Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Кружилин, П. А. Солдаткин, Аффинная и голоморфная эквивалентность трубчатых областей в $\mathbb{C}^2$, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 670–682

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm63>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 07:00:03

УДК 514.14

АФФИННАЯ И ГОЛОМОРФНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЕЙ В $\mathbb{C}^2$

Н. Г. Кружилин, П. А. Солдаткин

В статье доказано что, за исключением нескольких явно описанных случаев, две гиперболические трубчатые области в $\mathbb{C}^2$ биголоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.

Библиография: 11 названий.

Введение. Напомним, что область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется *трубчатой*, если вместе с каждой точкой $(x_1^0 + iy_1^0, \dots, x_n^0 + iy_n^0)$ этой области принадлежат все точки $(x_1 + iy_1^0, \dots, x_n + iy_n^0)$, где x_i – произвольные действительные числа. Трубчатая область однозначно определяется своей проекцией на координаты y_i . Эта проекция называется *базой* трубчатой области; обозначим ее Ω , а соответствующую трубчатую область обозначим $T_\Omega = \mathbb{R}^n + i\Omega$. Таким образом, группа автоморфизмов трубчатой области $\text{Aut}(T_\Omega)$ всегда содержит подгруппу вещественных сдвигов, которую мы обозначим Σ_{T_Ω} . Эта подгруппа изоморфна $\mathbb{R}^n$. Оболочка голоморфности трубчатой области T_Ω – это трубчатая область T_{Ω^c} , база которой Ω^c является выпуклой оболочкой базы Ω .

Преобразования $\tilde{z} = \varphi(z)$ вида $\varphi(z) = A(z) + b$, где $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{C}^n$, мы будем называть *аффинными*. Легко видеть, что эти преобразования переводят трубчатые области в трубчатые. Такие трубчатые области мы будем называть *аффинно эквивалентными*. Аффинная эквивалентность трубчатых областей равносильна аффинной эквивалентности их баз в $\mathbb{R}^n$.

Естественно поставить вопрос, являются ли голоморфно эквивалентные трубчатые области также и аффинно эквивалентными.

Если базы областей ограничены, то утвердительный ответ на этот вопрос получен Янгом [1] и Шимицу [2]. Однако для более широких классов ответ оказывается отрицательным. Например, область $T_{\Omega'}$ над квадратом $\Omega' = \{0 < y_1 < \pi, 0 < y_2 < \pi\}$ переводится “экспоненциальным отображением” $\varphi = (e^{z_1}, e^{z_2})$ в трубчатую область $T_{\Omega''}$ над первой четвертью плоскости $\Omega'' = \{0 < y_1 < \infty, 0 < y_2 < \infty\}$. Отображение φ биголоморфно, но заменить его аффинным невозможно.

В [3] Шимицу провел биголоморфную классификацию трубчатых областей в $\mathbb{C}^2$ с выпуклыми базами, не содержащими прямых. Иными словами, были классифицированы гиперболические (по Кобаяси) трубчатые области голоморфности. Согласно [3]

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ, грант НШ-2040.2003.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01291.

каждая трубчатая область в $\mathbb{C}^2$ с выпуклой базой, не содержащей прямых, находится в одном из следующих четырех классов.

1. Области с базой, аффинно эквивалентной $\Omega_1 = \{y_2 > y_1^2\}$. Область T_{Ω_1} голоморфно эквивалентна единичному шару в $\mathbb{C}^2$, и ее группа голоморфных автоморфизмов соответственно 8-мерна. Трубчатая область, голоморфно эквивалентная T_{Ω_1} , оказывается аффинно ей эквивалентной, т.е. класс 1 является одновременно и классом голоморфной и классом аффинной эквивалентности.

2. Области, голоморфно эквивалентные T_{Ω_2} , где $\Omega_2 = \{y_1 > 0, y_2 > 0\}$. Такие области голоморфно эквивалентны единичному бидиску в $\mathbb{C}^2$, так что группа автоморфизмов 6-мерна. Этот голоморфный класс разбивается на три аффинных класса:

- (а) области с базой, аффинно эквивалентной Ω_2 ;
- (б) области с базой, аффинно эквивалентной $\Omega'_2 = \{\pi > y_1 > 0, \infty > y_2 > 0\}$;
- (с) области с базой, аффинно эквивалентной $\Omega''_2 = \{\pi > y_1 > 0, \pi > y_2 > 0\}$.

3. Области, голоморфно эквивалентные T_{Ω_3} , где $\Omega_3 = \{y_2 > -\ln \sin(y_1), \pi > y_1 > 0\}$. Группа автоморфизмов в этом случае 4-мерна. Этот класс состоит из двух аффинных классов:

- (а) области с базой, аффинно эквивалентной Ω_3 ;
- (б) области с базой, аффинно эквивалентной $\Omega'_3 = \{y_2 > e^{y_1}\}$.

4. В этом классе находятся все оставшиеся гиперболические области с выпуклой базой. Их характерное свойство $\dim \text{Aut}(T_{\Omega_4}) \leq 3$. Такие области голоморфно эквивалентны, если и только если они аффинно эквивалентны. (В отличие от первых трех классов, четвертый не является классом голоморфной эквивалентности).

Таким образом, для рассмотренного в [3] класса областей голоморфная классификация и аффинная классификация в основном совпадают, а все исключения из этого правила можно перечислить.

В настоящей работе мы доказываем аналогичный результат для существенно более широкого класса двумерных гиперболических трубчатых областей (заметим, что оболочки голоморфности таких областей не обязательно гиперболичны). Точная формулировка нашего результата приводится в теореме 1 в конце статьи.

