Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, Аддитивная проблема с дробными степенями, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 633–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:35:31

АДДИТИВНАЯ ПРОБЛЕМА С ДРОБНЫМИ СТЕПЕНЯМИ

С. В. Конягин

Для $u \in \mathbb{R}$ через $[u]$ и $\|u\|$ будем обозначать соответственно наибольшее целое число, не превосходящее u , и расстояние от u до ближайшего целого числа. Ж.-М. Дезуе [1] доказал, что для любого $\alpha \in (1, 4/3)$ всякое достаточно большое натуральное число x представимо в виде $x = [U^\alpha] + [V^\alpha]$ с целыми неотрицательными U и V . С. А. Гриценко [2] расширил область значений α , обладающих этим свойством, до $\alpha \in (1, 55/41)$. М. З. Гараев и Ка-Лам Куэ [3] показали, что для любых $\alpha \in (1, 3/2]$ и $N \geq 2$ имеется $\gg N$ натуральных чисел $x \leq N$, представимых в виде $x = [U^\alpha] + [V^\alpha]$ с натуральными U и V .

Целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. *Для любых $\alpha \in (1, 3/2)$ всякое достаточно большое натуральное число x представимо в виде $x = [U^\alpha] + [V^\alpha]$ с натуральными U и V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\beta = (3/2 - \alpha)/2$. Для натуральных чисел k и n с $n/2 \leq k \leq n \leq x^\beta$ определим положительные числа $u_0 = u_0(n, k)$ и $v_0 = v_0(n, k)$ так, чтобы

$$u_0^\alpha + v_0^\alpha = x \quad \text{и} \quad nu_0^{\alpha-1} = kv_0^{\alpha-1}. \quad (1)$$

Таким образом,

$$u_0 = \frac{k^{1/(\alpha-1)}}{L} x^{1/\alpha}, \quad v_0 = \frac{n^{1/(\alpha-1)}}{L} x^{1/\alpha}, \quad L = (k^{\alpha/(\alpha-1)} + n^{\alpha/(\alpha-1)})^{1/\alpha}. \quad (2)$$

Заметим, что

$$u_0 \asymp v_0 \asymp x^{1/\alpha}. \quad (3)$$

Обозначим $u = [u_0]$, $v = [v_0]$. В силу (3) мы имеем

$$0 \leq u_0^\alpha - u^\alpha \ll u_0^{\alpha-1} \ll x^{(\alpha-1)/\alpha}, \quad 0 \leq v_0^\alpha - v^\alpha \ll x^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

Следовательно,

$$0 \leq x - u^\alpha - v^\alpha \ll x^{(\alpha-1)/\alpha}. \quad (4)$$

Наша цель – показать, что для подходящих n, k и натуральных чисел w , $U = u - wn$, $V = v + wk$ выполняется равенство

$$x = [U^\alpha] + [V^\alpha]. \quad (5)$$

Рассмотрим функцию

$$f(w) = (u - wn)^\alpha + (v + wk)^\alpha, \quad 0 \leq w \leq \frac{u}{n}.$$

Учитывая (3), имеем

$$\begin{aligned} (u - wn)^\alpha &= u^\alpha - \alpha u^{\alpha-1} wn + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^{\alpha-2} (wn)^2 + O(u^{\alpha-3} (wn)^3) \\ &= u^\alpha - \alpha u_0^{\alpha-1} wn + O(u_0^{\alpha-2} wn) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^{\alpha-2} (wn)^2 + O(u^{\alpha-3} (wn)^3) \\ &= u^\alpha - \alpha u_0^{\alpha-1} wn + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^{\alpha-2} (wn)^2 + O(x^{(\alpha-2)/\alpha} wn) + O(x^{(\alpha-3)/\alpha} (wn)^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично,

$$(v + wk)^\alpha = v^\alpha + \alpha v_0^{\alpha-1} wk + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^{\alpha-2} (wk)^2 + O(x^{(\alpha-2)/\alpha} wn) + O(x^{(\alpha-3)/\alpha} (wn)^3). \quad (7)$$

Здесь мы использовали, что $k \asymp n$. Суммируя (6) и (7) и пользуясь (1), получаем

$$f(w) = u^\alpha + v^\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} w^2 (u^{\alpha-2} n^2 + v^{\alpha-2} k^2) + O(x^{(\alpha-2)/\alpha} wn) + O(x^{(\alpha-3)/\alpha} (wn)^3). \quad (8)$$

