Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, И. А. Гордеева, Псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана–Картана, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 267–279

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:20:04

Псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана–Картана

С. Е. Степанов, И. А. Гордеева

Инвариантным образом выделены шесть классов многообразий Римана–Картана. Найдены геометрические характеристики некоторых из выделенных классов многообразий Римана–Картана, а также условия, которые препятствуют их существованию. Изучена локальная геометрия многообразий Римана–Картана, несущих псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля. Получены условия, препятствующие существованию “в целом” на многообразиях Римана–Картана псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей.

Библиография: 34 названия.

1. Введение

1.1. Начало теории метрически-аффинных многообразий было положено в 20-х годах прошлого века Картаном (см. [1]–[3]), который предложил вместо связности Леви–Чивита ∇ на псевдоримановом многообразии (M, g) рассматривать несимметричную линейную связность $\bar{\nabla}$, обладающую свойством метричности $\bar{\nabla}g = 0$. В этом случае пространство-время в рамках общей теории относительности получило в дополнение к кривизне еще и кручение. Но вплоть до начала 60-х годов идея Картана не находила поддержки у физиков-теоретиков. Толчком к изучению послужили работы Т. Кибла и Д. Сциямы начала 60-годов прошлого века, которые независимо друг от друга установили связь между кручением $\bar{S}$ связности $\bar{\nabla}$ и спин тензором материи. Были обнаружены и другие физические приложения понятия кручения (см. [4]). Новая теория получила название *теория гравитации Эйнштейна–Картана* (см. [5]). К настоящему времени число работ, написанных в рамках этой теории, исчисляется десятками. Опубликованные результаты имеют в большей степени физический характер (см., например, [4]–[7]).

1.2. Идеи Картана уже тогда, в первой половине 20-го века, нашли отражение в известных монографиях Эйзенхарта, Схоутена и Д. Дж. Стройка и др. по дифференциальной геометрии. Но на сегодняшний день следует констатировать, что на контрасте с постоянно увеличивающимся потоком работ физического содержания число работ по геометрии псевдоримановых многообразий с несимметрической метрической связностью или в принятой современной физикой терминологии *многообразий (пространств) Римана–Картана* исчисляется единицами. Из всех классов многообразий Римана–Картана в дифференциальной геометрии последовательно и

в течение длительного времени изучались только “четверть-симметрические метрические пространства” и “полусимметрические метрические пространства” (см., например, [8]–[12]).

Геометрия “в целом” многообразий Римана–Картана застыла на результатах Гольдберга, Яно и Бохнера середины прошлого века (см. [13]–[15]). Были доказаны “теоремы исчезновения” для псевдокиллинговых и псевдогармонических векторов и тензоров на компактных многообразиях с положительно определенной метрикой g и связностью $\bar{\nabla}$ с кручением $\bar{S}$ такими, что $\bar{\nabla}g = 0$ и $\text{trac}\bar{S} = 0$. При этом условия препятствия, сформулированные в теоремах, поражают своей громоздкостью, в отличие от аналогичных теорем тех же авторов для киллинговых и гармонических векторов и тензоров на римановых многообразиях (см., например, [14; с. 35, 36, 54, 56]). Упрощения условий препятствия авторам удавалось достичь только для случая многообразий с антисимметричным тензором кручения $\bar{S}$ связности $\bar{\nabla}$. Попытка обобщения этих результатов за счет введения в рассмотрение конформно-псевдо-киллинговых векторных полей на подобных компактных многообразиях с краем (см. [16]) свелась к доказательству мало отличимых от уже доказанных “теорем исчезновения”.

Следует особо отметить, что геометрия псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров, а также многообразий Римана–Картана, несущих такие поля, ни до, ни после выхода цитируемых выше работ никем не рассматривалась.

1.3. В настоящей статье с помощью неприводимого относительно действия ортогональной группы разложения *тензора деформации* инвариантным образом выделены шесть классов многообразий Римана–Картана с положительно определенной метрикой. Найдены геометрические характеристики некоторых из этих классов многообразий, а также условия, которые препятствуют их существованию. Установлена связь выделенных классов многообразий Римана–Картана с известными классами почти эрмитовых многообразий.

В статье изучена геометрия двух классов многообразий Римана–Картана, несущих псевдокиллинговые и псевдогармонические векторные поля. Получены условия, препятствующие существованию “в целом” на компактных многообразиях Римана–Картана из этих двух классов псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей. Приведенные в статье утверждения геометрически содержательны в отличие от уже имеющихся результатов. Отработанная методика исследований может быть применена для изучения псевдо-конформно-киллинговых (см. [16]), торсообразующих (см. [17; с. 322]) и других векторных полей на многообразиях Римана–Картана. Кроме того, доказанные теоремы можно перенести на лоренцевы многообразия, придав им физический смысл, рассматривая там уже мнимоединичные векторные поля так, как это было сделано в работе одного из авторов [18].

