Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. З. Гараев, Об одном ряде с простыми нулями $\zeta(s)$, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 627–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:21:52

М. З. Гараев

1. Введение. Пусть $N(T)$ обозначает число нулей $\zeta(s)$ внутри полосы $0 < \text{Im } s < T$, а $N_1(T)$ обозначает число простых нулей $\zeta(s)$ вида $s = 1/2 + it$, $0 < t < T$. Через $\rho = \beta + i\gamma$ мы обозначим нули $\zeta(s)$. Далее в тексте константа в знаке Виноградова $\gg$ абсолютная.

На с. 374 книги Титчмарша [1] под редакцией и с дополнениями Д. Р. Хиз-Брауна доказано, что если гипотеза Римана верна и если все нули $\zeta(s)$ простые, то ряд

$$\sum |\rho \zeta'(\rho)|^{-1}$$

расходится. В настоящей работе мы улучшаем этот результат, доказывая при этом следующую безусловную теорему.

ТЕОРЕМА. *Имеет место оценка*

$$\sum_{0 < \text{Im } \rho < T}^* |\rho \zeta'(\rho)|^{-1} \gg (\log T)^{1/2},$$

где $\sum^*$ означает, что суммирование ведется только по простым нулям $\zeta(s)$.

Из теоремы, в частности, следует, что ряд $\sum^* |\rho \zeta'(\rho)|^{-1}$ расходится.

Для доказательства теоремы будем пользоваться оценкой

$$N_1(T) \geq 0.342N(T), \tag{1}$$

которая справедлива для всех достаточно больших T (см. [2]). Нам также потребуется следующая лемма.

ЛЕММА. *Пусть $S(t)$ – комплекснозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[t_0, t_k]$. Пусть, далее, $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ и*

$$S(t_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq k.$$

Тогда

$$\sum_{1 \leq j \leq k} |S'(t_j)| \leq \sqrt{2} \int_{t_0}^{t_k} |S''(t)| dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(t) = A(t) + iB(t)$, где $A(t)$ и $B(t)$ – действительные функции. Тогда при $0 \leq j \leq k$ имеем $A(t_j) = B(t_j) = 0$. Поэтому для каждого j , $0 \leq j < k$, существует $\tau_j \in (t_j, t_{j+1})$ такое, что $A'(\tau_j) = 0$. Следовательно,

$$A'(t_{j+1}) = \int_{\tau_j}^{t_{j+1}} A''(t) dt,$$

откуда

$$|A'(t_{j+1})| \leq \int_{\tau_j}^{t_{j+1}} |A''(t)| dt \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} |A''(t)| dt.$$

Суммируя обе части по j в пределах $0 \leq j \leq k-1$, получим

$$\sum_{1 \leq j \leq k} |A'(t_j)| \leq \int_{t_0}^{t_k} |A''(t)| dt.$$

Аналогично,

$$\sum_{1 \leq j \leq k} |B'(t_j)| \leq \int_{t_0}^{t_k} |B''(t)| dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq k} |S'(t_j)| &\leq \sum_{1 \leq j \leq k} |A'(t_j)| + \sum_{1 \leq j \leq k} |B'(t_j)| \leq \int_{t_0}^{t_k} (|A''(t)| + |B''(t)|) dt \\ &\leq \sqrt{2} \int_{t_0}^{t_k} |A''(t) + iB''(t)| dt = \sqrt{2} \int_{t_0}^{t_k} |S''(t)| dt. \end{aligned}$$

2. Доказательство теоремы. Пусть n – достаточно большое натуральное число. Пусть $\sum_{\gamma}^{**}$ означает, что суммирование ведется только по тем γ , для которых $1/2 + i\gamma$ является простым нулем $\zeta(s)$. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно установить оценку

$$\sum_{10^n < \gamma < 10^{n+1}}^{**} \left| \gamma \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right|^{-1} \gg n^{-1/2}.$$

Для доказательства же последней оценки применим к сумме

$$\sum_{10^n < \gamma < 10^{n+1}}^{**} \left| \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right|$$

лемму, полагая в ней $S(t) = \zeta(1/2 + it)$. Тогда получим

$$\sum_{10^n < \gamma < 10^{n+1}}^{**} \left| \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right| \ll \int_1^{10^{n+1}} \left| \zeta'' \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| dt. \quad (2)$$

Применение неравенства Гёльдера дает

$$\int_1^{10^{n+1}} \left| \zeta'' \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| dt \ll \left(10^n \int_1^{10^{n+1}} \left| \zeta'' \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Из приближенного функционального уравнения для $\zeta''(1/2 + it)$ (см. [3, с. 90–92]) путем стандартных вычислений легко вывести оценку

$$\int_1^{10^{n+1}} \left| \zeta'' \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \ll n^5 10^n.$$

Поэтому из (2) и (3) следует, что

$$\sum_{10^n < \gamma < 10^{n+1}}^{**} \left| \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right| \ll n^{5/2} 10^n. \quad (4)$$

Согласно (1) число слагаемых в левой части неравенства (4) имеет порядок $n10^n$. Следовательно,

$$n10^n \ll \sum_{10^n < \gamma < 10^{n+1}}^{**} \left| \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right|^{-1/2} \left| \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right|^{1/2}.$$

Применяя неравенство Гёльдера и используя (4), получим

$$n10^n \ll \left(\sum_{10^n < \gamma < 10^{n+1}}^{**} \left| \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right|^{-1} \right)^{1/2} (n^{5/2} 10^n)^{1/2},$$

откуда

$$\sum_{10^n < \gamma < 10^{n+1}}^{**} \left| \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right|^{-1} \gg 10^n n^{-1/2}.$$

Поэтому

$$\sum_{10^n < \gamma < 10^{n+1}}^{**} \left| \gamma \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) \right|^{-1} \gg n^{-1/2}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Titchmarsh E. C. The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford: Clarendon Press, 1986.
2. Heath-Brown D. R. // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. P. 17–18.
3. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.