Возьмем $wn = Ax^{1/(2\alpha)}$ с большим A . Из (8) следует, что

$$f(w) \geq u^\alpha + v^\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} A^2 u^{\alpha-2} x^{1/\alpha} + O(x^{(\alpha-3/2)/\alpha} A^3).$$

В силу (3) существует такая постоянная $c = c(\alpha) > 0$, что

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^{\alpha-2} \geq cx^{(\alpha-2)/\alpha}.$$

Таким образом, при $x \rightarrow \infty$

$$f(w) \geq u^\alpha + v^\alpha + cA^2 x^{(\alpha-1)/\alpha} + O(x^{(\alpha-3/2)/\alpha} A^3) = u^\alpha + v^\alpha + (cA^2 + o(1))x^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

Из (4) вытекает, что если мы зафиксируем большое A , то для достаточно большого x справедливо неравенство $f(w) > x + 1$ и, кроме того, $f(0) < x + 1$. Значит, найдется такое число $w_0 > 0$, что

$$(u - w_0 n)^\alpha + (v + w_0 k)^\alpha = f(w_0) = x + 1 \quad \text{и} \quad w_0 n \ll x^{1/(2\alpha)}. \quad (9)$$

Далее нам потребуется следующее неравенство.

ЛЕММА 1. Пусть $z_0 > 0$, $z_1 \geq z_0/2$, $z_2 \geq z_0/2$. Тогда

$$|z_1^\alpha - z_2^\alpha - \alpha(z_1 - z_2)z_0^{\alpha-1}| \ll |z_1 - z_2| \max_{z \in [z_1, z_2]} |z - z_0| z_0^{\alpha-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$z_1^\alpha - z_2^\alpha = \int_{z_2}^{z_1} \alpha z^{\alpha-1} dz.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |z_1^\alpha - z_2^\alpha - \alpha(z_1 - z_2)z_0^{\alpha-1}| &\leq \int_{z_2}^{z_1} |\alpha z^{\alpha-1} - \alpha z_0^{\alpha-1}| |dz| \\ &\leq |z_1 - z_2| \max_{z \in [z_1, z_2]} \alpha |z^{\alpha-1} - z_0^{\alpha-1}|. \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку $0 < \alpha - 1 < 1$, для $z \in [z_1, z_2]$ имеет место неравенство

$$|z^{\alpha-1} - z_0^{\alpha-1}| \leq (\alpha - 1)|z - z_0|(\min(z, z_0))^{\alpha-2} \ll |z - z_0| z_0^{\alpha-2},$$

и лемма доказана.

Обозначим $w_1 = [w_0]$, $w_2 = [w_0] + 1$. На основании леммы 1 мы можем написать несколько полезных неравенств.

ЛЕММА 2. Существует такое $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, x)$, что

$$\varepsilon \ll nx^{(\alpha-3/2)/\alpha}$$

и справедливы следующие неравенства:

$$|(u - w_j n)^\alpha - (u - w_0 n)^\alpha - \alpha(w_0 - w_j)nu_0^{\alpha-1}| \leq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

$$|(v + w_j k)^\alpha - (v + w_0 k)^\alpha - \alpha(w_j - w_0)kv_0^{\alpha-1}| \leq \varepsilon, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 1 и (9). Заметим, что ввиду выбора n

$$\varepsilon \ll x^\gamma, \quad \gamma = \frac{(\alpha - 3/2)(2 - \alpha)}{2\alpha} < 0. \quad (12)$$

Следующая лемма является решающей для доказательства теоремы.

