Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Г. Бучаев, Оценки норм собственных функций задачи Штурма–Лиувилля в пространствах Соболева, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 625–627

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:17:26

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОЦЕНКИ НОРМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Я. Г. Бучаев

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля на конечном отрезке $[0, 1]$ с условиями Дирихле:

$$-y'' + q(x)y = \lambda \varrho(x)y, \quad (3)$$

$$y(0) = y(1). \quad (2)$$

Здесь λ – спектральный параметр, $q(x)$ и $\varrho(x)$ – вещественные измеримые функции, причем $q(x) \in L_1(0, 1)$, а $\varrho(x)$ подчинена условию

$$0 < m < \varrho(x) < M < \infty. \quad (3)$$

Известно [1], что эта задача имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем $\lambda_n \asymp n^2$, где знак $\asymp$ означает, что отношение сравниваемых величин асимптотически ограничено сверху и снизу положительными постоянными, не зависящими от n .

Предположим, что собственные функции $y_n(x)$ задачи (в силу вещественности функции $q(x)$ и положительности $\varrho(x)$ присоединенные функции отсутствуют) нормированы в пространстве $L_q((0, 1); \varrho(x))$, $q \geq 1$:

$$\int_0^1 \varrho(x) |y_n(x)|^q dx = 1. \quad (4)$$

Конечно, в силу условия $\varrho(x) \asymp 1$ имеем $\|y_n(x)\|_{0,q} \asymp 1$, где $\|\cdot\|_{0,q}$ – норма в обычном пространстве $L_q(0, 1)$.

В работах [2]–[5] было установлено, что собственные функции задачи (1), (2), нормированные условием (4) при $q = 2$, допускают оценки

$$\|y_n(x)\|_C \leq cn^{(1-\alpha)/2} \quad (5)$$

при условии, что $\varrho(x)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Если же $\varrho(x)$ – непрерывная (или только измеримая) функция, удовлетворяющая условию (3), то оценка (5) выполняется, если в правой части положить $\alpha = 0$. Цель настоящей заметки – получить оценки норм собственных функций в пространствах Соболева W_p^θ , $p \geq 1$, $0 \leq \theta \leq 2$, при условии нормировки (4). Попутно мы получим другие утверждения о собственных функциях, которые могут представлять самостоятельный интерес. Напомним, что при целых θ пространство $W_p^\theta = W_p^\theta[0, 1]$ состоит из функций, для которых существуют $\theta - 1$ абсолютно непрерывных производных, а производная θ -го порядка принадлежит L_p . Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|f(x)\|_{\theta,p} = \left(\int_0^1 |f^{(\theta)}(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

При нецелых θ пространства W_p^θ определяются либо с помощью операторов дробного дифференцирования, либо с помощью интерполяции (см., например, [6]).

Основной результат заметки содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть собственные функции задачи (1), (2) нормированы условием (4). Тогда при $q \leq p \leq \infty$ выполняются оценки

$$\|y_n(x)\|_{\theta, p} \leq c \cdot n^{\theta+1/q-1/p}.$$

При $1 \leq p \leq q$ справедливы оценки

$$\|y_n(x)\|_{\theta, p} \leq c \cdot n^{\theta}.$$

В обоих случаях постоянная c не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 при значениях $\theta = 0, 1, 2$ опирается на леммы 1 и 2, а также лемму 16.4 из [7]. Приведем формулировки лемм.

ЛЕММА 1. Пусть z_1 и z_2 – два последовательных нуля решения $y_n(x)$ задачи (1), (2). Тогда существуют константы $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, не зависящие от λ_n , такие, что

1. $c_1/\sqrt{\lambda_n} \leq z_2 - z_1 \leq c_2/\sqrt{\lambda_n}$;
2. $c_3 \leq |y'_n(z_2)/y'_n(z_1)| \leq c_4$, $c_3 \leq 1$, $c_4 \geq 1$.

Доказательство этой леммы проводится с использованием теорем сравнения Штурма [3].

ЛЕММА 2. Пусть $z_0, z_1, \dots, z_m$ – нули решения $y_n(x)$ задачи (1), (2) такие, что $z_0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{m-1} < 1 \leq z_m$ ($y_n(x)$ продолжена на $(-\infty, +\infty)$), $h_i = \max_{x \in [z_i, z_{i+1}]} |y_n(x)|$, x_i – точка экстремума: $h_i = |y_n(x_i)|$, $1 \leq p < \infty$).

Тогда имеют место неравенства

1. $\left(\frac{c_1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{i=0}^{m-1} h_i^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |y_n(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\frac{c_2}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{i=0}^{m-1} h_i^p \right)^{1/p};$
2. $\left(\int_0^1 |y'_n(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \sqrt{\lambda_n} \left(\frac{c_3}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{i=0}^{m-1} h_i^p \right)^{1/p},$

где c_1, c_2, c_3 – константы, не зависящие от λ_n .

Доказательство леммы 2 опирается на лемму 1 и утверждение 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $0 < c_0 \leq g(x) \leq c_1$, $g(x)$ суммируема на $[a, b]$, $f(x)$ – выпуклая, неотрицательная, непрерывная функция на $[a, b]$. Тогда имеют место неравенства

$$c_0 \frac{[\max f(x)]^q}{q+1} (b-a) \leq \int_a^b g(x) f^q(x) dx \leq c_1 [\max f(x)]^q (b-a),$$

а также некоторые неравенства, полученные при доказательстве леммы 1.

Доказательство теоремы 1 при произвольных значениях $0 \leq \theta \leq 2$ опирается на использование оценки собственных функций для дискретных значений $\theta = 0, 1, 2$ и на применение методов интерполяции из [8]. Следует отметить, что методы интерполяции, на основе которых проводилась оценка норм внутри интервала $0 \leq \theta \leq 2$, использовали уравнение (1) и условия нормировки (4), поэтому краевые условия задачи на собственные значения могут иметь и другой вид, отличный от (2); например, это могут быть распадающиеся краевые условия общего вида.

Отметим следующий интересный факт. Если $\nu = 0, 1$, $\nu \leq k$ и $1 < (k - \nu) \cdot p$, то имеет место вложение $W_p^k[0, 1] \subset C^{\nu, \alpha}[0, 1]$ при следующих значениях α : $\alpha = k - \nu - 1/p$ при $k - \nu - 1/p < 1$; $\alpha \in (-\infty, 1)$ при $k - \nu - 1/p = 1$; и $\alpha = 1$ при $k - \nu - 1/p > 1$ (теорема вложения Соболева в общем случае). Отсюда следует, что $\|y_n(x)\|_{C^{\nu, \alpha}} \leq c \|y_n(x)\|_{W_p^k}$.

В заключение автор благодарит профессора Шкаликова А. А. за постановку задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гехтман М. М., Загиров Ю. М., Якубов В. Я. // Функцион. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 3. С. 71–72. 2. Гехтман М. М. Об асимптотическом поведении нормированных собственных функций спектральной задачи Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // Матем. сб. 1987. Т. 6. С. 184–199. 3. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962. 4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 5. Айгунов Г. А. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 147–148. 6. Якубов В. Я. // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 3. С. 286–287. 7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 8. Берг Й., Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980. 9. Байокки К., Капелло А. Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988. 10. Коровкин П. П. Неравенства. М.: Наука, 1983.