Можно полагать, что условие гиперболичности здесь на самом деле излишне. Во всяком случае, для двумерных областей Рейнхарта соответствующий результат верен вообще без каких-либо условий [4].

Приведем теперь некоторые простейшие соображения по поводу соотношения между аффинной и голоморфной классификацией. Следующий полезный результат практически очевиден (ср. [2]).

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi: T_{\Omega} \rightarrow T_{\Omega'}$ – биголоморфное отображение двух трубчатых областей в $\mathbb{C}^n$. Если $\varphi \Sigma_{T_{\Omega}} \varphi^{-1} = \Sigma_{T_{\Omega'}}$, то φ – аффинное отображение.

В нашем случае, при $\dim \text{Aut}(T_{\Omega}) = 2$ лемма 1 позволяет сразу сделать вывод об эквивалентности голоморфной и аффинной классификации. Действительно, в этом случае подгруппы $\Sigma_{T_{\Omega}}$ и $\Sigma_{T_{\Omega'}}$ будут компонентами единицы в группах $\text{Aut}(T_{\Omega})$ и $\text{Aut}(T_{\Omega'})$ и поэтому в случае существования биголоморфного отображения φ будут сопряжены, как и сами эти группы.

Рассмотрим случай $\dim \text{Aut}(T_{\Omega}) > 2$. Известно [5], что размерность группы автоморфизмов гиперболической области D в $\mathbb{C}^n$ не превосходит $n^2 + 2n$, а если $\dim \text{Aut}(D) = n^2 + 2n$, то D голоморфно эквивалентна шару. Если $\dim \text{Aut}(D) > n^2$,

то $\text{Aut}(D)$ транзитивна [6]. Но однородная гиперболическая область является областью голоморфности (это ответ Накаджимы [7] на вопрос Кобаяси [5]). Поэтому в случае $\dim \text{Aut}(T_\Omega) \geq 5$ классификация гиперболических трубчатых областей в $\mathbb{C}^2$ (как голоморфная, так и аффинная) по сути получена Шимицу – это классы 1, 2. Области же с трех- и четырехмерными группами автоморфизмов приходится обсуждать детальнее.

Трехмерная группа автоморфизмов. В случае $\dim \text{Aut}(T_\Omega) = 3$ рассмотрим соответствующую алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Ее можно рассматривать как алгебру полных вещественных векторных полей на T_Ω с голоморфной $(1, 0)$ -компонентой. Всюду в работе мы для удобства будем указывать только $(1, 0)$ -компоненты вещественных полей.

Всего существует девять типов вещественных алгебр Ли размерности 3 – две серии и семь отдельных алгебр. Среди этих девяти типов одна коммутативная алгебра ($\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$) и две алгебры, обладающие свойством $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}$. Эти три алгебры можно не рассматривать. Действительно, коммутативные подалгебры $\mathfrak{g}$ могут иметь размерность не выше 2 в силу следующего результата (см., например, [8]).

ЛЕММА 2. *Абелева группа автоморфизмов n -мерного комплексного гиперболического многообразия имеет размерность $\leq n$.*

С другой стороны, так как область по условию трубчатая, то $\mathfrak{g}$ содержит линейно независимые коммутирующие поля $L_1 = \partial/\partial z_1$ и $L_2 = \partial/\partial z_2$, соответствующие вещественным сдвигам. Третье векторное поле из базиса будем обозначать b , чтобы выделить его. Тогда $\mathfrak{g}^2$ натянута на $[L_1, b]$ и $[L_2, b]$ и не более, чем двумерна.

Среди оставшихся для рассмотрения алгебр в двух $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, а в остальных (среди которых две серии и две отдельные алгебры) $\dim \mathfrak{g}^2 = 2$.

В этих случаях векторные поля интегрируются и можно получить явный вид соответствующих трубчатых областей. Но необходимо помнить, что мы идем от алгебры Ли к области, а не наоборот, так что у полученной области группа $\text{Aut}(T_\Omega)$ может оказаться более, чем трехмерной, и наши трехмерные алгебры будут тогда подалгебрами полной алгебры $\mathfrak{g}$. Вопрос об истинной размерности группы автоморфизмов области (в случае необходимости) надо решать отдельно.

Трехмерная группа с одномерным коммутантом. Две алгебры, обладающие свойством $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, таковы:

$$\text{А. } [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = e_1;$$

$$\text{В. } [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = e_2.$$

В алгебре **А** все двумерные коммутативные подалгебры являются идеалами. В алгебре **В** только одна двумерная коммутативная подалгебра – $\langle e_1, e_2 \rangle$ – является идеалом, а остальные – не идеалы. Выберем в $\mathfrak{g}$ базис вида $L_1 = \partial/\partial z_1$, $L_2 = \partial/\partial z_2$, b . Операторы $\text{ad } L_1$ и $\text{ad } L_2$ коммутируют и имеют в этом базисе следующий вид:

$$\text{ad } L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{ad } L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & \psi \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

Напомним, что аффинное преобразование переводит трубчатую область в трубчатую. Такое преобразование соответствует замене базиса в $\langle L_1, L_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ (далее у нас символ линейной оболочки всегда будет означать вещественную линейную оболочку и значок $\mathbb{R}$ мы будем опускать). Кроме того, при фиксированных L_1 и L_2 можно различными

способами выбирать третий базисный вектор b в алгебре $\mathfrak{g}$. Используя эти приемы, можно добиться, чтобы пара коммутирующих операторов $\text{ad } L_1$ и $\text{ad } L_2$ имела одну из следующих матричных записей:

$$\mathbf{A.} \text{ ad } L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ad } L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B1.} \text{ ad } L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ad } L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B2.} \text{ ad } L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ad } L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