Результаты данной статьи были анонсированы ее авторами на ряде международных конференций (см. [19]–[21]).

2. Многообразие Римана–Картана

2.1. Под *многообразием Римана–Картана* будем понимать триплет (M, g, T) , где (M, g) – риманово n -мерное ($n \geq 2$) многообразие с определенным на нем тензорным полем T , которое является гладким сечением тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^2 M$.

На многообразии (M, g, T) помимо связности Леви-Чивита ∇ зададим *присоединенную линейную связность* $\bar{\nabla} = \nabla + T^\#$ для тензора деформации $T^\#$ такого, что $g(T^\#(X, Y), Z) = T(X, Y, Z)$. Здесь и далее, если не оговорено противное, X, Y, Z – произвольные гладкие векторные поля на M . Присоединенная связность имеет ненулевое кручение

$$\bar{S}(X, Y) = \frac{1}{2}(T^\#(X, Y) - T^\#(Y, X)) \quad (2.1)$$

и обладает свойством метричности

$$(\bar{\nabla}_Z g)(X, Y) = T(Z, Y, X) + T(Z, X, Y) = 0. \quad (2.2)$$

При этом из (2.1) следует, что

$$2 \operatorname{trace} \bar{S} = \operatorname{trace} T, \quad (2.3)$$

где

$$(\operatorname{trace} \bar{S})(X) := g(\bar{S}(e_i, X), e_i) \quad \text{и} \quad (\operatorname{trace} T)(X) := T(e_i, X, e_i)$$

для ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ касательного пространства $T_x M$ в произвольной точке $x \in M$.

2.2. Имеет место (см. [22; с. 154–162]) поточечное $O(n)$ -неприводимое разложение

$$T^*M \otimes \Lambda^2 M \cong \mathfrak{S}_1(M) \oplus \mathfrak{S}_2(M) \oplus \mathfrak{S}_3(M)$$

тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^2 M$ со следующими ортогональными проекциями на неприводимые компоненты разложения (см., например, [23]):

$$^{(1)}T(X, Y, Z) := (\operatorname{Pr}_{\mathfrak{S}_1(M)} T)(X, Y, Z) = 3^{-1}(T(X, Y, Z) + T(Y, Z, X) + T(Z, X, Y)),$$

$$^{(2)}T(X, Y, Z) := (\operatorname{Pr}_{\mathfrak{S}_2(M)} T)(X, Y, Z) = g(X, Z)\omega(Y) - g(X, Y)\omega(Z),$$

$$^{(3)}T(X, Y, Z) := (\operatorname{Pr}_{\mathfrak{S}_3(M)} T)(X, Y, Z) = T(X, Y, Z) - ^{(1)}T(X, Y, Z) - ^{(2)}T(X, Y, Z),$$

где $\omega := (n-1)^{-1} \operatorname{trace} T$.

Будем говорить, что многообразие Римана–Картана (M, g, T) , равно как и его присоединенная связность $\bar{\nabla}$, принадлежат классу $\mathfrak{S}_\alpha$ или $\mathfrak{S}_\alpha \oplus \mathfrak{S}_\beta$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $\alpha < \beta$, если в каждой точке $x \in M$ тензорное поле T является гладким сечением соответствующего тензорного расслоения $\mathfrak{S}_\alpha(M)$ или $\mathfrak{S}_\alpha(M) \oplus \mathfrak{S}_\beta(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. С учетом предложенной классификации можно констатировать, что Гольдберг, Яно и Бохнер, а также Кубо, доказывали свои “теоремы исчезновения” на компактных ориентированных многообразиях Римана–Картана классов $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_1$. Это вызвано тем, что только для этих многообразий выполняется равенство $\operatorname{div} X = \operatorname{trace} \bar{\nabla} X$, дающее возможность применить теорему Грина (см. [24; с. 259]) в форме $\int_M (\operatorname{trace} \bar{\nabla} X) dv = 0$, которая лежит в основе классической “техники Бохнера” для многообразий Римана–Картана.

2.3. Приведем пример многообразия Римана–Картана. Для чего введем в рассмотрение *почти эрмитовое многообразие* (см. [25; с. 139]), которое определяется как триплет (M, g, J) , где пара (M, g) – риманово $2m$ -мерное многообразие с почти комплексной структурой J , совместимой с метрикой g , т.е. $J^2 = -\operatorname{Id}_M$ и $g(J, J) = g$.

Непосредственно проверяется, что присоединенная связность $\bar{\nabla} = \nabla + T^\#$ для тензора деформации $T^\# = \nabla J$ будет несимметрической метрической связностью (см. [26]). В итоге почти эрмитовое многообразие (M, g, J) вместе с тензорным полем $T^\# = \nabla J$ становится примером многообразия Римана–Картана. Известна классификация почти эрмитовых многообразий (см. [27]), основанная на поточечно $U(m)$ -неприводимом разложении тензорного поля $\nabla\Omega$ для *фундаментальной 2-формы* $\Omega(X, Y) := g(X, JY)$ почти эрмитова многообразия (M, g, J) (см. [25; с. 140]).

