda_\beta$ для некоторого $\beta \in \mathcal{L}$, непрерывно зависящего от α, g ;
 - в) при любых $g_1, g_2 \in G$ $u_{g_1} u_{g_2} = \lambda_\gamma u_{g_1 g_2}$ для некоторого $\gamma \in \mathcal{L}$, непрерывно зависящего от g_1, g_2 ;
- 2) при всех $g \in G$ и $X \in \mathcal{X}$ заданы унитарные операторы $U_g(u_g X \leftarrow X): \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{u_g X}$, причем
 - а) отображение $(g, h, \alpha) \mapsto U_g(u_h \lambda_\alpha X \leftarrow u_{g^{-1}} u_h \lambda_\alpha X)$ сильно непрерывно по отношению к (g, h, α) ;
 - б) справедливы свойства

$$U_g(u_g \lambda_\alpha X \leftarrow \lambda_\alpha X) V_\alpha(\lambda_\alpha X \leftarrow X) U_{g^{-1}}(X \leftarrow u_g X) = V_\beta(u_g \lambda_\alpha X \leftarrow u_g X), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U_g(u_{g_1} u_{g_2} X \leftarrow u_{g_2} X) U_{g_2}(u_{g_2} X \leftarrow X) \\ = V_\beta(\lambda_\beta u_{g_1 g_2} X \leftarrow u_{g_1 g_2} X) U_{g_1 g_2}(u_{g_1 g_2} X \leftarrow X). \end{aligned} \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Данное определение означает, что каждому элементу $g \in G$ сопоставлен автоморфизм квазиклассического расслоения $\tilde{U}_g: (X, f) \mapsto (u_g X, U_g(u_g X \leftarrow X)f)$. При этом вместо точного равенства требуется калибровочная эквивалентность точек $\tilde{U}_{g_1 g_2}(X, f)$ и $\tilde{U}_{g_1} \tilde{U}_{g_2}(X, f)$. Требуется также, чтобы калибровочно эквивалентные состояния переходили в калибровочно эквивалентные.

2. В сообщении рассматриваются инфинитезимальные свойства квазиклассических калибровочных преобразований. Законы композиции (5), (6) не очень удобны для исследования. Для приведения их к групповому виду рассмотрим преобразования сечений расслоения $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$. Будем говорить, что сечение $\Psi = \{\Psi_Y \in \mathcal{F}_Y, Y \in \mathcal{X}\}$ калибровочно инвариантно, если

$$\Psi_{\lambda_\alpha Y} = V_\alpha(\lambda_\alpha Y \leftarrow Y) \Psi_Y. \quad (7)$$

Определим отображение $\mathcal{U}_g$ как

$$(\mathcal{U}_g \Psi)_Y = U_g(Y \leftarrow u_{g^{-1}} Y) \Psi_{u_{g^{-1}} Y}. \quad (8)$$

Свойство (5) означает, что калибровочно инвариантные сечения переходят в калибровочно инвариантные, свойство (6) означает, что $\mathcal{U}_{g_1 g_2} \Psi = \mathcal{U}_{g_1} \mathcal{U}_{g_2} \Psi$ на калибровочно инвариантных сечениях Ψ . Аналогичные соображения для операторов эволюции рассматривались в [6].

Вместо сечений расслоения $(\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \pi)$ удобнее рассматривать сечения подрасслоений $(Z_{[\bar{X}]}, [\bar{X}], \pi)$ с $[\bar{X}] = \{\lambda_\alpha u_g \bar{X} \mid g \in G, \alpha \in \mathcal{L}\}$ и $Z_{[\bar{X}]} = \pi^{-1}[\bar{X}]$.

Обозначим через $G_0(\bar{X})$ множество всех $h \in G$ таких, что $u_h \bar{X} = \lambda_\alpha \bar{X}$ для некоторого $\alpha \in \mathcal{L}$. Будем говорить, что сильно непрерывное сечение Ψ_Y подрасслоения $(Z_{[\bar{X}]}, [\bar{X}], \pi)$ принадлежит классу $C_0([\bar{X}])$, если оно калибровочно инвариантно, а множество всех правых смежных классов $\bar{g} \in G/G_0(\bar{X})$ таких, что $\Psi_{\lambda_\alpha u_{\bar{g}} \bar{X}} \neq 0$, предкомпактно на $G/G_0(\bar{X})$.

Введем в $C_0([\bar{X}])$ норму

$$\|\Psi\|_{[\bar{X}]} = \sup_{X \in [\bar{X}]} \|\Psi_X\|. \quad (9)$$

Обозначим через $C([\bar{X}])$ пополнение $C_0([\bar{X}])$ по данной норме.

Определим отображение $\mathcal{U}_g^{[\bar{X}]}$ по формуле (8).

