Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О некоторых априорных оценках для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 792–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:02:08

О НЕКОТОРЫХ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛРА

А. А. Коньков

Рассматриваются решения нелинейной системы

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^{(m_0)} = q_0(r) |w_1^{(k_1)}|^{\lambda_0} \operatorname{sign} w_1, \\ \dots \\ w_i^{(m_i)} = q_i(r) |w_{i+1}^{(k_{i+1})}|^{\lambda_i} \operatorname{sign} w_{i+1}, \\ \dots \\ w_{n-1}^{(m_{n-1})} = q_{n-1}(r) |w_0^{(k_0)}|^{\lambda_{n-1}} \operatorname{sign} w_0, \end{array} \quad r > a > 0, \right. \quad (1)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$w_i^{(s)}(a) > 0, \quad s = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 0, \dots, n - 1, \quad (2)$$

где $n \geq 2$, $m_i > k_i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, а $q_i \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательные функции, $i = 0, \dots, n - 1$.

Системы вида (1) изучались в работах [1]–[3].

Для произвольного вещественного числа $\sigma \in (1, \infty)$ и измеримой функции $\varphi: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$\varphi(r; \sigma) = \operatorname{ess\,inf}_{(r/\sigma, r\sigma) \cap [a, \infty)} \varphi.$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}, \\ m &= m_j - k_j + \sum_{i=1}^{n-1} l(i, j)(m_{i+j} - k_{i+j}), \\ \alpha_j &= l(n, j)(m_j - k_j - 1) + \sum_{i=1}^{n-1} l(i, j)(m_{i+j} - k_{i+j}) \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00512.

и

$$F_{\sigma,j}(r) = q_j(r; \sigma) \prod_{i=1}^{n-1} q_{i+j}^{l(i,j)}(r; \sigma),$$

где $l(s, j) = \prod_{i=0}^{s-1} \lambda_{i+j}$, $s = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, n-1$. Заметим, что сумму нижних индексов следует брать по модулю целого числа n , т.е. если $i+j \geq n$, то в качестве значения индекса берется остаток от деления $i+j$ на n .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lambda < 1$ и при этом

$$\int_a^\infty r^{\alpha_j} F_{\sigma,j}(r) dr = \infty \quad (3)$$

для некоторых $\sigma \in (1, \infty)$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Тогда любое решение задачи (1), (2), определенное на целом промежутке $[a, \infty)$, допускает оценку

$$w_j^{(i)}(r) \geq A r^{m_j - i - 1} \left(\int_a^r \xi^{\alpha_j} F_{\sigma,j}(\xi) d\xi \right)^{1/(1-\lambda)}, \quad i = 0, \dots, k_j,$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $A > 0$ зависит только от $n, \sigma, m_0, \dots, m_{n-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda = 1$ и для некоторых $\sigma \in (1, \infty)$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$ имеет место (3). Тогда любое решение задачи (1), (2), определенное на целом промежутке $[a, \infty)$, допускает оценку

$$w_j^{(i)}(r) \geq r^{m_j - i - 1} \exp \left(A \left(\int_a^r \xi^{\alpha_j} F_{\sigma,j}(\xi) d\xi \right)^{1/m} \right), \quad i = 0, \dots, k_j,$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $A > 0$ зависит только от $n, \sigma, m_0, \dots, m_{n-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторых $\sigma \in (1, \infty)$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$ выполнено соотношение (3) и при этом $\lambda > 1$. Тогда у задачи (1), (2) не существует решений, определенных на целом промежутке $[a, \infty)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} w_0^{(m_0)} = q_0(r) |w_1|^{\lambda_0} \operatorname{sign} w_1, \\ w_1^{(m_1)} = q_1(r) |w_0|^{\lambda_1} \operatorname{sign} w_0, \end{cases} \quad r > a > 0, \quad (4)$$

где $q_i \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательные функции, $m_0, m_1 \geq 1$, $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$, $\lambda_0 \lambda_1 > 1$, и для некоторых $s_i \in \mathbb{R}$

$$q_i(r) \sim r^{s_i} \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, \quad (5)$$

т.е. найдутся постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что для всех r из окрестности бесконечности $c_1 r^{s_i} \leq q_i(r) \leq c_2 r^{s_i}$, $i = 0, 1$.