где L_1, L_2 — это $\partial/\partial z_1, \partial/\partial z_2$ в новых координатах. Алгебры **B1** и **B2** изоморфны алгебре **B**, но в **B1** подалгебра $\mathfrak{t} = \langle L_1, L_2 \rangle$ — идеал, а в **B2** нет. Из леммы 1 и свойств идеала следует, что алгебры **A** и **B1** состоят из аффинных полей. Впрочем, это видно и непосредственно. Действительно, решая соответствующие системы дифференциальных уравнений, находим:

$$\mathbf{A.} b = (z_2 + iK) \frac{\partial}{\partial z_1} + iC \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad K, C \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{B1.} b = iC \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2 + iK) \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad K, C \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{B2.} b = Ke^{z_2} \frac{\partial}{\partial z_1} + Ce^{z_2} \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad K, C \in \mathbb{C}.$$

Эти поля надо проинтегрировать, чтобы получить явный вид соответствующих трубчатых областей.

В случае **A** интегральные кривые поля b выглядят следующим образом (мы выписываем только их проекции на плоскость (y_1, y_2)):

$$y_1(t) = \frac{C}{2}t^2 + (K + y_2(0))t + y_1(0),$$

$$y_2(t) = Ct + y_2(0).$$

Если $C = 0$, то область Ω обязательно содержит целую прямую, поэтому T_Ω негиперболическа. Если $C \neq 0$, то проекции интегральных кривых на плоскость (y_1, y_2) имеют вид соосных парабол. После параллельного переноса и изменений масштаба, т.е. аффинных преобразований, получаем три варианта:

- либо $\Omega = \{y_1 > y_2^2\}$;
- либо $\Omega = \{y_2^2 + T > y_1 > y_2^2\}$, где $T > 0$;
- либо $\Omega = \{y_1 < y_2^2\}$.

Первая база аффинно эквивалентна Ω_1 (класс 1). Вторая база при любом значении T аффинно эквивалентна, например, $\Omega_d = \{y_2^2 + 1 > y_1 > y_2^2\}$. Третья база содержит целые прямые, поэтому соответствующая трубчатая область негиперболическая.

В случае **B1** интегральные кривые имеют такой вид:

$$y_1(t) = Ct + y_1(0),$$

$$y_2(t) = (K + y_2(0))e^t - K.$$

Если $C = 0$, то после аффинного преобразования получаем следующие случаи:

- либо $\Omega = \{y_1 > 0, y_2 > 0\}$;
- либо $\Omega = \{\pi > y_1 > 0, y_2 > 0\}$;
- либо $\Omega = \{y_2 > 0\}$.

Первая база – это Ω_2 (класс 2(a)). Вторая база – это Ω'_2 (класс 2(b)). Заметим, что группа автоморфизмов соответствующих трубчатых областей 6-мерна, а не трехмерна. Третья база соответствует негиперболической области.

Если $C \neq 0$, то после аффинных преобразований получаем следующие случаи:

- либо $\Omega = \{y_2 > e^{y_1}\}$;
- либо $\Omega = \{he^{y_1} > y_2 > e^{y_1}\}$, $h > 1$;
- либо $\Omega = \{e^{y_1} > y_2 > 0\}$;
- либо $\Omega = \{y_2 < e^{y_1}\}$;
- либо $\Omega = \{ke^{y_1} > y_2 > -e^{y_1}\}$, $k > 0$.

Два последних случая соответствуют негиперболическим областям. Первый случай – в точности Ω'_3 (класс 3(b)). Интерес представляют второй и третий случай. Введем для них обозначения Ω_h и Ω_+ . То, что T_{Ω_h} и T_{Ω_+} голоморфно неэквивалентны, очевидно; достаточно посмотреть на их оболочки голоморфности. Более того, T_{Ω_h} при различных значениях h голоморфно неэквивалентны. Действительно, их общая оболочка голоморфности – область $T_{\Omega'_3}$, поэтому биголоморфное отображение между $T_{\Omega_{h_1}}$ и $T_{\Omega_{h_2}}$ продолжилось бы до автоморфизма $T_{\Omega'_3}$. Но группа автоморфизмов этой области связана и явно описана в [3]; все ее автоморфизмы оставляют неподвижными $T_{\Omega_{h_1}}$ и $T_{\Omega_{h_2}}$, а кроме того, продолжаются до автоморфизмов T_{Ω_+} . Отсюда же следует, что группа автоморфизмов T_{Ω_h} и T_{Ω_+} четырехмерна, а не трехмерна.

Гиперболичность T_{Ω_+} вытекает из следующего хорошо известного результата (см., например, [9]).

ЛЕММА 3. Пусть $\pi: M \rightarrow M'$ – голоморфное отображение многообразий, причем M' гиперболическое. Если M' имеет покрытие $\{U_i\}$ такое, что $\pi^{-1}(U_i)$ гиперболические, то и M – гиперболическое многообразие.

Область T_{Ω_+} можно спроецировать на верхнюю полуплоскость $\{y_2 > 0\}$, которая гиперболична; далее все очевидно.

В случае **B2** система уравнений, определяющих интегральные кривые, следующая:

$$z'_1 = Ke^{z_2}, \quad z'_2 = Ce^{z_2}, \quad C, K \in \mathbb{C}.$$

В случае $C = 0$ база содержит прямую; соответствующая трубчатая область не гиперболична. Если же $C \neq 0$, то замена $\tilde{z}_1 = z_1$, $\tilde{z}_2 = z_2 + \ln C$ приводит нас к системе

$$z'_1 = He^{z_2}, \quad z'_2 = e^{z_2}, \quad \text{где } H = \frac{K}{C}.$$

Если параметр $H = 0$, то $y_1 = y_1(0)$, $y_2 \in (\pi n, \pi(n+1))$. Это легко следует из картинки векторного поля. Строгое доказательство можно найти в [2]. Отсюда получаем, что базы аффинно эквивалентны Ω'_2 или Ω''_2 . Такой же результат получается, если H – вещественное число.

