Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, Об одной экстремальной задаче для периодических функций с малым носителем, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 773–778

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm630>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:22:59

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМ НОСИТЕЛЕМ

Д. В. Горбачев

В статье [1] в связи с приложениями к аналитической теории чисел [2, гл. 14] поставлена следующая экстремальная задача. Будем использовать сокращения $c(t) = \cos(2\pi t)$, $s(t) = \sin(2\pi t)$.

Пусть $0 < h \leq 1/2$, $K(h)$ – класс 1-периодических непрерывных четных действительных функций f , удовлетворяющих условиям

$$1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c(nx);$$

$$2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1;$$

$$3) \quad f(x) = 0 \text{ при } h \leq |x| \leq 1/2.$$

Требуется найти величину

$$B(h) = \sup_{f \in K(h)} a_0 = \sup_{f \in K(h)} \int_{-h}^h f(x) dx.$$

В [1] величина $B(h)$ вычислена при $h = 1/4$:

$$B\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2 + \pi/2} = 0.28004 \dots;$$

экстремальная функция при $|x| \leq 1/2$ равна

$$f_{1/4}^*(x) = \pi B\left(\frac{1}{4}\right) c(x) \chi_{1/4}(x) = B\left(\frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{\pi}{2} c(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2c(n/4)}{1 - n^2} c(nx)\right).$$

Здесь χ_a – характеристическая функция отрезка $[-a, a]$. Для других h величина $B(h)$ оставалась неизвестной. В данной работе величина $B(h)$ вычисляется при $h = 1/2, 1/3, 1/5$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00644, и грант “Мас” № 02-01-06563.

ТЕОРЕМА. *Справедливы следующие результаты.*

1. При $h = 1/2$

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = 0.5;$$

экстремальные функции ($|x| \leq 1/2$)

$$f_{1/2,1}^*(x) = \frac{\pi}{4} c\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} c(nx),$$

$$f_{1/2,2}^*(x) = 1 - 2|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{(\pi n)^2} c(nx).$$

2. При $h = 1/3$

$$B\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2 + \pi/(3\sqrt{3})} = 0.38393 \dots;$$

экстремальная функция ($|x| \leq 1/2$)

$$f_{1/3}^*(x) = \frac{2\pi}{3} B\left(\frac{1}{3}\right) s\left(\frac{1}{3} - |x|\right) \chi_{1/3}(x)$$

$$= B\left(\frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} c(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(1 + 2c(n/3))}{3(1 - n^2)} c(nx)\right).$$

3. При $h = 1/5$

$$B\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2 + (3\pi/5) \operatorname{ctg}(\pi/5)} = 0.21765 \dots;$$

экстремальная функция ($|x| \leq 1/2$)

$$f_{1/5}^*(x) = \frac{\pi}{2 \sin^2(\pi/5)} B\left(\frac{1}{5}\right) s\left(\frac{1}{5} - |x|\right) \chi_{1/5}(x)$$

$$= B\left(\frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{2\pi \operatorname{ctg}(\pi/5)}{5} c(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c(n/5) - c(1/5)}{\sin^2(\pi/5)(1 - n^2)} c(nx)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство для $h = 1/2, 1/3$ мало отличается от доказательства случая $h = 1/4$ [1]. Принципиально новым является случай $h = 1/5$.

1. Случай $h = 1/2$. Оценка сверху величины $B(1/2)$ следует из свойств 1)–3) класса $K(1/2)$: для функции $f \in K(1/2)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 0$$

$$\implies a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \implies |a_0| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 - |a_0|$$

$$\implies a_0 \leq |a_0| \leq \frac{1}{2}.$$

В оценке снизу замечаем, что для функций $f_{1/2,i}^*$, $i = 1, 2$,

$$a_0 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому для доказательства экстремальности функций $f_{1/2,i}^*$ остается выяснить их принадлежность к классу $K(1/2)$. При этом достаточно проверить условие 2) класса $K(1/2)$, так как условия 1) и 3), очевидно, выполнены.

Для коэффициентов Фурье функции $f_{1/2,1}^*$ справедливы соотношения

$$|a_0| = a_0, \quad |a_n| = (-1)^{n-1} a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, сумма модулей коэффициентов Фурье функции $f_{1/2,1}^*$ равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2a_0 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 1 - f_{1/2,1}^*\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Для коэффициентов Фурье функции $f_{1/2,2}^*$ справедливы соотношения

$$|a_n| = a_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Следовательно, сумма модулей коэффициентов Фурье функции $f_{1/2,2}^*$ равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = f_{1/2,2}^*(0) = 1.$$