Перечислим некоторые из классов почти эрмитовых многообразий вместе с тождествами, их характеризующими. *Почти семи-келеровы* многообразия (см. [28]) выделяются условием $\text{trac} \nabla J = 0$ и представляют пример многообразий Римана–Картана класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_3$. *Почти-келеровы* многообразия (см. [26]) выделяются условием $d\Omega = 0$ и представляют пример многообразий Римана–Картана класса $\mathfrak{S}_2 \oplus \mathfrak{S}_3$. *Приближенно келеровы* многообразия (см. [26]) выделяются условием $d\Omega = 3\nabla\Omega$ и представляют пример многообразий Римана–Картана класса $\mathfrak{S}_1$.

2.4. Взяв за основу тензор кривизны $\bar{R}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ многообразия Римана–Картана (M, g, T) , построим скалярный инвариант

$$\bar{s} = \sum_{i,j=1}^n g(\bar{R}(e_i, e_j)e_j, e_i),$$

который по аналогии со скалярной кривизной s метрики g (см. [29; с. 269]) назовем *скалярной кривизной присоединенной связности* $\bar{\nabla}$. Справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Скалярные кривизны $\bar{s}$ и s присоединенной связности $\bar{\nabla}$ и метрики g многообразия Римана–Картана (M, g, T) связаны равенством*

$$\bar{s} = s - \|(1)T\|^2 - \frac{n-2}{2}\|(2)T\|^2 + \frac{1}{2}\|(3)T\|^2 - 2\text{div}(\text{trace } T)^\# \quad (2.4)$$

с неприводимыми компонентами $(1)T$, $(2)T$ и $(3)T$ тензора T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ произвольной карты (U, φ) многообразия M тензор Риччи $\bar{r}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ имеет следующие компоненты (см. [24; с. 151])

$$\bar{r}_{ij} := \bar{r}(X_i, X_j) = \partial_k \bar{\Gamma}_{ij}^k - \partial_i \bar{\Gamma}_{kj}^k + \bar{\Gamma}_{kl}^k \bar{\Gamma}_{ij}^l - \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{lj}^k, \quad (2.5)$$

где $\bar{\nabla}_{X_i} X_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k X_k$ для $X_k = \partial_k$. Привлекая сюда компоненты $T_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$ тензора деформации $T^\#$, где $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ и Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля присоединенной связности $\bar{\nabla}$ и метрики g , найденные в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ карты (U, φ) , перепишем (2.5) в следующем виде:

$$\bar{r}_{ij} := r_{ij} + \nabla_{X_k} T_{ij}^k - \nabla_{X_i} T_{kj}^k + T_{kl}^k T_{ij}^l - T_{ik}^l T_{lj}^k. \quad (2.6)$$

Здесь $r_{ij} := r(X_i, X_j)$ – компоненты тензора кривизны Риччи метрики g . Из (2.6) находим

$$\bar{s} = s - 2\text{div}(\text{trace } T)^\# - \|\text{trace } T\|^2 - \sum_{i,j,k=1}^n T(e_i, e_j, e_k) T(e_k, e_i, e_j). \quad (2.7)$$

Непосредственные подсчеты показывают, что $\|\operatorname{trace} T\|^2 = 2^{-1}(n-1)\|(^{(2)}T)\|^2$ и

$$\sum_{i,j,k=1}^n T(e_i, e_j, e_k)T(e_k, e_i, e_j) = \frac{3}{2}\|(^{(1)}T)\|^2 - \frac{1}{2}\|T\|^2 = \|(^{(1)}T)\|^2 - \frac{1}{2}\|(^{(2)}T)\|^2 - \frac{1}{2}\|(^{(3)}T)\|^2.$$

После соответствующих замен в (2.7) мы получаем формулу (2.4).

2.5. Рассмотрим многообразие Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$, которое характеризуется условием $(^{(3)}T) = 0$ или ему равносильным

$$T(X, Y, Z) + T(Y, X, Z) = 2g(X, Y)\omega(Z) - g(X, Z)\omega(Y) - g(Y, Z)\omega(X). \quad (2.8)$$

Полагая многообразие Римана–Картана (M, g, T) компактным и ориентированным, определим для присоединенной связности $\bar{\nabla}$ и метрики g их *полные скалярные кривизны*

$$\bar{s}(M) := \int_M \bar{s} dv \quad \text{и} \quad s(M) := \int_M s dv,$$

где $dv = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ некоторой карты (U, φ) . В этом случае будет справедливой

ТЕОРЕМА 1. *Полные скалярные кривизны $\bar{s}(M)$ и $s(M)$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ и метрики g компактного ориентированного n -мерного многообразия Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ связаны неравенством $\bar{s}(M) \leq s(M)$. Для $n \geq 3$ равенство возможно, когда присоединенная связность $\bar{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g , а для случая $n = 2$, когда $\bar{\nabla}$ – полусимметрическая связность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему Грина (см. [24; с. 259]) к равенству (2.4), получим следующее интегральное равенство:

$$\bar{s}(M) = s(M) - \int_M \left(\|(^{(1)}T)\|^2 + \frac{n-2}{2}\|(^{(2)}T)\|^2 \right) dv.$$