Пусть $H \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. После переноса можно считать, что $y_2 \in (0, \pi)$, $x_2 = \ln \sin(y_2) + x_2(0) - \ln \sin(y_2(0))$, и так как $(Hz_2 - z_1)' = 0$, то проекция интегральной кривой на плоскость (y_1, y_2) имеет вид $y_1 = H_1 y_2 + H_2 \ln \sin(y_2) + y_1(0) - H_1 y_2(0) - H_2 \ln \sin(y_2(0))$, $y_2 \in (0, \pi)$, где $H = H_1 + iH_2$. После переименования переменных и очевидного аффинного преобразования мы получаем, что интегральные кривые в данном случае имеют

вид $y_2 = -\ln(\sin y_1) + T$, $y_1 \in (0, \pi)$. В этом случае база гиперболической трубчатой области имеет вид:

- либо $\Omega = \{y_2 > -\ln \sin(y_1)\}$, $y_1 \in (0, \pi)$;
- либо $\Omega = \{-\ln \sin(y_1) + s > y_2 > -\ln \sin(y_1)\}$, $s > 0$, $y_1 \in (0, \pi)$;
- либо $\Omega = \{y_2 < -\ln \sin(y_1)\}$, $y_1 \in (0, \pi)$.

Первая база – это Ω_3 . Вторую базу обозначим Ω_s , третью – Ω_* . Как известно [3], преобразование

$$\tilde{z}_1 = -z_2 + iz_1, \quad \tilde{z}_2 = e^{z_1}$$

переводит область T_{Ω_3} в область $T_{\Omega'_3}$, доказывая голоморфную (но не аффинную) эквивалентность этих областей. На самом деле, это отображение также переводит T_{Ω_s} в T_{Ω_h} (где $h = e^s$), а T_{Ω_*} переводит в $T_{\Omega_{+}}$. Аффинно эти области, конечно, не эквивалентны. Учитывая, что области T_{Ω_h} с различными h голоморфно неэквивалентны, получаем аналогичный результат для T_{Ω_s} .

Трехмерная группа с двумерным коммутантом. Как и в предыдущем пункте, соответствующие трубчатые области можно найти в явном виде, но мы предпочтем более короткое рассуждение.

Сделаем несколько очевидных замечаний относительно центра Z алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В трехмерном случае у неабелевой алгебры центр может быть либо одномерным, либо нульмерным. Кроме того, $Z \subset \langle L_1, L_2 \rangle$. Если $\mathfrak{g}$ содержит две различные коммутативные подалгебры размерности 2, то их одномерное пересечение будет центром. Поэтому если $Z = 0$, то алгебра $\mathfrak{g}$ содержит единственную коммутативную двумерную подалгебру – в нашем случае $\mathfrak{t} = \langle L_1, L_2 \rangle$. Легко видеть, что в случае $\dim \mathfrak{g}^2 = 2$ обязательно $Z = 0$.

Из этих замечаний следует, что при $\dim \mathfrak{g}^2 = 2$ голоморфные классы эквивалентности совпадают с аффинными. Действительно, биголоморфное отображение между областями T_{Ω_1} и T_{Ω_2} порождает изоморфизм групп $\text{Aut}(T_{\Omega_i})$, а он, соответственно, – изоморфизм алгебр Ли. Их единственные двумерные коммутативные подалгебры $\mathfrak{t}_i = \langle L_{i1}, L_{i2} \rangle$ при этом переходят друг в друга. Но эти алгебры являются касательными алгебрами подгрупп вещественных сдвигов $\Sigma_{T_{\Omega_i}}$, которые односвязны. Поэтому изоморфизм подалгебр продолжается до изоморфизма подгрупп, и можно применить лемму 1.

Тем не менее, один класс алгебр с двумерным коммутантом мы обсудим более подробно: он будет нам полезен при изучении областей с четырехмерными группами автоморфизмов. Это алгебры, у которых $\mathfrak{g}^2 = \langle L_1, L_2 \rangle$.

Пусть $\mathfrak{g} = \langle L_1, L_2, b \rangle$ – такая алгебра. Тогда $\text{ad } b$ можно рассматривать как оператор на $\langle L_1, L_2 \rangle$. Линейная замена координат с вещественной матрицей в $\mathbb{C}^2$ приводит к замене базиса в $\langle L_1, L_2 \rangle$, и, сделав подходящую замену, а также заменив при необходимости b на λb , мы можем считать, что матрица $\text{ad } b$ на этом двумерном пространстве имеет одну из следующих форм:

1. $\text{ad } b = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
2. $\text{ad } b = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
3. $\text{ad } b = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix};$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus 0, \phi \in (0, \pi)$.

Теперь несложно определить вид самого поля b . В случае 1 с точностью до сдвига начала координат оно имеет вид

$$-\beta z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

и, в частности, касается плоскости мнимых частей $\{\operatorname{Re} z_1 = 0, \operatorname{Re} z_2 = 0\}$. База Ω трубчатой области T_Ω , в которой b является инфинитезимальным автоморфизмом, должна содержать полные траектории этого векторного поля, и, следовательно, граница ее образована двумя кривыми из множества, включающего в себя ветви парабол $y_1 = C|y_2|^\beta, y_2 \geq 0$ или $y_2 \leq 0, C \in \mathbb{R}$, и полуоси оси y_1 .