2. Случай $h = 1/3$. Из свойств 1)–3) для функции $f \in K(1/3)$ имеем

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 &\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n c(n/3) = 0 \\ &\iff \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{3\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{3\nu+1} + a_{3\nu+2}) = 0 \\ &\implies a_0 = - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{3\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{3\nu+1} + a_{3\nu+2}) \\ &\implies |a_0| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{3\nu}| + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (|a_{3\nu+1}| + |a_{3\nu+2}|), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{1/3}^{1/2} f(x) dx = 0 &\iff \frac{a_0}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n s(n/3)}{2\pi n} = 0 \\ &\implies \frac{\pi}{3\sqrt{3}} a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_{3\nu+1}}{3\nu+1} - \frac{a_{3\nu+2}}{3\nu+2} \right) \\ &\implies \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |a_0| \leq \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (|a_{3\nu+1}| + |a_{3\nu+2}|). \end{aligned} \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), выводим оценку сверху величины $B(1/3)$:

$$|a_0| \left(1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 - |a_0| \implies a_0 \leq |a_0| \leq \frac{1}{2 + \pi/(3\sqrt{3})} = B.$$

В оценке снизу замечаем, что для функции $f_{1/3}^*$

$$a_0 = B.$$

Поэтому для доказательства экстремальности функции $f_{1/3}^*$ остается проверить ее принадлежность к классу $K(1/3)$. При этом достаточно проверить условие 2) класса $K(1/3)$, так как условия 1) и 3), очевидно, выполнены.

Используя известное в теории рядов Фурье равенство

$$\frac{f(0) + 2f(1/3)}{3} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{3\nu} \iff \frac{f(0)}{3} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{3\nu}, \quad \text{если } f \in K\left(\frac{1}{3}\right), \quad (3)$$

и соотношения

$$\begin{aligned} |a_0| &= a_0, & |a_1| &= a_1, & |a_{3\nu}| &= -a_{3\nu}, & |a_{3\nu+1}| &= 0, & \nu &= 1, 2, \dots, \\ |a_{3\nu+2}| &= 0, & \nu &= 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

для коэффициентов Фурье функции $f_{1/3}^*$, находим, что сумма модулей коэффициентов Фурье функции $f_{1/3}^*$ равна

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| &= a_0 + a_1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{3\nu} = 2a_0 + a_1 - \frac{f_{1/3}^*(0)}{3} \\ &= 2B + B \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - B \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = B \left(2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) = 1. \end{aligned}$$

3. Случай $h = 1/5$. Из свойств 1)–3) для функции $f \in K(1/5)$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1 f\left(\frac{1}{5}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi\beta_1 \int_{1/5}^{1/2} f(x) dx + 2\pi\beta_2 \int_{2/5}^{1/2} f(x) dx &= 0 \\ \iff a_0 \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\pi}{5}(3\beta_1 + \beta_2) \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) a_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$, – пока неопределенные коэффициенты,

$$\omega(n) = -\alpha(n) + \frac{\beta(n)}{n}, \quad \alpha(n) = \alpha_1 c\left(\frac{n}{5}\right) + \alpha_2 c\left(\frac{2n}{5}\right), \quad \beta(n) = \beta_1 s\left(\frac{n}{5}\right) + \beta_2 s\left(\frac{2n}{5}\right).$$

Выберем коэффициенты α_i, β_i из условий

$$\begin{cases} \alpha(0) = 1, \\ \alpha(2) = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} -\alpha(1) + \beta(1) = 1, \\ \beta(2) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Так как $\alpha(n)$ – 5-периодический четный полином без нулевого коэффициента на целочисленной сетке, его среднее значение на сетке равно нулю:

$$\alpha(0) + 2(\alpha(1) + \alpha(2)) = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha(1) = \frac{1}{2} \quad (6)$$

и вторая система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} \beta(1) = \frac{3}{2}, \\ \beta(2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta_1 s\left(\frac{1}{5}\right) + \beta_2 s\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{2}, \\ \beta_1 s\left(\frac{2}{5}\right) - \beta_2 s\left(\frac{1}{5}\right) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Покажем, что $|\omega(n)| \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$. Используя 5-периодичность полиномов α и β , четность α и нечетность β , значения α и β в целых точках (5)–(7), получаем

$$\begin{aligned}\omega(5\nu) &= -\alpha(0) = -1, & \nu &= 1, 2, \dots, \\ \omega(5\nu + 1) &= -\alpha(1) + \frac{\beta(1)}{5\nu + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{3/2}{5\nu + 1} \\ &\implies -\frac{1}{2} \leq \omega(5\nu + 1) \leq 1, & \nu &= 0, 1, \dots, \\ \omega(5\nu + 2) &= \omega(5\nu + 3) = -\alpha(2) = 1, & \nu &= 0, 1, \dots, \\ \omega(5\nu + 4) &= -\alpha(1) - \frac{\beta(1)}{5\nu + 4} = -\frac{1}{2} - \frac{3/2}{5\nu + 4} \\ &\implies -\frac{7}{8} \leq \omega(5\nu + 4) \leq -\frac{1}{2}, & \nu &= 0, 1, \dots.\end{aligned}$$