Очевидно, что в этом случае $\bar{s}(M) \leq s(M)$, причем для $n \geq 3$ равенство возможно, если только $(^{(1)}T) = (^{(2)}T) = 0$, что означает $\bar{\nabla} = \nabla$. Для $n = 2$ равенство возможно, если только $T = (^{(2)}T)$, т.е.

$$T(X, Y, Z) = g(X, Z)\omega(Y) - g(X, Y)\omega(Z). \quad (2.9)$$

Это равенство характеризует связность $\bar{\nabla}$ как полусимметрическую.

Зная определение скалярных кривизн $\bar{s}$ и s и учитывая положительную определенность метрики g , можем сформулировать

СЛЕДСТВИЕ. *На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) с неположительно (соответственно отрицательно) определенным тензором Риччи r не существует несимметрической метрической связности $\bar{\nabla}$ класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ с положительно (соответственно неотрицательно) определенной квадратичной формой $\bar{r}(X, X)$ для тензора Риччи $\bar{r}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ и любого векторного поля X .*

Рассмотрим многообразие Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{Z}_3$, которое характеризуется условиями ${}^{(1)}T = {}^{(2)}T = 0$. Последним можно придать вид следующих равенств:

$$\text{trace } T = 0, \quad T(X, Y, Z) + T(Y, Z, X) + T(Z, X, Y) = 0. \quad (2.10)$$

ТЕОРЕМА 2. *Скалярные кривизны $\bar{s}$ и s присоединенной связности $\bar{\nabla}$ и метрики g многообразия Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{Z}_3$ связаны неравенством $\bar{s} \geq s$. Равенство возможно только, если присоединенная связность $\bar{\nabla}$ совпадает со связностью Леви–Чивита ∇ метрики g .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При ${}^{(1)}T = {}^{(2)}T = 0$ равенство (2.4) леммы предстанет в следующем виде: $\bar{s} = s + 2^{-1} \|{}^{(3)}T\|^2$. Следовательно, $\bar{s} \geq s$, причем равенство возможно, только если $\bar{\nabla} = \nabla$. Теорема доказана.

Здесь также будет справедливым

СЛЕДСТВИЕ. *На римановом многообразии (M, g) с неотрицательно (соответственно положительно) определенным тензором Риччи r не существует несимметрической метрической связности $\bar{\nabla}$ класса $\mathfrak{Z}_3$ с отрицательно (соответственно неположительно) определенной квадратичной формой $\bar{r}(X, X)$ для тензора Риччи $\bar{r}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ и любого векторного поля X .*

3. Псевдокиллинговы векторные поля

3.1. Производная Ли L_ξ метрического тензора g по отношению к гладкому векторному полю ξ на римановом многообразии (M, g) находится согласно равенству (см. [24; с. 223])

$$(L_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi).$$

На многообразии Римана–Картана (M, g, T) эта же производная будет находиться уже из следующего равенства:

$$(L_\xi g)(X, Y) = g(\bar{\nabla}_X \xi, Y) + g(\bar{\nabla}_Y \xi, X) + T(X, Y, \xi) + T(Y, X, \xi).$$

Поэтому дифференциальное уравнение

$$g(\bar{\nabla}_X \xi, Y) + g(X, \bar{\nabla}_Y \xi) = 0, \quad (3.1)$$

определяющее ξ как псевдокиллингово векторное поле (см. [13], [14; с. 86] и [15]), может быть представлено на (M, g, T) в равносильной форме

$$(L_\xi g)(X, Y) = T(X, Y, \xi) + T(Y, X, \xi). \quad (3.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. На многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{Z}_1$, которое характеризуется условием $T = {}^{(1)}T$ или равносильным ему требованием антисимметричности для тензора кручения $\bar{S}$, где Яно и Бохнер получили свои наиболее геометрические результаты, псевдокиллингово векторное поле ξ является киллинговым, поскольку здесь $(L_\xi g)(X, Y) = 0$.

В качестве обобщения упомянутых выше результатов рассмотрим псевдокиллингово векторное поле ξ на многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$. В этом случае уравнение (3.2) в соответствие с (2.8) предстанет в следующем виде:

$$(L_\xi g)(X, Y) = 2g(X, Y)\omega(\xi) - \theta(Y)\omega(X) - \theta(X)\omega(Y), \quad (3.3)$$

где $\theta(X) = g(\xi, X)$ для произвольного гладкого векторного поля X на M .