В случае 2 проекции интегральных кривых на мнимые координаты имеют следующий вид (с точностью до сдвига):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0)e^{-t} - \alpha y_2(0)te^{-t}, \\ y_2(t) &= y_2(0)e^{-t}. \end{aligned}$$

При $y_2(0) = 0$ — это полуоси оси y_1 , при $y_2(0) \neq 0$ — кривые

$$y_1 = \frac{y_1(0)}{y_2(0)}y_2 + \alpha y_2 \ln\left(\frac{y_2}{y_2(0)}\right).$$

База трубчатой области ограничена двумя из этих кривых.

В случае 3 мы имеем векторное поле, ограничение которого на плоскость мнимых частей имеет следующий вид в полярных координатах r, ψ на этой плоскости:

$$r \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

База трубчатой области ограничена интегральными кривыми этого векторного поля, т.е. двумя логарифмическими спиралями вида $r = Ce^{\psi \operatorname{ctg} \phi}$ (или двумя окружностями при $\phi = \pi/2$).

Все эти кривые встречаются, например, в [10] при описании особых точек линейного уравнения на плоскости.

Снова напомним, что в наших построениях, здесь и ниже, мы не используем предположения о том, что алгебра $\mathfrak{g}$ описанной выше структуры является в точности алгеброй инфинитезимальных автоморфизмов трубчатой области — она может быть и ее собственной подалгеброй, что на самом деле порою и случается.

Четырехмерная группа автоморфизмов. Снова рассмотрим операторы $\operatorname{ad} L_1$ и $\operatorname{ad} L_2$. Как и прежде, при необходимости будем производить замену базиса в пространстве $\langle L_1, L_2 \rangle$, сохраняя прежние обозначения за новыми базисными векторами.

На подпространстве $\langle L_1, L_2 \rangle$ оба оператора $\operatorname{ad} L_1$ и $\operatorname{ad} L_2$ обращаются в нуль. Допустим, что ядро оператора $\operatorname{ad} L_1$ на самом деле имеет размерность 3 или 4. В первом случае оно инвариантно относительно $\operatorname{ad} L_2$, и мы получаем трехмерную подалгебру. Так как она не может быть коммутативной (по лемме 2), это подалгебра с одномерным коммутантом, а все подобные области были рассмотрены выше.

Во втором случае L_1 порождает центр алгебры. Заметим, что векторное поле iL_1 также коммутирует со всеми полями из алгебры, а следовательно, расслоение области, состоящее из полос (или полуплоскостей) комплексных прямых, содержащих траектории L_1 , инвариантно относительно действия алгебры. Допустим, что некоторое поле из алгебры касается одной из этих прямых в какой-то точке. Тогда оно касается всей полосы и, таким образом, задает однопараметрическую группу ее автоморфизмов. Поскольку сдвиги вдоль L_1 коммутируют с действием любой такой группы, а у плоской гиперболической области не может быть коммутативной двумерной группы автоморфизмов, все орбиты нашей алгебры не более, чем трехмерны.

Далее, оператор $\text{ad } L_2$ аннулирует в точности двумерное подпространство (в противном случае мы бы получили коммутативную подалгебру размерности выше 2, в противоречии с леммой 2). Допустим, что в алгебре существует либо собственный вектор $\text{ad } L_2$, отвечающий ненулевому собственному значению, либо присоединенный вектор того же оператора, отвечающий собственному значению 0. И в том, и в другом случае обозначим этот вектор через b . Тогда b, L_1, L_2 опять-таки порождают трехмерную подалгебру из числа рассмотренных в предыдущем пункте, и этот случай входит в число ранее разобранных.

Оставшаяся возможность – это наличие у $\text{ad } L_2$ инвариантного двумерного подпространства B , на котором этот оператор имеет невещественные собственные значения. Тогда скобка пары линейно независимых векторов из B – собственный вектор (быть может, нулевой) оператора $\text{ad } L_2$, отвечающий собственному значению, равному сумме его собственных значений на B . Поскольку размерность всей алгебры 4, оператор $\text{ad } L_2$ имеет на B чисто мнимые собственные значения, которые мы можем считать равными i и $-i$, а значит, в подходящем базисе b_1, b_2 на B матрица этого оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая возможность замены подходящих базисов как в $\langle L_1, L_2 \rangle$, так и в B , существенно различными оказываются три случая:

- (1) $[b_1, b_2] = L_1$;
- (2) $[b_1, b_2] = -L_2$;
- (3) $[b_1, b_2] = L_2$.

(1) В этом случае b_1, b_2 и L_1 образуют трехмерную подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. Допустим, что у нее есть двумерная орбита. Тогда она является порождающей вполне вещественной поверхностью (она не может быть комплексной, поскольку центр подалгебры нетривиален, а наша область гиперболична), и мы без ограничения общности можем считать, что она содержит в качестве подобласти орбиту O коммутативной подалгебры, порожденной b_1 и L_1 .

Орбита O диффеоморфна $\mathbb{R}^2$ и в подходящих координатах u, v на ней $L_1 = \partial/\partial u$, $b_1 = \partial/\partial v$ и $b_2 = cb_1 + vL_1$. Если бы поле L_2 касалось O хотя бы в одной точке, то оно касалось бы ее всюду, и тогда в силу соотношений $[L_1, L_2] = 0$, $[L_2, b_1] = -b_2$ мы бы пришли к соотношению

$$L_2 = (-cv + c_1) \frac{\partial}{\partial v} - \left(\frac{v^2}{2} + c_2 \right) \frac{\partial}{\partial u}, \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

Поля L_1 и L_2 не могут быть пропорциональны ни в одной точке трубчатой области; следовательно, $c = 0$, $b_2 = vL_1$ и

$$L_2 = c_1 \frac{\partial}{\partial v} - \left(\frac{v^2}{2} + c_2 \right) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Из этой формулы видно, что соотношение $[L_2, b_2] = b_1$ не может быть выполнено.