Из неравенства $|\omega(n)| \leq 1$ и (4) следует оценка

$$|a_0| \left| \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\pi}{5}(3\beta_1 + \beta_2) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 - |a_0|. \quad (8)$$

Из системы (7) находим

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{3}{2s(1/5)(1 + 4c^2(1/5))}, & \beta_2 &= \frac{3c(1/5)}{s(1/5)(1 + 4c^2(1/5))}, \\ 3\beta_1 + \beta_2 &= 3 \frac{3 + 2c(1/5)}{2s(1/5)(1 + 4c^2(1/5))}.\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}c\left(\frac{1}{5}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\xi^2 - 1, & s\left(\frac{1}{5}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \xi, \\ 2c^2\left(\frac{1}{5}\right) &= 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \xi,\end{aligned}$$

где $\xi = \cos(\pi/5)$, используя несколько раз уравнение

$$4\xi^2 - 2\xi - 1 = 0$$

для ξ (которое легко выводится из тождества $\sin(2\pi/5) = \sin(3\pi/5)$), находим

$$\begin{aligned}3\beta_1 + \beta_2 &= 3 \frac{3 + 2(2\xi^2 - 1)}{4 \sin(\pi/5) \xi (1 + 2(1 - \xi))} = \frac{3}{\sin(\pi/5)} \frac{4\xi^2 + 1}{4(3\xi - 2\xi^2)} \\ &= \frac{3}{\sin(\pi/5)} \frac{4\xi^2 + 1}{4(3\xi - \xi - 1/2)} = \frac{3\xi}{\sin(\pi/5)} \frac{4\xi^2 + 1}{2(4\xi^2 - \xi)} \\ &= \frac{3\xi}{\sin(\pi/5)} \frac{2\xi + 2}{2(2\xi + 1 - \xi)} = 3 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Подставляя полученное равенство вместе с равенством

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha(0) = 1$$

в (8), окончательно выводим оценку сверху величины $B(1/5)$:

$$|a_0| \left| 1 + \frac{3\pi}{5} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right| \leq 1 - |a_0| \implies a_0 \leq |a_0| \leq \frac{1}{2 + (3\pi/5) \operatorname{ctg}(\pi/5)} = B.$$

В оценке снизу замечаем, что для функции $f_{1/5}^*$

$$a_0 = B.$$

Поэтому для доказательства экстремальности функции $f_{1/5}^*$ остается выяснить ее принадлежность к классу $K(1/5)$. При этом достаточно проверить условие 2) класса $K(1/5)$, так как условия 1) и 3), очевидно, выполнены.

Используя известные в теории рядов Фурье равенства (в которых учтено, что $f \in K(1/5)$)

$$\frac{f(0)}{5} = \frac{f(0) + 2(f(1/5) + f(2/5))}{5} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{5\nu}, \quad (9)$$

$$\frac{2f(0)}{5} = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 f\left(\frac{k}{5}\right) c\left(\frac{2k}{5}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{5\nu+2} + a_{5\nu+3}) \quad (10)$$

и соотношения

$$\begin{aligned} |a_0| &= a_0, & |a_1| &= a_1, \\ |a_{5\nu}| &= -a_{5\nu}, & |a_{5\nu+1}| &= 0, & \nu &= 1, 2, \dots, \\ |a_{5\nu+2}| &= a_{5\nu+2}, & |a_{5\nu+3}| &= a_{5\nu+3}, & |a_{5\nu+4}| &= 0, & \nu &= 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

для коэффициентов Фурье функции $f_{1/5}^*$, находим, что сумма модулей коэффициентов Фурье функции $f_{1/5}^*$ равна

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| &= a_0 + a_1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{5\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{5\nu+2} + a_{5\nu+3}) \\ &= 2a_0 + a_1 - \frac{f_{1/5}^*(0)}{5} + \frac{2f_{1/5}^*(0)}{5} = 2B + B \frac{2\pi}{5} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{\pi B \sin(2\pi/5)}{10 \sin^2(\pi/5)} \\ &= B \left(2 + \frac{2\pi}{5} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{\pi}{5} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) = 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В. А. Юдину за указание на возможность использования тождеств (3), (9), (10) для суммирования коэффициентов Фурье.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Н. Н., Конягин С. В., Попов А. Ю. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 323–332.
2. Konyagin S., Shparlinski I. Character Sums with Exponential Functions and Their Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

Тульский государственный университет

E-mail: dvg@uic.tula.ru, <http://home.uic.tula.ru/~gd030473>

Поступило

03.10.2002