Сопоставим каждой комплексной непрерывной ограниченной функции $\alpha_X, X \in \mathcal{X}$, на базе расслоения $\mathcal{X}$ оператор $v_{[\bar{X}]}[\alpha]: C_0([\bar{X}]) \rightarrow C_0([\bar{X}])$ вида $(v_{[\bar{X}]}[\alpha]\Psi)_{u_h \bar{X}} = \alpha_{u_h \bar{X}} \Psi_{u_h \bar{X}}$, который однозначно продолжается по непрерывности на $C([\bar{X}])$. Обозначим также $(w_g \alpha)_X = \alpha_{u_{g^{-1}} X}$. Будем называть функцию α калибровочно инвариантной, если $\alpha_{\lambda_\gamma X} = \alpha_X$ при всех $\gamma \in \mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть группа Ли G действует на квазиклассическом расслоении $(\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \pi)$ с калибровочной группой $\mathcal{L}$. Тогда оператор $\mathcal{U}_g^{[\overline{X}]}$ (8):

- переводит $C_0([\overline{X}])$ в $C_0([\overline{X}])$;
- сохраняет норму (9);
- однозначно продолжается по непрерывности на $C([\overline{X}])$;
- удовлетворяет групповому свойству

$$\mathcal{U}_{g_1}^{[\overline{X}]} \mathcal{U}_{g_2}^{[\overline{X}]} = \mathcal{U}_{g_1 g_2}^{[\overline{X}]}, \quad \mathcal{U}_e^{[\overline{X}]} = 1; \quad (10)$$

- сильно непрерывен по g при $g = e$.

Для калибровочно инвариантных функций α справедливо свойство

$$\mathcal{U}_g^{[\overline{X}]} v_{[\overline{X}]}[\alpha] \Psi = v_{[\overline{X}]}[w_g \alpha] \mathcal{U}_g^{[\overline{X}]} \Psi. \quad (11)$$

Справедлива и обратная

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \pi)$ – квазиклассическое расслоение с калибровочной группой $\mathcal{L}$ и выполнен п. 1 определения 1. Пусть также заданы операторы $\mathcal{U}_g^{[\overline{X}]}: C([\overline{X}]) \rightarrow C([\overline{X}])$, сохраняющие норму (9), сильно непрерывные по g при $g = e$, удовлетворяющие свойствам (10) и (11) для калибровочно инвариантных α . Тогда при всех $g \in G$, $X \in \mathcal{X}$ из формулы (8) однозначно определяются операторы $U_g(u_g X \leftarrow X): \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{u_g X}$. Для них выполняются свойства 2а)–2в) определения 2.

3. Задача исследования представлений групп Ли обычно сводится к изучению представлений алгебр Ли [7]. Рассмотрим инфинитезимальные свойства операторов $\mathcal{U}_g^{[\overline{X}]}$ по методу Гординга [8]. Обозначим:

$D_0([\overline{X}])$ – множество всех сечений подрасслоения $(\mathcal{Z}_{[\overline{X}]}, [\overline{X}], \pi)$ вида

$$\Psi_X = \int d_L g \gamma(g) U_g(X \leftarrow u_{g^{-1}} X) \Phi_{u_{g^{-1}} X}, \quad X \in [\overline{X}], \quad (12)$$

где $d_L g$ – левоинвариантная мера Хаара на группе G , $\gamma(g)$ – гладкая функция на G с компактным носителем, $\Phi \in C_0([\overline{X}])$;

$\mathcal{C}_0^\infty([\overline{X}])$ – множество всех гладких калибровочно инвариантных функций $\alpha_X: [\overline{X}] \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что множество классов смежности вида $\{\overline{h} \in G/G_0(\overline{X}) \mid \alpha_{u_{\overline{h}} \overline{X}} \neq 0\}$ предкомпактно;

$D([\overline{X}])$ – множество всех линейных комбинаций $v_{[\overline{X}]}[\alpha_1] \Psi_1 + \dots + v_{[\overline{X}]}[\alpha_s] \Psi_s$, $\alpha_i \in \mathcal{C}_0^\infty([\overline{X}])$, $\Psi_i \in D_0([\overline{X}])$;

$\delta[A]$ – оператор вида $(\delta[A]\alpha)_X = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \alpha_{u_{\exp A\tau} X}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть группа Ли G действует на квазиклассическом расслоении $(\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \pi)$ с калибровочной группой $\mathcal{L}$. Тогда

- $D([\overline{X}])$ плотно в $C([\overline{X}])$;
- операторы

$$\check{H}(A) = i \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \mathcal{U}_{\exp A\tau}^{[\overline{X}]}$$

определены на $D([\overline{X}])$ и $\check{H}(A): D([\overline{X}]) \rightarrow D([\overline{X}])$;