Введем в рассмотрение на многообразии (M, g, T) гиперраспределение $\xi^\perp$, сопоставляющее каждой точке x из M $(n-1)$ -мерное подпространство $\xi_x^\perp$ из $T_x M$, ортогональное ξ_x (см., например, [29; с. 19]). Тогда для произвольных гладких векторных полей X и Y гиперраспределения $\xi^\perp$ из (3.3) следует, что

$$(L_\xi g)(X, Y) = 2g(X, Y)\omega(\xi).$$

Это равенство характеризует векторное поле ξ как *инфинитезимальное $(n-1)$ -конформное преобразование* (см. [30]) или, по другой терминологии, как *инфинитезимальное обобщенно-конформное преобразование* (см. [31]). Доказана

ТЕОРЕМА 3. *Псевдокиллингово векторное поле на многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ является инфинитезимальным $(n-1)$ -конформным преобразованием.*

С каждым гиперраспределением $\xi^\perp$ ассоциируются его *тензор интегрируемости* $F^\perp$ и *вторая фундаментальная форма* $Q^\perp$, которые определяются из равенств (см. [32; с. 148])

$$g(F^\perp(X, Y), \xi) = g([X, Y], \xi), \quad (3.4)$$

$$g(Q^\perp(X, Y), \xi) = 2^{-1}g((\nabla_X Y + \nabla_Y X), \xi) \quad (3.5)$$

для любых гладких векторных полей X и Y гиперраспределения $\xi^\perp$. Если ξ – псевдокиллингово векторное поле на многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$, то с учетом (2.8) равенство (3.5) принимает следующий вид:

$$g(Q^\perp(X, Y), \xi) = -2g(X, Y)\omega(\xi).$$

Это означает, что $\xi^\perp$ – *омбилическое распределение* (см. [32; с. 151]). Доказана

ТЕОРЕМА 4. *На многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ гиперраспределение $\xi^\perp$, ортогональное псевдокиллинговому векторному полю ξ , является омбилическим.*

Тензор интегрируемости $F^\perp$, вообще говоря, не обращается в нуль на многообразии Римана–Картана (M, g, T) . Но возможен частный случай, который описывает следующая

ТЕОРЕМА 5. *Если для заданного на компактном ориентированном n -мерном ($n \geq 3$) многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ псевдокиллингово векторного поля ξ выполняется условие $r(\xi, \xi) \leq 0$, то гиперраспределение $\xi^\perp$ является интегрируемым с максимальными вполне геодезическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ некоторой карты (U, φ) имеет вид*

$$ds^2 = g_{ab}(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^a \otimes dx^b + g_{nn}(x^1, \dots, x^n) dx^n \otimes dx^n \quad (3.6)$$

для $a, b = 1, \dots, n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) с заданным омбилическим гиперраспределением имеет место интегральная формула (см. [33])

$$\int_M (r(\zeta, \zeta) - \|F^\perp\|^2 - (n-1)(n-2)\|H^\perp\|^2) dv = 0, \quad (3.7)$$

где ζ – единичное ортогональное гиперраспределению векторное поле и $H^\perp$ – вектор средней кривизны этого гиперраспределения (см. [32; с. 149]).

Полагаем $n \geq 3$, а ζ – орт заданного на (M, g, T) псевдокиллингова векторного поля ξ . Тогда при $r(\xi, \xi) \leq 0$ из формулы (3.7) выводим

$$r(\xi, \xi) = 0, \quad F^\perp = 0 \quad \text{и} \quad H^\perp = 0.$$

Это означает, что гиперраспределение $\xi^\perp$ интегрируемое с вполне геодезическими максимальными, т.е. $(n-1)$ -мерными интегральными многообразиями. При этом известно (см. [34; с. 221]), что наличие на римановом многообразии 1-параметрического семейства вполне геодезических подмногообразий размерности $n-1$ позволяет привести метрическую форму $ds^2 = g_{ij}(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^i \otimes dx^j$ риманова многообразия (M, g) к виду (3.6) в локальной системе координат некоторой карты (U, φ) . Теорема доказана.

“Теорема исчезновения” для псевдокиллингова векторного поля на многообразии Римана–Картана класса $\mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2$ имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 6. *На компактном ориентированном n -мерном ($n \geq 3$) многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2$ с отрицательно определенным тензором Риччи r не существует ненулевых псевдокиллинговых векторных полей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3.7) следует (см. также [33]), что на компактном ориентированном n -мерном ($n \geq 3$) римановом многообразии (M, g) с отрицательно определенным тензором Риччи r не существует омбилических гиперраспределений. Из этого, в частности, следует, что на компактном ориентированном n -мерном ($n \geq 3$) многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2$ с отрицательно определенным тензором Риччи r не существует ненулевых псевдокиллинговых векторных полей.