Согласно теореме 3, если выполнено хотя бы одно из двух неравенств

$$\lambda_0 m_1 + \lambda_0 \lambda_1 (m_0 - 1) + s_0 + \lambda_0 s_1 + 1 \geq 0 \quad (\text{случай } j = 0) \quad (6)$$

либо

$$\lambda_1 m_0 + \lambda_1 \lambda_0 (m_1 - 1) + s_1 + \lambda_1 s_0 + 1 \geq 0 \quad (\text{случай } j = 1), \quad (7)$$

то у системы (4) не существует решений, определенных на всем промежутке $[a, \infty)$ и таких, что

$$w_i^{(k)}(a) > 0, \quad k = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 0, 1. \quad (8)$$

Предположим, что не справедливо ни одно из неравенств (6) и (7). Тогда, полагая

$$w_0(r) = r^{\frac{s_0+m_0+\lambda_0(s_1+m_1)}{1-\lambda_0\lambda_1}}, \quad w_1(r) = r^{\frac{s_1+m_1+\lambda_1(s_0+m_0)}{1-\lambda_0\lambda_1}},$$

получим для некоторых положительных функций $q_i \in C([a, \infty))$ вида (5) решение задачи (4), (8) на всем промежутке $[a, \infty)$.

Пусть теперь

$$q_i(r) \sim r^{s_i} \ln^{\mu_i} r \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, \quad (9)$$

где

$$\lambda_0 m_1 + \lambda_0 \lambda_1 (m_0 - 1) + s_0 + \lambda_0 s_1 + 1 = 0$$

и

$$\lambda_1 m_0 + \lambda_1 \lambda_0 (m_1 - 1) + s_1 + \lambda_1 s_0 + 1 < 0.$$

Тогда согласно теореме 3 отсутствие у задачи (4), (8) решений, определенных на целом промежутке $[a, \infty)$, гарантируется неравенством

$$\mu_0 + \lambda_0 \mu_1 + 1 \geq 0. \quad (10)$$

Покажем точность последнего соотношения. В самом деле, предположим, что (10) не имеет места. Считая без ограничения общности, что $a > 0$ достаточно велико, несложно убедиться, что выражения

$$w_0(r) = r^{m_0-1} (\ln r)^{\frac{\mu_0+\lambda_0\mu_1+1}{1-\lambda_0\lambda_1}},$$

$$w_1(r) = r^{s_1+\lambda_1(m_0-1)+m_1} (\ln r)^{\mu_1+\frac{\lambda_1(\mu_0+\lambda_0\mu_1+1)}{1-\lambda_0\lambda_1}}$$

для подходящих положительных функций $q_i \in C([a, \infty))$, удовлетворяющих условиям (9), дают нам пример искомого решения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\lambda > 1$ и

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{\alpha_j+1} F_{\sigma,j}(r) > 0$$

для некоторых $\sigma \in (1, \infty)$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Тогда у задачи (1), (2) не существует решений, определенных на целом промежутке $[a, \infty)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\lambda = 1$ и при этом

$$\int_a^\infty \min\{r^{\alpha_j} F_{\sigma,j}(r), r^{\frac{\alpha_j+1}{m}-1} F_{\sigma,j}^{\frac{1}{m}}(r)\} dr = \infty$$

для некоторых $\sigma \in (1, \infty)$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Тогда любое решение задачи (1), (2), определенное на целом промежутке $[a, \infty)$, удовлетворяет оценке

$$w_j^{(i)}(r) \geq r^{m_j-i-1} \exp\left(A \int_a^r \min\{\xi^{\alpha_j} F_{\sigma,j}(\xi), \xi^{\frac{\alpha_j+1}{m}-1} F_{\sigma,j}^{\frac{1}{m}}(\xi)\} d\xi\right)$$

