Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Демичев, Предельные теоремы для экстремальных потоков событий, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 184–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:44:12

УДК 519.216.24

Предельные теоремы для экстремальных потоков событий

В. П. Демичев

Изучается макс-обобщенный процесс Кокса, представляющий собой модель неоднородного потока экстремальных событий. Полученные результаты описывают асимптотическое поведение этого процесса, если он порождается зависимыми и, вообще говоря, неодинаково распределенными случайными величинами.

Библиография: 4 названия.

Введение. Рассмотрим некоторую систему, на которую в случайные моменты времени действует некоторый фактор случайной интенсивности. Важной задачей является оценка вероятности того, что за определенный промежуток времени величина воздействия этого фактора превысит заданный уровень. О некоторых практических приложениях, где возникает эта проблема, можно прочитать в [1] и [2]. Данная работа посвящена оценке упомянутой вероятности в том случае, когда моменты действия фактора описываются так называемым процессом Кокса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на некотором вероятностном пространстве заданы пуассоновский процесс $\{N(t), t \geq 0\}$ единичной интенсивности и не зависящий от него процесс $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ с п.н. неубывающими, конечными и непрерывными справа траекториями, выходящими из нуля. Тогда процесс Кокса задается формулой $Z(t) = N(\Lambda(t)), t \geq 0$.

Предположим, что существуют неограниченно возрастающая функция $d(t) > 0$, заданная на промежутке $[0, \infty)$, и случайная величина Λ такие, что

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow{\text{law}} \Lambda, \quad t \rightarrow \infty.$$

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – одинаково распределенные случайные величины, характеризующие воздействие фактора на систему, и $F(x) = P(X_1 < x)$ – их функция распределения. Будем также считать процессы $\{X_i\}_{i=1}^\infty$, $\{N(t), t \geq 0\}$ и $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ независимыми в совокупности. Нас интересует поведение процесса $M = \{M(t), t \geq 0\}$ при $t \rightarrow \infty$, где

$$M(t) = \begin{cases} \max_{1 \leq k \leq Z(t)} X_k, & Z(t) \geq 1, \\ -\infty, & Z(t) = 0, \end{cases}$$

называемого *макс-обобщенным процессом Кокса*. Допустим, что $1 - F(x)$ является правильно меняющейся (в смысле Карамата) функцией, т.е.

$$\exists \gamma > 0: \quad \frac{1 - F(xy)}{1 - F(y)} \rightarrow x^{-\gamma}, \quad y \rightarrow \infty, \quad \forall x > 0. \quad (1)$$

Положим

$$b(t) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 - F(x) \leq \frac{1}{d(t)} \right\}.$$

В статье [1] показано, что если $X_1, X_2, \dots$ независимы в совокупности, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(M(t) < b(t)x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x^{-\gamma}} dP(\Lambda < \lambda), \quad x > 0. \quad (2)$$

В данной работе мы обобщим этот результат, рассмотрев зависимые и, вообще говоря, неодинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \dots$.

1. Случай зависимых воздействий. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – некоторая последовательность случайных величин. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ и положим

$$\Delta h(y, n) = \left| P\left(M_n < h\left(\frac{y}{n}\right)\right) - e^{-y} \right|,$$

где $h(y): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ – невозрастающая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{0 < y \rightarrow 0} h(y) = \infty.$$

ЛЕММА 1.1. *Если $\Delta h(y, n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для $y \geq 0$, то эта сходимость равномерна по y на любом промежутке $[0, C]$, $C > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что сходимость не равномерная, т.е. существуют $\delta > 0$ и последовательность

$$\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty, \quad y_{n_k} \in [0, C], \quad n_k \nearrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

для которых $\Delta h(y_{n_k}, n_k) > \delta$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $y_{n_k} \rightarrow y_0$, $k \rightarrow \infty$. Найдется $K \in \mathbb{N}$ такое, что при $k > K$ выполнена оценка $|y_{n_k} - y_0| < \delta/4$. Поэтому при всех достаточно больших k имеем

$$\begin{aligned} \Delta h(y_{n_k}, n_k) &\leq \left| P\left(M_{n_k} < h\left(\frac{y_{n_k}}{n_k}\right)\right) - P\left(M_{n_k} < h\left(\frac{y_0}{n_k}\right)\right) \right| + \Delta h(y_0, n_k) + \frac{\delta}{4} \\ &\leq \Delta h\left(\max\left\{y_0 - \frac{\delta}{4}, 0\right\}, n_k\right) + \frac{\delta}{2} \\ &\quad + \Delta h\left(\min\left\{y_0 + \frac{\delta}{4}, C\right\}, n_k\right) + \Delta h(y_0, n_k) + \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

Значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta h(y_{n_k}, n_k) \leq 3\delta/4$. Пришли к противоречию.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если для всех $y \geq 0$ имеет место сходимость*

$$\Delta h(y, n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

то для каждого $a > 0$

$$\mathbf{P}\left(M(t) < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) \rightarrow L(a), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\partial_e L(a) = \int_0^\infty e^{-\lambda a} d\mathbf{P}(\Lambda < \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим теорему при дополнительном предположении, что $\Lambda(t)/d(t) \leq K$ (Р-п.н.), $t \geq 0$, для некоторой константы $K > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(M(t) < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E} \frac{\Lambda(t)^n}{n!} e^{-\Lambda(t)} \mathbf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{[2eKd(t)]} \mathbf{E} \frac{\Lambda(t)^n}{n!} e^{-\Lambda(t)} \mathbf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) \\ &\quad + \sum_{n=[2eKd(t)]+1}^{\infty} \mathbf{E} \frac{\Lambda(t)^n}{n!} e^{-\Lambda(t)} \mathbf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

По формуле Стирлинга

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi eKd(t)}} \sum_{n=[2eKd(t)]+1}^{\infty} \mathbf{E} \left(\frac{\Lambda(t)e}{2eKd(t)}\right)^n e^{-\Lambda(t)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi eKd(t)}} \sum_{n=[2eKd(t)]+1}^{\infty} \mathbf{E} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\Lambda(t)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для $n \leq 2eKd(t)$ имеем $an/d(t) \leq 2eKa$. По лемме 1.1 для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ и $y \in [0, 2eKa]$ выполнена оценка $\Delta h(y, n) < \varepsilon$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\left| S_1 - \sum_{n=0}^{[2eKd(t)]} \mathbf{E} \frac{\Lambda(t)^n}{n!} e^{-\Lambda(t)} e^{-an/d(t)} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^N \mathbf{E} \frac{\Lambda(t)^n}{n!} e^{-\Lambda(t)} \left| \mathbf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) - e^{-an/d(t)} \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbf{E} \frac{\Lambda(t)^n}{n!} e^{-\Lambda(t)} \varepsilon \\ &\leq \max_{0 \leq n \leq N} \left| \mathbf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) - e^{-an/d(t)} \right| + \varepsilon \rightarrow \varepsilon, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{[2eKd(t)]} \mathbf{E} \frac{\Lambda(t)^n}{n!} e^{-\Lambda(t)} e^{-an/d(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda d(t)(1-e^{-a/d(t)})} d\mathbf{P}\left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} < \lambda\right) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda a} d\mathbf{P}(\Lambda < \lambda) = L(a). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Пусть ξ – некоторая случайная величина. Обозначим

$$[\xi]_K = \xi I_{\{|\xi| \leq K\}} + K I_{\{|\xi| > K\}} \operatorname{sgn} \xi.$$

Пусть $M_K(t)$ – макс-обобщенный процесс Кокса, соответствующий

$$\Lambda_K(t) = d(t) \left[\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \right]_K, \quad K > 0.$$

Заметим, что $\Lambda_K(t)/d(t) \xrightarrow{\text{law}} [\Lambda]_K, t \rightarrow \infty$. Из уже доказанного вытекает, что

$$\mathbf{P} \left(M_K(t) < h \left(\frac{a}{d(t)} \right) \right) \rightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda a} d\mathbf{P}([\Lambda]_K < \lambda), \quad t \rightarrow \infty.$$

Устремляя K к бесконечности, получаем утверждение теоремы.

Покажем, что теорема 1.1 обобщает (2). Действительно, пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения

$$F(x) = P(X_i < x), \quad i \in \mathbb{N}.$$

В силу (1) имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x+0)} = 1. \quad (5)$$

Положим

$$h(y) = \begin{cases} \inf\{x \in \mathbb{R} : 1 - F(x) \leq y\}, & y > 0, \\ \infty, & y = 0. \end{cases}$$

Легко показать, что из (5) вытекает (3). Подставляя $a = x^{-\gamma}$ в формулу (4), получаем утверждение, эквивалентное (2).

Если $X_1, X_2, \dots$ одинаково распределены, но, вообще говоря, зависимы, достаточные для выполнения (3) условия можно найти, например, в [3].