3.2. Рассмотрим псевдокиллингово векторное поле ξ на многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{Z}_2$, для которого, как было показано, присоединенная связность $\bar{\nabla}$ полусимметрическая. Справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Если для заданного на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{Z}_2$ псевдокиллингова векторного поля ξ и тензора Риччи $\bar{r}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ выполняется условие $\bar{r}(\xi, \xi) \leq 0$, то ξ является торсообразующим векторным полем, гиперраспределение $\xi^\perp$ – интегрируемым с максимальными омбилическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ некоторой карты (U, φ) имеет вид*

$$ds^2 = \sigma(x^1, \dots, x^n) g_{ab}(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^a \otimes dx^b + g_{nn}(x^1, \dots, x^n) dx^n \otimes dx^n \quad (3.8)$$

для $a, b = 1, \dots, n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [14; с. 92]), что ковариантная производная $\bar{\nabla}\xi = 0$ для любого псевдокиллингова векторного поля ξ на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) , чьи тензоры Риччи $\bar{r}$ и кручения $\bar{S}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ подчинены следующим условиям: квадратичная форма $\bar{r}(\xi, \xi) \leq 0$ и

$$g(\bar{S}(X, Y), Z) - g(\bar{S}(X, Z), Y) + g(X, Y)\tau(Z) - g(X, Z)\tau(Y) = 0 \quad (3.9)$$

для любых гладких векторных полей X, Y, Z и произвольной гладкой 1-формы τ на M .

Предположим, что многообразие (M, g, T) принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$, тогда T находится из равенства (2.9). Воспользовавшись тождеством (2.1), найдем тензор кручения

$$\bar{S}(X, Y) = 2^{-1}(\omega(Y)X - \omega(X)Y).$$

Теперь, очевидно, что при $\tau = 2^{-1}\omega$ равенство (3.9) обращается в тождество. После предположения, что $\bar{r}(\xi, \xi) \leq 0$ мы получаем $\bar{\nabla}\xi = 0$. Это равенство с учетом (2.9) принимает вид уравнения

$$g(\nabla_X \xi, Y) = \theta(X)\omega(Y) - g(X, Y)\omega(\xi)$$

торсообразующего векторного поля (см. [17; с. 322]). Отсюда, в частности, следует, что $F^\perp = 0$. В итоге, $\xi^\perp$ – интегрируемое омбилическое распределение. Известно (см. [34; с. 219]), что наличие на римановом многообразии 1-параметрического семейства омбилических подмногообразий размерности $n - 1$ позволяет привести к виду (3.8) метрическую форму $ds^2 = g_{ij}(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^i \otimes dx^j$ многообразия в локальной системе координат некоторой карты (U, φ) . Теорема доказана.

В дополнение к теореме 6 сформулируем еще одну “теорему исчезновения”.

ТЕОРЕМА 8. *На компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_2$ с отрицательно определенной квадратичной формой $\bar{r}(X, X)$ для тензора Риччи $\bar{r}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ не существует ненулевых псевдокиллинговых векторных полей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно утверждение (см. [14; с. 92]), согласно которому не существует отличного от нуля псевдокиллингова векторного поля ξ на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) , чей тензор Риччи $\bar{r}$ подчинен условию: $\bar{r}(X, X) < 0$ для любого гладкого векторного поля X на M , а тензор кручения $\bar{S}$ – условию (3.9). Если принять во внимание, что на многообразии Римана–Картана класса $\mathfrak{S}_2$ равенство (3.9), как это было доказано выше, обращается в тождество, то сформулированная теорема является следствием данного утверждения.

4. Псевдогармонические векторные поля

4.1. Векторное поле ξ на многообразии Римана–Картана (M, g, T) называется псевдогармоническим (см. [13], [14; с. 84], [15], [16]), если оно служит решением системы дифференциальных уравнений

$$g(\bar{\nabla}_X \xi, Y) - g(\bar{\nabla}_Y \xi, X) = 0, \quad \text{trace } \bar{\nabla} \xi = 0. \quad (4.1)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 2. Пусть на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) тензор кручения $\bar{S}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ удовлетворяет уравнению

$$g(\bar{S}(X, Y), Z) + g(\bar{S}(X, Z), Y) = g(X, Y)\tau(Z) + g(X, Z)\tau(Y) + g(Y, Z)\nu(X) \quad (4.2)$$

для произвольных гладких 1-форм τ и ν . Если для заданного на (M, g, T) псевдогармонического векторного поля ξ и тензора Риччи $\bar{r}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ выполняется условие $\bar{r}(X, X) \leq 0$, то с необходимостью $\bar{\nabla}\xi = 0$. Если же квадратичная форма $\bar{r}(X, X)$ является положительно определенной, то на многообразии (M, g, T) не существует ненулевых псевдогармонических векторных полей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно утверждение (см. [14; с. 91–92]), согласно которому на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) для псевдогармонического векторного поля ξ не может выполняться неравенство

$$\bar{r}(\xi, \xi) - 2\Phi(\xi, \bar{\nabla}\xi) + \|\bar{\nabla}\xi\|^2 \geq 0, \quad (4.3)$$