Если же L_2 не касается O , то O лежит в трехмерной орбите алгебры $\mathfrak{g}$, являющейся CR -гиперповерхностью, и потому на O задано поле направлений – следов комплексных касательных плоскостей к гиперповерхности, инвариантных относительно однопараметрических групп полей b_1 , b_2 и L_1 . Однако рассуждения в координатах показывают, что на O нет инвариантных направлений, отличных от L_1 , а мы установили ранее, что плоскость векторов L_1, iL_1 не может быть касательной к орбите $\mathfrak{g}$ – противоречие.

Таким образом, рассматриваемая подалгебра должна иметь трехмерные орбиты. Рассмотрим одну из них, O' . Она диффеоморфна $\mathbb{R}^3$, и в подходящих координатах u, v, w на O' мы имеем

$$L_1 = 2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad b_1 = \frac{\partial}{\partial v} - w \frac{\partial}{\partial u}, \quad b_2 = \frac{\partial}{\partial w} + u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Теперь найдем выражение для L_2 . В силу соотношения $[L_1, L_2] = 0$,

$$L_2 = A(v, w) \frac{\partial}{\partial v} + B(v, w) \frac{\partial}{\partial w} + C(v, w) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Теперь условия $[L_2, b_1] = -b_2$, $[L_2, b_2] = b_1$ показывают, что $A'_v = 0$, $A'_w = -1$, $B'_v = 1$, $B'_w = 0$, $C'_v = v - B$, $C'_w = A + w$, т.е.

$$L_2 = (-w + C_1) \frac{\partial}{\partial v} + (v + C_2) \frac{\partial}{\partial w} + (-C_2 v + C_1 w + C_3) \frac{\partial}{\partial u}, \quad C_j \in \mathbb{R},$$

так что при $-w + C_1 = v + C_2 = 0$ поля L_1 и L_2 пропорциональны, что в трубчатой области невозможно.

Таким образом, случай (1) на самом деле не может реализоваться.

В случаях (2) и (3) подалгебра, порожденная b_1 , b_2 и L_2 , изоморфна соответственно $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(1, 1)$. Следовательно, в случае (2) всякая орбита этой подалгебры есть однородное пространство группы $SU(2)$ и, в частности, компактна. Однако в нашей ситуации орбиты поля L_2 не могут иметь компактного замыкания, так что и этот случай невозможен.

(3) Поскольку выражения для полей b_1 , b_2 и L_2 не зависят от координаты z_1 , в случае, когда одна из орбит подалгебры, порожденной этими полями (обозначим ее $\mathfrak{su}(1, 1)$), – комплексная кривая (с необходимостью параллельная оси z_2), мы получаем представление области в виде прямого произведения одномерных трубчатых областей, т.е. один из подклассов класса 2.

Если бы эта подалгебра имела одномерную орбиту (вещественную прямую), то она должна была бы иметь и орбиту – комплексную кривую (являющуюся подобластью соответствующей комплексной прямой), но при этом область не могла бы быть представлена в виде прямого произведения комплексно-одномерных областей, так что одномерных орбит нет.

Теперь рассмотрим орбиты полной алгебры $\mathfrak{g}$. Напомним, что они не более, чем трехмерны. Предположим, что какая-то из этих орбит – плоскость Π вида $\{y_1 = c_1, y_2 = c_2\}$. Тогда в произвольной точке $s \in \Pi$ некоторые два линейно независимых поля из $\mathfrak{g}$ обращаются в нуль. Тогда те же поля обращаются в нуль на пересечении области с комплексной прямой $z_2 = \text{const}$, проходящей через точку s и, следовательно, порождают двумерную подалгебру $\mathfrak{g}$, не содержащую L_1 . Такая подалгебра с необходимостью является подалгеброй $\mathfrak{su}(1, 1)$, а значит, у последней есть одномерные орбиты, невозможность чего мы уже продемонстрировали.

Таким образом, произвольная орбита $\mathfrak{g}$ – однородная вещественная гиперповерхность, Леви-плоская или строго псевдовыпуклая. Если она Леви-плоская, то она расслаивается на комплексные кривые, и это слоение сохраняется действием алгебры, так что на каждом слое действует трехмерная подалгебра $\mathfrak{g}$, не включающая L_1 , т.е. $\mathfrak{su}(1, 1)$. Тем самым, мы вернулись к только что рассмотренному случаю области – прямого произведения.