2. Гауссовский случай. В качестве примера проверки свойства (3) для неодинаково распределенных случайных величин рассмотрим гауссовскую систему, состоящую из $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, $\sigma_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\Phi(x)$ – функция распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. Положим $r_{i,j} = \text{corr}(X_i, X_j)$. Доказательство следующего утверждения можно прочесть в [3] (теорема 4.2.1, с. 102).

ЛЕММА 2.1 (нормальная лемма сравнения). Пусть u – произвольное вещественное число. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P} \left(\bigcap_{i=0}^n \{X_i < u\} \right) - \prod_{i=1}^n \Phi \left(\frac{u}{\sigma_i} \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |r_{i,j}| (1 - r_{i,j}^2)^{-1/2} e^{-((u/\sigma_i)^2 + (u/\sigma_j)^2)/2(1+|r_{i,j}|)}. \end{aligned}$$

Систему функций $h_s, 0 < s \leq 1$, зададим следующим образом:

$$h_s(y) = \begin{cases} \infty, & y = 0, \\ \left(-2 \log \left(\sqrt{2\pi} \frac{y}{s} \right) - \log \left(-2 \log \left(\sqrt{2\pi} \frac{y}{s} \right) \right) \right)^{1/2}, & 0 < \frac{y}{s} < \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}, \\ 1, & \frac{y}{s} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что $0 < \sigma_i \leq 1$ и $\rho_n = \sup_{i=j=n} |r_{i,j}| < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть*

$$\frac{\chi(n)}{n} \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 < s \leq 1,$$

где $\chi(n)$ есть число случайных величин из набора $\{X_1, \dots, X_n\}$ с дисперсией 1. Допустим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \log n = 0 \quad (6)$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 < \infty. \quad (7)$$

Тогда если

$$\left(1 - \max_{i \leq n: \sigma_i < 1} \sigma_i^2\right) \log n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

то для $h(y) = h_s(y)$ выполнено (3) и, следовательно, при всех $a > 0$

$$\mathbb{P}\left(M(t) < h_s\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) \rightarrow L(a), \quad t \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{P}\left(M_n < h_s\left(\frac{y}{n}\right)\right) - \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{h_s(y/n)}{\sigma_i}\right) \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |r_{i,j}| (1 - r_{i,j}^2)^{-1/2} e^{-(h_s(y/n)^2)/(1+|r_{i,j}|)}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что это выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, если имеет место (6) или (7) (см., например, [4]). Кроме того,

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{h_s(y/n)}{\sigma_i}\right) - \Phi\left(h_s\left(\frac{y}{n}\right)\right)^{\chi(n)} \right| \\ & \leq \sum_{i \leq n: \sigma_i < 1} \left(1 - \Phi\left(\frac{h_s(y/n)}{\sigma_i}\right)\right) \\ & \sim \sum_{i \leq n: \sigma_i < 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_i \left(\sqrt{2\pi}(y/ns) \sqrt{-2 \log \sqrt{2\pi}(y/ns)}\right)^{1/\sigma_i^2}}{\sqrt{-2 \log \sqrt{2\pi}(y/ns)}}. \end{aligned}$$

В силу условия (8) последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Теперь утверждение теоремы вытекает из соотношения

$$\Phi\left(h_s\left(\frac{y}{n}\right)\right)^{\chi(n)} \rightarrow e^{-y}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ю. Королёв, И. А. Соколов, “Некоторые вопросы анализа катастрофических рисков, связанных с неоднородными потоками экстремальных событий”, *Системы и средства информатики*, Специальный выпуск: “Математические модели и методы информатики, стохастические технологии и системы”, ИПИ РАН, М., 2005, 108–124.
- [2] В. Ю. Королёв, И. А. Соколов, А. С. Гордеев, М. Е. Григорьева, С. В. Попов, Н. А. Чебоненко, “Некоторые методы анализа временных характеристик катастроф в неоднородных потоках экстремальных событий”, *Системы и средства информатики*, Специальный выпуск: “Математические модели в информационных технологиях”, ИПИ РАН, М., 2006, 5–23.
- [3] М. Лидбеттер, Г. Линдгрэн, Х. Ротсен, *Экстремумы случайных последовательностей и процессов*, Мир, М., 1989.
- [4] S. M. Berman, “Limit theorems for the maximum term in stationary sequences”, *Ann. Math. Statist.*, **35**:2 (1964), 502–516.

В. П. Демичев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vadim.demichev@gmail.ru

Поступило

29.07.2008