если не имеет места соответствующее равенство. Форма $\Phi(\xi, \bar{\nabla}\xi)$ в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ произвольной карты (U, φ) имеет вид

$$\Phi(\xi, \bar{\nabla}\xi) := (\bar{S}_{lij} + \bar{S}_{lji} - g_{li}\tau_j - g_{lj}\tau_i)\xi^l\bar{\nabla}^i\xi^j \quad (4.4)$$

для произвольной гладкой 1-формы $\tau = \tau_k dx^k$. Здесь

$$\bar{S}_{lij} = g_{jk}\bar{S}_{li}^k, \quad \xi = \xi^k X_k \quad \text{и} \quad \bar{\nabla}^i\xi^j = g^{jk}\bar{\nabla}_{X_k}\xi^j$$

для

$$S_{li}^k := \bar{S}^k(X_l, X_i)X_k, \quad g_{ij} := g(X_i, X_j) \quad \text{и} \quad g^{jk} := (g_{jk})^{-1}.$$

С учетом (4.1) форму $\Phi(\xi, \bar{\nabla}\xi)$, можно переписать в равносильном (4.4) виде

$$\Phi(\xi, \bar{\nabla}\xi) := (\bar{S}_{lij} + \bar{S}_{lji} - g_{li}\tau_j - g_{lj}\tau_i - \nu_l g_{ij})\xi^l\bar{\nabla}^i\xi^j$$

для произвольной гладкой 1-формы $\nu = \nu_k dx^k$. Если теперь предположить, что

$$\bar{S}_{lij} + \bar{S}_{lji} - g_{li}\tau_j - g_{lj}\tau_i - \nu_l g_{ij} = 0, \quad (4.5)$$

тогда $\Phi(\xi, \bar{\nabla}\xi) = 0$ в (4.3). В итоге неравенство (4.3) предстанет в новом виде $\bar{r}(\xi, \xi) + \|\bar{\nabla}\xi\|^2 \geq 0$. Откуда в предположении, что $\bar{r}(\xi, \xi) \geq 0$, на основании процитированного в начале нашего доказательства утверждения выводим два равенства $\bar{r}(\xi, \xi) = 0$ и $\bar{\nabla}\xi = 0$. В свою очередь, условие $\bar{r}(\xi, \xi) > 0$ не противоречит неравенству (4.3), но вступает в противоречие со следующим из него равенством. Лемма доказана.

На основании леммы докажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 9. Пусть ξ – псевдогармоническое векторное поле, заданное на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$. Если $\bar{r}(\xi, \xi) \geq 0$ для тензора Риччи $\bar{r}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$, то гиперраспределение $\xi^\perp$, ортогональное векторному полю ξ , является омбилическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многообразие (M, g, T) принадлежит классу $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$. Это означает, что $T = {}^{(1)}T + {}^{(2)}T$. В этом случае из (2.1) последует:

$$g(\bar{S}(X, Y), Z) = {}^{(1)}T(X, Y, Z) + 2^{-1}{}^{(2)}T(Z, Y, X).$$

Подстановка данного выражения для тензора кручения $\bar{S}$ в (4.4) позволяет нам убедиться в том, что уравнение (4.4) обращается в тождество для $\nu = 2\tau = \omega$. С учетом этого и на основании леммы 2 заключаем, что на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ требование $\bar{r}(\xi, \xi) \geq 0$ автоматически повлечет равенство $\bar{\nabla}\xi = 0$. Последнее можно переписать в равносильной форме $g(\nabla_X \xi, Y) = T(X, Y, \xi)$. Тогда на основании (2.8) и (3.5) выводим, что $g(Q^\perp(X, Y), \xi) = -2g(X, Y)\omega(\xi)$ для произвольных гладких векторных полей X и Y гиперраспределения $\xi^\perp$. Теорема доказана.

Для псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ с учетом сказанного выше из леммы 2 выводится следующая “теорема исчезновения”.

ТЕОРЕМА 10. На компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ с положительно определенной квадратичной формой $\bar{r}(X, X)$ для тензора Риччи $\bar{r}$ присоединенной связности $\bar{\nabla}$ не существует ненулевых псевдогармонических векторных полей.

4.2. Рассмотрим псевдогармоническое векторное поле ξ на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_2$. Здесь, как и в случае многообразия (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$, из требования $\bar{r}(\xi, \xi) \geq 0$ выводится равенство $g(\nabla_X \xi, Y) = T(X, Y, \xi)$, которое с учетом условия $T = {}^{(2)}T$ приобретает вид уравнения торсообразующего векторного поля (см. [17; с. 322]). В этом случае имеет место аналог теоремы 7.

ТЕОРЕМА 11. Если для заданного на компактном многообразии Римана–Картана (M, g, T) класса $\mathfrak{S}_2$ псевдогармонического векторного поля ξ выполняется условие $\bar{r}(\xi, \xi) \geq 0$, то ξ является торсообразующим векторным полем, гиперраспределение $\xi^\perp$ – интегрируемым с максимальными омбилическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ некоторой карты (U, φ) имеет вид

$$ds^2 = \sigma(x^1, \dots, x^n) g_{ab}(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^a \otimes dx^b + g_{nn}(x^1, \dots, x^n) dx^n \otimes dx^n$$

для $a, b = 1, \dots, n-1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie)”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **40** (1923), 325–412.