Предположим, что орбита строго псевдовыпукла. Тогда это многообразие локально CR -эквивалентно стандартной сфере, так как хорошо известно, что группа CR -автоморфизмов несферической строго псевдовыпуклой гиперповерхности не более, чем трехмерна (см., например, [11]). Алгебра $\mathfrak{g}$ вкладывается в алгебру $\mathfrak{su}(2, 1)$ трехмерных матриц, косоэрмитовых относительно знакопеременной формы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Однако в $\mathfrak{g}$ элемент L_1 порождает центр, а централизаторы элементов $\mathfrak{su}(2, 1)$ имеют размерность не выше 3, за исключением случая, когда соответствующая матрица приводится к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

В первом случае $\mathfrak{g}$ вкладывается как $\mathfrak{u}(2)$ и ее орбита должна быть компактной, в отличие от нашей ситуации. Второй же случай действительно реализуется. В этом случае образ $\mathfrak{g}$ соответствует подгруппе $SU(2, 1)$, действующей на трехмерной сфере $S = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1\}$ преобразованиями вида

$$w_1^* = e^{i\theta_1} (1 - |a|^2)^{1/2} \frac{w_1}{1 - \bar{a}w_2}, \quad w_2^* = e^{i\theta_2} \frac{w_2 - a}{1 - \bar{a}w_2}.$$

При этом поле L_1 соответствует поворотам $w_1^* = e^{i\theta_1} w_1$. Поскольку в трубчатой области траектории L_1 – прямые, рассматриваемая орбита $\mathfrak{g}$ CR -эквивалентна универсальной накрывающей поверхности $S' = S \setminus \{w_1 = 0\}$.

Нам удобнее привести эту поверхность дробно-линейным отображением

$$W_1 = w_1, \quad W_2 = -i \frac{w_2 + 1}{w_2 - 1}$$

к виду

$$\{(W_1, W_2) : |W_1|^2 |W_2 + i|^2 = 4 \operatorname{Im} W_2, W_1 \neq 0\},$$

потому что тогда мы можем считать, что полю L_2 соответствует одно из двух векторных полей:

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial W_2} - \frac{W_1}{W_2 + i} \frac{\partial}{\partial W_1} \quad \text{или}$$

$$(b) \quad W_2 \frac{\partial}{\partial W_2} - \frac{W_1}{2} \frac{W_2 - i}{W_2 + i} \frac{\partial}{\partial W_1}.$$

Теперь мы можем явным образом найти голоморфное отображение, реализующее накрытие поверхности S' рассматриваемой орбитой. Оно определяется условием перевода полей L_1 и L_2 соответственно в $iW_1 \frac{\partial}{\partial W_1}$ и поле, задаваемое формулой (a) или (b).

Непосредственное вычисление показывает, что в первом случае отображение имеет вид

$$W_1 = \frac{C_1 e^{iz_1}}{z_2 + C_2 + i}, \quad W_2 = z_2 + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C},$$

а во втором –

$$W_1 = \frac{C_1 e^{iz_1 + z_2/2}}{C_2 e_2^z + i}, \quad W_2 = C_2 e_2^z, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \quad C_2 \neq 0.$$

Трубчатая поверхность, накрывающая S' при этом отображении, и будет орбитой алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, база этой орбиты имеет вид $y_2 = \alpha e^{-2y_1} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, или $e^{-2y_1 + \alpha} = \sin(y_2 + \beta)$ соответственно. Поскольку поле iL_1 коммутирует с полями из алгебры, прочие орбиты получаются из этой сдвигами по координате y_1 . Такие области мы уже получали – в 3-мерном случае они возникали в случаях **B1** и **B2**.

Теперь до конца этого пункта мы будем считать, что ядра обоих операторов $\operatorname{ad} L_1$ и $\operatorname{ad} L_2$ двумерные, т.е. любой ненулевой вектор из $\langle L_1, L_2 \rangle$ коммутирует только с векторами из этого же подпространства.

Допустим, что оператор $\operatorname{ad} L_1$, тем не менее, имеет только нулевые собственные значения. Тогда в подходящем базисе $\mathfrak{g}$ (первые два вектора которого не обязательно совпадают с L_1 и L_2 , а лишь являются их линейными комбинациями) матрица оператора $\operatorname{ad} L_1$ приводится к жордановой нормальной форме вида (a), когда обе клетки размера 2, или (b), когда клетки размера 1 и 3:

$$(a) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{ad} L_2$ коммутирует с $\operatorname{ad} L_1$ и тоже аннигилирует пространство $\langle L_1, L_2 \rangle$, его матрица имеет соответственно вид

$$(a) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \zeta & \eta \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Во втором случае первые три вектора базиса образуют подалгебру с одномерным коммутантом, а все такие области мы уже рассмотрели.

Та же ситуация и в первом случае, если, например, $\gamma = 0$ или $\beta = 0$. Если же эти условия не выполнены, то вспомним, что области, соответствующие трехмерным подалгебрам с коммутантом $\mathfrak{g}^2 = \langle L_1, L_2 \rangle$, уже были построены. Первые три вектора образуют как раз такую подалгебру, а первый, второй и четвертый – еще одну. Рассмотрев действия на подпространстве $\langle L_1, L_2 \rangle$ ad -операторов, соответствующих третьему и четвертому базисному вектору, мы убеждаемся с помощью прямых вычислений, что описания трубчатых областей, соответствующих одной и другой подалгебрам, противоречат друг другу, так что такой области не существует.

Предположим, что оператор $\text{ad } L_1$ имеет ненулевые вещественные собственные значения. Заменяя вектор L_1 на пропорциональный ему, мы можем считать, что $[L_1, b_1] = b_1$ для некоторого $b_1 \in \mathfrak{g} \setminus \langle L_1, L_2 \rangle$. Пусть $b_2 = [L_2, b_1]$, $b_2 \neq 0$. В силу перестановочности L_1 и L_2 получаем, что $[L_1, b_2] = b_2$. При этом векторы b_2 и b_1 линейно независимы, так как в противном случае линейная комбинация векторов L_1 и L_2 коммутирует с b_1 . Таким образом, оператор $\text{ad } L_1$ обладает инвариантным двумерным подпространством, на котором он тождествен. Это подпространство должно быть и $\text{ad } L_2$ -инвариантным, причем согласно сделанному выше предположению $\text{ad } L_2$ не может иметь на нем вещественных собственных значений. Заменяя L_2 на подходящую линейную комбинацию векторов L_1 и L_2 , мы можем считать, что у нового оператора $\text{ad } L_2$ собственные значения на рассматриваемом подпространстве равны $\pm i$, так что в подходящем базисе на подпространстве его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если же оператор $\text{ad } L_1$ имеет комплексные сопряженные (невещественные) собственные значения, то у него опять-таки имеется инвариантное двумерное подпространство, которое должно быть инвариантно и относительно $\text{ad } L_2$. Так как эти два оператора коммутируют и их ограничения на указанное подпространство должны быть линейно независимы по условию, после замены базиса в $\langle L_1, L_2 \rangle$ мы снова можем считать, что в подходящих координатах на инвариантном подпространстве матрицы $\text{ad } L_1$ и $\text{ad } L_2$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