для всех $i \in \{0, \dots, k_j\}$ и достаточно больших r , где постоянная $A > 0$ зависит только от $n, \sigma, m_0, \dots, m_{n-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\lambda > 1$ и для некоторых $\sigma \in (1, \infty)$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$ выполнено условие

$$\int_a^\infty r^{\alpha_j} F_{\sigma,j}(r) dr < \infty.$$

Тогда любое решение задачи (1), (2), определенное на целом промежутке $[a, \infty)$, удовлетворяет для всех $r \geq a$ следующему неравенству:

$$w_j^{(m_j-1)}(r) \leq A \left(\int_r^\infty \xi^{\alpha_j} F_{\sigma,j}(\xi) d\xi \right)^{-\frac{1}{\lambda-1}},$$

где константа $A > 0$ зависит только от $n, \sigma, m_0, \dots, m_{n-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В предположениях теоремы 5 любое решение задачи (1), (2), определенное на целом промежутке $[a, \infty)$, допускает оценку

$$w_j^{(i)}(r) \leq Ar^{m_j-i-1} \left(\int_r^\infty \xi^{\alpha_j} F_{\sigma,j}(\xi) d\xi \right)^{-\frac{1}{\lambda-1}}, \quad i = 0, \dots, m_j - 1,$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $A > 0$ зависит только от $n, \sigma, m_0, \dots, m_{n-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим решения системы

$$\begin{cases} w_0^{(m_0)} = q_0(r)|w_1|^{\lambda_0} \operatorname{sign} w_1, \\ w_1^{(m_1)} = q_1(r)|w_2|^{\lambda_1} \operatorname{sign} w_2, \\ w_2^{(m_2)} = q_2(r)|w_0|^{\lambda_2} \operatorname{sign} w_0, \end{cases} \quad r > a > 0, \quad (11)$$

такие, что

$$w_i^{(k)}(a) > 0, \quad k = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 0, 1, 2, \quad (12)$$

где $m_0, m_1, m_2 \geq 1$, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 > 1$, а $q_i \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательные функции, причем для некоторых $s_i \in \mathbb{R}$

$$q_i(r) \sim r^{s_i} \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2. \quad (13)$$

Допустим также, что

$$\lambda_0 m_1 + \lambda_0 \lambda_1 m_2 + \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 (m_0 - 1) + s_0 + \lambda_0 s_1 + \lambda_0 \lambda_1 s_2 + 1 < 0, \quad (14)$$

$$\lambda_1 m_2 + \lambda_1 \lambda_2 m_0 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_0 (m_1 - 1) + s_1 + \lambda_1 s_2 + \lambda_1 \lambda_2 s_0 + 1 < 0, \quad (15)$$

$$\lambda_2 m_0 + \lambda_2 \lambda_0 m_1 + \lambda_2 \lambda_0 \lambda_1 (m_2 - 1) + s_2 + \lambda_2 s_0 + \lambda_2 \lambda_0 s_1 + 1 < 0. \quad (16)$$

Тогда, применяя следствие 2, будем иметь, что любое решение задачи (11), (12) для достаточно больших r удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} w_0(r) &\leq Ar^{\frac{\nu_0 + \nu_1 \lambda_0 + \nu_2 \lambda_0 \lambda_1}{1 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}}, & w_1(r) &\leq Ar^{\frac{\nu_1 + \nu_2 \lambda_1 + \nu_0 \lambda_1 \lambda_2}{1 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}}, \\ w_2(r) &\leq Ar^{\frac{\nu_2 + \nu_0 \lambda_2 + \nu_1 \lambda_2 \lambda_0}{1 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}}, \end{aligned}$$

где $\nu_i = s_i + m_i$, $i = 0, 1, 2$, и при этом постоянная $A > 0$ не зависит от w_1, w_2, w_3 .

Чтобы убедиться в точности полученной оценки, достаточно проверить, что правые части приведенных выше неравенств сами являются решением задачи (11), (12) при подходящем выборе положительных функций $q_i \in C([a, \infty))$ вида (13).

Заметим, что если хотя бы одно из соотношений (14)–(16) перестает быть верным, то согласно теореме 3 задача (11), (12) не имеет решений, определенных на всем промежутке $[a, \infty)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабцевич В. А. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 2. С. 222–227. 2. Рабцевич В. А. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. 85–93. 3. Yagur S. // Lecture Notes in Pure and Appl. Math.. № 194. New York: Dekker, 1998. P. 401–409.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `konkov@mech.math.msu.su`

Поступило
16.09.02