- [2] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (suite)”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **41** (1924), 1–25.
- [3] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **42** (1925), 17–88.
- [4] R. Penrose, “Spinors and torsion in general relativity”, *Found. Phys.*, **13**:3 (1983), 325–339.
- [5] A. Trautman, “The Einstein–Cartan theory”, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Vol. 2, Elsevier, Oxford, 2006, 189–195; [arXiv: gr-qc/0606062](#).
- [6] D. Puetzfeld, “Prospects of non-Riemannian cosmology”, *Proceedings of 22nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics at Stanford University* (December 13–17, 2004), Stanford Univ. Press, California, 2004, Paper № 1221, 5 pp.; [arXiv: astro-ph/0501231](#).
- [7] R. T. Hammond, “Torsion gravity”, *Rep. Progr. Phys.*, **65**:5 (2002), 599–649.
- [8] K. Yano, “On semi-symmetric metric connection”, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **15** (1970), 1579–1586.
- [9] Z. Nakao, “Submanifolds of a Riemannian manifold semisymmetric metric connections”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54**:1 (1976), 261–266.
- [10] B. Barua, A. K. Ray, “Some properties of semisymmetric metric connection in a Riemannian manifold”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **16**:7 (1985), 736–740.
- [11] J. Sengupta, U. C. De, T. Q. Binh, “On a type of semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **31**:12 (2000), 1659–1670.
- [12] G. Muniraja, “Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur’s theorem”, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, **3** (2008), 1223–1232.
- [13] S. Bochner, K. Yano, “Tensor-fields in non-symmetric connections”, *Ann. of Math.* (2), **56**:3 (1952), 504–519.
- [14] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957.
- [15] S. I. Goldberg, “On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vectors in metric manifolds with torsion”, *Ann. of Math.* (2), **64**:2 (1956), 364–373.
- [16] Y. Kubo, “Vector fields in a metric manifold with torsion and boundary”, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **24**:4 (1972), 383–395.
- [17] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus. An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications*, Grundlehren Math. Wiss., **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [18] С.Е. Степанов, “Об одном аналитическом методе общей теории относительности”, *ТМФ*, **122**:3 (2000), 482–496.
- [19] И.А. Гордеева, “О классификации несимметрических метрических связностей”, *Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г.Ф. Лаптева*, ПГПУ, Пенза, 2006, 30–37.
- [20] И.А. Гордеева, “Псевдокиллинговые векторные поля на многообразиях Римана–Картана”, *Тезисы докладов Международной конференции “Геометрия в Одессе – 2008”* (Одесса, 19–24 мая 2008 г.), Фонд «Наука», Одесса, 2008, 73–75.
- [21] И.А. Гордеева, С.Е. Степанов, “Теорема исчезновения для псевдогармонических векторных полей на многообразии Римана–Картана”, *Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам* (Суздаль, 27 июня–2 июля 2008 г.), ВлГУ, Владимир, 2008, 71–73.
- [22] *Четырёхмерная риманова геометрия. Семинар Артура Бессе*, ред. А. Бессе, Мир, М., 1985.
- [23] S. E. Stepanov, “On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field”, *J. Geom. Phys.*, **33**:3–4 (2000), 191–209.
- [24] А.П. Норден, *Пространства аффинной связности*, Наука, М., 1976.
- [25] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 2, Наука, М., 1981.
- [26] В.Ф. Кириченко, “Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур”, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **18**, ВИНТИ, М., 1986, 25–71.

- [27] A. Gray, L. M. Hervella, “The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **123**:1 (1980), 35–58.
- [28] L. Friedland, Ch.-Ch. Hsiung, “A certain class of almost Hermitian manifolds”, *Tensor (N.S.)*, **48**:3 (1989), 252–263.
- [29] И. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, Наука, М., 1981.
- [30] S. Tanno, “Partially conformal transformations with respect to $(m - 1)$ -dimensional distributions of m -dimensional Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J.* (2), **17**:4 (1965), 358–409.
- [31] А. В. Дубинкин, А. П. Широков, “К вопросу об инфинитезимальных обобщенно-конформных преобразованиях”, Тр. геом. сем., **15**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1983, 26–34.
- [32] B. L. Reinhart, *Differential Geometry of Foliations. The Fundamental Integrability Problem*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **99**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [33] S. E. Stepanov, “An integral formula for a Riemannian almost-product manifold”, *Tensor (N.S.)*, **55**:3 (1994), 209–214.
- [34] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, ИЛ, М., 1948.

С. Е. Степанов

Финансовая академия при Правительстве РФ

E-mail: stepanov@vtsnet.ru

Поступило

11.09.2008

Исправленный вариант

11.06.2009

И. А. Гордеева

Владимирский государственный университет

E-mail: igordeeva@list.ru