В итоге мы нашли в $\mathfrak{g}$ базис L_1, L_2, b_1, b_2 со следующими соотношениями: $[L_1, b_1] = b_1$, $[L_1, b_2] = b_2$, $[L_2, b_1] = b_2$, $[L_2, b_2] = -b_1$. Они показывают, что элементы b_1 и b_2 коммутируют. Действительно,

$$[L_1, [b_1, b_2]] = -[b_2, [L_1, b_1]] - [b_1, [b_2, L_1]] = -[b_2, b_1] + [b_1, b_2] = 2[b_1, b_2],$$

так что $[b_1, b_2] = 0$, поскольку оператор $\text{ad } L_1$ не имеет собственного значения 2.

Единственный случай, который нам осталось рассмотреть – это случай, когда трубчатая область с алгеброй векторных полей описанной структуры переводится в другую трубчатую область, разумеется, с изоморфной алгеброй, у которой образующие L_1 и L_2 также соответствуют сдвигам вдоль мнимых осей.

Заметим, что $\mathfrak{g}^2 = \langle b_1, b_2 \rangle$, так что эта подалгебра при биголоморфном отображении переходит в аналогичную, в то время как подалгебра $\langle L_1, L_2 \rangle$ переводится в какую-то иную коммутативную подалгебру. Однако все двумерные коммутативные подалгебры $\mathfrak{g}$, отличные от $\langle b_1, b_2 \rangle$, переводятся друг в друга внутренними автоморфизмами соответствующей группы Ли, так что без ограничения общности мы можем считать, что находимся в условиях леммы 1. Это завершает обсуждение случая групп размерности 4.

Итак, результаты статьи можно суммировать в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть две гиперболические трубчатые области в $\mathbb{C}^2$ голоморфно эквивалентны. Тогда они либо аффинно эквивалентны, либо обе могут быть включены (после некоторых аффинных преобразований) в один из следующих четырех списков голоморфно эквивалентных трубчатых областей:

1. (a) область T_{Ω_2} , где $\Omega_2 = \{y_1 > 0, y_2 > 0\}$;
 (b) область $T_{\Omega'_2}$, где $\Omega'_2 = \{\pi > y_1 > 0, \infty > y_2 > 0\}$;
 (c) область $T_{\Omega''_2}$, где $\Omega''_2 = \{\pi > y_1 > 0, \pi > y_2 > 0\}$;
2. (a) область T_{Ω_3} , где $\Omega_3 = \{y_2 > -\ln \sin(y_1), \pi > y_1 > 0\}$;
 (b) область $T_{\Omega'_3}$, где $\Omega'_3 = \{y_2 > e^{y_1}\}$;
3. (a) область T_{Ω_*} , где $\Omega_* = \{y_2 < -\ln \sin(y_1)\}$, $y_1 \in (0, \pi)$;
 (b) область T_{Ω_+} , где $\Omega_+ = \{e^{y_1} > y_2 > 0\}$;
4. (a) область T_{Ω_s} , где $\Omega_s = \{-\ln \sin(y_1) + s > y_2 > -\ln \sin(y_1)\}$, $s > 0$, $y_1 \in (0, \pi)$;
 (b) область T_{Ω_h} , где $\Omega_h = \{he^{y_1} > y_2 > e^{y_1}\}$, $h = e^s$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yang P. C. Automorphisms of tube domains // Amer. J. Math. 1982. V. 104. № 5. P. 1005–1024.
- [2] Shimizu S. Automorphisms and equivalence of tube domains with bounded base // Math. Ann. 1999. V. 315. P. 295–320.
- [3] Shimizu S. A classification of two-dimensional tube domains // Amer. J. Math. 2000. V. 122. P. 1289–1308.
- [4] Солдаткин П. А. Голоморфная эквивалентность областей Рейнхарта в $\mathbb{C}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 6. С. 187–222.
- [5] Kobayashi S. Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings: Marcel Dekker, 1970.
- [6] Kaup W. Reeple Transformationgruppen und invariante metriken auf komplexen raumen // Invent. Math. 1967. V. 3. P. 43–70.
- [7] Nakajima K. Homogeneous hyperbolic manifolds and homogeneous Siegel domains // J. Math. Kyoto Univ. 1985. V. 25. № 2. P. 269–291.
- [8] Кружилин Н. Г. Автоморфизмы гиперболических областей Рейнхарта // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 1. С. 16–40.
- [9] Eastwood A. A propos des varietés hyperboliques complètes // C. R. Acad. Sc. Paris. 1975. V. 280. P. 1071–1074.
- [10] Арнольд В. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
- [11] Белашапка В. К. Вещественные подмногообразия в комплексном пространстве: полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 3–44.

(Н. Г. Кружилин) Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 (П. А. Солдаткин) Российский государственный
 гуманитарный университет, г. Москва

Поступило
 24.11.2003