ЛЕММА 3. Если $\|\alpha nu_0^{\alpha-1}\| > 6\varepsilon$, то $[(u - w_1 n)^\alpha] + [(v + w_1 k)^\alpha] = x$ или $[(u - w_2 n)^\alpha] + [(v + w_2 k)^\alpha] = x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Суммируя (10) и (11) и учитывая (1) и (9), получаем

$$|(u - w_j n)^\alpha + (v + w_j k)^\alpha - x - 1| \leq 2\varepsilon, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда для некоторого $j = 1, 2$ справедливо неравенство $\|(u - w_j n)^\alpha\| > 2\varepsilon$. Тогда

$$2\varepsilon < \{(u - w_j n)^\alpha\} + \{(v + w_j k)^\alpha\} < 2 - 2\varepsilon.$$

Значит, в силу (13)

$$x - 1 < [(u - w_j n)^\alpha] + [(v + w_j k)^\alpha] < x + 1,$$

или $[(u - w_j n)^\alpha] + [(v + w_j k)^\alpha] = x$. Таким образом, заключение леммы справедливо, если только одновременно не выполнены неравенства

$$\|(u - w_1 n)^\alpha\| \leq 2\varepsilon, \quad \|(u - w_2 n)^\alpha\| \leq 2\varepsilon. \quad (14)$$

Достаточно изучить случай, когда имеет место (14) и, следовательно,

$$\|(u - w_1 n)^\alpha - (u - w_2 n)^\alpha\| \leq 4\varepsilon. \quad (15)$$

С другой стороны, в силу (10)

$$|(u - w_1 n)^\alpha - (u - w_2 n)^\alpha - \alpha n u_0^{\alpha-1}| \leq 2\varepsilon.$$

Таким образом, $\|\alpha n u_0^{\alpha-1}\| \leq 6\varepsilon$, и лемма доказана.

Возьмем $n = [x^\beta]$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться в существовании такого целого $k \in [n/2, n]$, что

$$\|\alpha n u_0^{\alpha-1}\| > 6\varepsilon, \quad (16)$$

где ε удовлетворяет (12). Пусть

$$g(u) = \frac{\alpha u}{(1 + u^{\alpha/(\alpha-1)})^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

В силу (2) неравенство (16) может быть переписано в виде

$$\left\| n x^{(\alpha-1)/\alpha} g\left(\frac{k}{n}\right) \right\| > 6\varepsilon. \quad (17)$$

Возьмем $l = [(\alpha-1)/(\alpha\beta)] + 2$ и интервал $[u_1, u_2] \subset (1/2, 1)$ такой, что $u_2 > u_1$ и $g^{(j)}(u) \neq 0$ при $u \in [u_1, u_2]$, $j = 1, \dots, l$. Тогда для тригонометрической суммы

$$S = \sum_{u_1 n \leq k \leq u_2 n} e\left(n x^{(\alpha-1)/\alpha} g\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

где $e(u) = e^{2\pi i u}$, имеет место оценка [4, теорема 5 главы 1]

$$|S| \ll n(n^{-l} F)^{1/(2^l-2)} + n \times n^{-1/2^{l-1}} (n^{-l} F)^{-1/(2^{l+1}-2)}, \quad (18)$$

где $F = n x^{(\alpha-1)/\alpha}$. Ввиду выбора l мы имеем $n^{-1} \ll n^{-l} F = o(1)$. Отсюда при $n \rightarrow \infty$

$$(n^{-l} F)^{1/(2^l-2)} = o(1),$$

$$n^{-1/2^{l-1}} (n^{-l} F)^{-1/(2^{l+1}-2)} \ll n^{-1/2^{l-1}} (n^{-l} F)^{-1/2^l} \ll n^{-1/2^l} = o(1)$$

и, вследствие (18), $S = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, для большого n найдется такое $k \in [u_1 n, u_2 n]$, что

$$\left\| n x^{(\alpha-1)/\alpha} g\left(\frac{k}{n}\right) \right\| > 0.2 > 6\varepsilon.$$

Действительно, если мы допустим противное, то

$$\Re S \geq \sum_{u_1 n \leq k \leq u_2 n} \cos(0.4\pi) \gg n,$$

но последнее неравенство противоречит установленной оценке $S = o(n)$. Итак, неравенство (17) выполнено для некоторого k . Тем самым теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность математическому институту Макса Планка в Бонне, где была подготовлена настоящая статья, за гостеприимство и прекрасные условия для работы. Автор благодарен также профессору Д. Толеву за интерес к работе и ряд полезных советов и замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deshouillers J.-M. // Acta Arith. 1973–1974. V. 25. P. 393–403.
2. Гриценко С. А. // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 41. № 3. С. 447–464.
3. Garaev M. Z., Ka-Lam Kueh. // J. Anal. Appl. 2001. V. 20. P. 999–1006.
4. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.