- справедливы свойства

$$\begin{aligned} \check{H}(A_1 + A_2) \Psi &= \check{H}(A_1) \Psi + \check{H}(A_2) \Psi, & \check{H}(\lambda A) \Psi &= \lambda \check{H}(A) \Psi, \\ \mathcal{U}_h^{[\overline{X}]} \check{H}(A) \mathcal{U}_{h^{-1}}^{[\overline{X}]} \Psi &= \check{H}(h A h^{-1}) \Psi, & [\check{H}(A); \check{H}(B)] \Psi &= i \check{H}([A; B]) \Psi, \\ i[\check{H}(A); v_{[\overline{X}]}[\alpha]] \Psi &= v_{[\overline{X}]}[\delta[A]\alpha] \Psi, \\ -i\delta[A](\Psi, \Psi) &= \langle \Psi, \check{H}(A) \Psi \rangle - \langle \check{H}(A) \Psi, \Psi \rangle. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Предпоследнее из свойств означает, что $\check{H}(A) = H(A; X) - i\delta[A]$, где $H(A; X)$ действует в $\mathcal{F}_X$.

4. Обратная задача интегрируемости представлений алгебр Ли нетривиальна: известные условия интегрируемости [9]–[12] не очень удобны для использования в квазиклассической теории поля.

Пусть выполнен п. 1 определения 2, а при каждом $[\bar{X}]$ заданы операторы $\check{H}(A)$ в $C([\bar{X}])$. Наложим на них следующие условия.

УСЛОВИЕ А1. Операторы $\check{H}(A)$ определены на плотной в $C([\bar{X}])$ области D .

УСЛОВИЕ А2. Для любых $\Phi, \Psi \in D$ функция $\langle \Phi, \Psi \rangle$ входит в область определения $\delta[A]$ и $-i\delta[A]\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, \check{H}(A)\Psi \rangle - \langle \check{H}(A)\Phi, \Psi \rangle$.

УСЛОВИЕ А3. Для любых $\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty([\bar{X}])$ и $\Psi \in D$

$$v_{[\bar{X}]}[\alpha]\Psi \in D \quad \text{и} \quad [\check{H}(A); v_{[\bar{X}]}[\alpha]]\Psi = -iv_{[\bar{X}]}[\delta[A]\alpha]\Psi.$$

УСЛОВИЕ А4. Для любых $\Phi, \Psi \in D$ функция $\langle \Phi, \check{H}(A)\Psi \rangle$ принадлежит области определения $\delta[B]$.

УСЛОВИЕ А5. Для любых $\Phi, \Psi \in D$ справедливо свойство

$$\langle \check{H}(A)\Psi; \check{H}(B)\Phi \rangle - i\delta[A]\langle \Psi, \check{H}(B)\Phi \rangle - \langle \check{H}(B)\Psi, \check{H}(A)\Phi \rangle + i\delta[B]\langle \Psi, \check{H}(A)\Phi \rangle = i\langle \Psi, \check{H}([A; B])\Phi \rangle.$$

УСЛОВИЕ А6. Пусть $B_1, \dots, B_n$ – базис алгебры Ли и $\Psi^0 \in D$. Тогда существует решение Ψ^t задачи Коши для уравнения

$$i \frac{d}{dt} \Psi^t = \check{H}(B_k) \Psi^t$$

сильно непрерывное по t . При этом $\check{H}(B_l)\Psi^t \rightarrow \check{H}(B_l)\Psi^0$ при $t \rightarrow 0$ в сильном смысле при всех l , а функция $\delta[A]\langle \Phi, \check{H}(B_k)\Psi_t \rangle$ непрерывна.

ТЕОРЕМА 4. При условиях А1–А6 однозначно определено действие локальной группы Ли G на расслоении $(\mathcal{X}, \mathcal{H}, \pi)$ такое, что

$$i \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} U_{g(\tau)}(X \leftarrow u_{g^{-1}(\tau)}X) \Psi_{u_{g^{-1}(\tau)}X} = (\check{H}(A)\Psi)_X,$$

$\Psi \in D$, $g(\tau) = \exp A\tau$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного роста в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М.: УРСС, 2000.
2. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
3. Шведов О. Ю. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 3. С. 437–456.
4. Шведов О. Ю. // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 10. С. 123–157.
5. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
6. Howland J. // Math. Ann. 1974. V. 207. P. 315–335.
7. Barut A., Raczka R. Theory of Group Representations and Applications. Warszawa: Pol. Sci. Publ., 1977. 8.
8. Garding L. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1947. V. 33. P. 331–332.
9. Nelson E. // Ann. Math. 1959. V. 70. P. 572–615.
10. Flato M., Simon J., Snellman H., Sternheimer D. // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1972. V. 5. P. 423–434.
11. Simon J. // Comm. Math. Phys. 1972. V. 28. P. 39–46.
12. Flato M., Simon J. // J. Funct. Anal. 1973. V. 13. P. 268–276.