Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, О функциональной трансцендентности q -дзета-значений, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 629–630

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm629>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:20:05

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ q -ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ

В. В. Зудилин

Для каждого целого $k \geq 1$ степенной ряд

$$\zeta_q(k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(n) q^n, \quad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k, \quad (1)$$

определяет некоторое q -расширение значения $\zeta(k+1)$ дзета-функции Римана (см. [1]). Более того, ряд в (1) имеет смысл и при $k = 0$. Ввиду тривиальных оценок

$$\sigma_k(n) \leq n^k \sum_{d|n} 1 \leq n^{k+1}$$

для каждого целого $k \geq 0$ этот ряд представляет в единичном круге некоторую аналитическую функцию. Цель этой заметки – доказать, что функция $\zeta_q(k+1)$ не является алгебраической ни для какого $k \geq 1$. Этот результат (и даже более сильный) хорошо известен для $\zeta_q(2)$, $\zeta_q(4)$, $\zeta_q(6)$, ..., поскольку для каждого четного $k \geq 2$ функции $1 + c_k \zeta_q(k)$ при подходящем выборе $c_k \in \mathbb{Q}$ являются рядами Эйзенштейна.

ТЕОРЕМА. *Для каждого $k \geq 0$ аналитическая в области $|q| < 1$ функция $\zeta_q(k+1)$ трансцендентна над $\mathbb{C}(q)$.*

Работа выполнена при поддержке фонда Александра фон Гумбольдта.

По существу этот результат является приложением задач из [2, отдел 8] (см. также оригинальную работу [3, с. 368–371]). Под *целочисленным степенным рядом* далее понимается ряд с целыми коэффициентами (например, таковым является степенной ряд в (1)).

ЛЕММА 1 [2, отдел 8, гл. 3, § 4, задача 163]. *Если рациональная функция представляется целочисленным степенным рядом, то коэффициенты этого ряда, начиная с некоторого, периодические по любому модулю.*

ЛЕММА 2 [2, отдел 8, гл. 3, § 5, задача 167]. *Если целочисленный ряд представляет алгебраическую иррациональную функцию, то его радиус сходимости меньше единицы.*

ЛЕММА 3. *Для каждого целого $k \geq 0$ функция $\sigma_k(n)$ натурального аргумента $n > N$ не является периодической по модулю 2 ни при каком $N \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что функция $\sigma_k(n)$ является мультипликативной, т.е.

$$\sigma_k(m_1 m_2) = \sigma_k(m_1) \sigma_k(m_2), \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \quad (m_1, m_2) = 1,$$

и если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$ – каноническое разложение числа n на простые множители, то

$$\sigma_k(n) = \prod_{j=1}^l (1 + p_j^k + p_j^{2k} + p_j^{3k} + \cdots + p_j^{\alpha_j k}) \quad (2)$$

(см., например, [2, отдел 8, гл. 1, § 6, задача 44]). Из формулы (2), в частности, следует, что $\sigma_k(n^2) \equiv 1 \pmod{2}$ для любого $n \geq 1$ и $\sigma_k(p) \equiv 0 \pmod{2}$ для любого нечетного простого p . Поэтому в случае существования периодичности $\sigma_k(n)$, $n > N$, по модулю 2, этот период больше единицы.

Предположим от противного, что существует период $m > 1$ у рассматриваемой последовательности по модулю 2:

$$\sigma_k(n_1) \equiv \sigma_k(n_2) \pmod{2}, \quad n_1, n_2 > N, \quad n_1 \equiv n_2 \pmod{m}. \quad (3)$$

Выберем нечетное простое число $p > N$, взаимно простое с m , и показатель $\alpha \geq 1$ так, чтобы $m^{2\alpha} > N$. Согласно сказанному выше $\sigma_k(p) \equiv 0 \pmod{2}$ и $\sigma_k(m^{2\alpha}) \equiv 1 \pmod{2}$, откуда

$$\sigma_k(p m^{2\alpha}) = \sigma_k(p) \sigma_k(m^{2\alpha}) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Однако последнее сравнение противоречит предположению (3), поскольку $p m^{2\alpha} \equiv m^{2\alpha} \pmod{m}$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Согласно леммам 1 и 3 функция $\zeta_q(k+1)$ иррациональна над полем $\mathbb{C}(q)$, поэтому лемма 2 и сходимость ряда в (1) в области $|q| < 1$ влечет трансцендентность этой функции над $\mathbb{C}(q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Степенной ряд в (1) можно также представить в области $|q| < 1$ как ряд Ламберта

$$\zeta_q(k+1) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(l)q^l}{1-q^l},$$

где $f(l) = l^k$ – мультипликативная функция натурального аргумента. Вопрос об иррациональности (и трансцендентности) подобных рядов Ламберта не всегда решается положительно: например, выбор (мультипликативной) функции Эйлера $f(l) = \varphi(l)$ (количество чисел $0 \leq k < l$, взаимно простых с l) приводит к рациональной функции $q/(1-q)^2$ (см. [2, отдел 8, гл. 1, § 7, задача 69]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зудилин В. В. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 6. С. 936–940.
2. Полюа Г., Серё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. 3 изд. М.: Наука, 1978.
3. Fatou P. // Acta Math. 1906. V. 30. P. 335–400.