Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Козко, А. В. Рождественский, О неравенстве Джексо-

на с обобщенным модулем непрерывности, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 783–788

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:
IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:44:24

О НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА С ОБОБЩЕННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

А. И. Козко, А. В. Рождественский

Следуя работам Шапиро и Бомана [1]–[3], *обобщенным модулем непрерывности* функции $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, будем называть величину

$$\overline{\omega}_\psi(f, T) = \max_{t \in T} \left(\sum_s \psi(st) |\hat{f}_s|^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь $\psi(\cdot)$ – заданная непрерывная неотрицательная 2π -периодическая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(\cdot) \not\equiv 0$, а T – заданное замкнутое подмножество $[0, 2\pi]^d$.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00248, и INTAS, грант № 99-01080, а второго автора – при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-15-96109 и № 02-01-00248.

Пусть Λ – собственное подмножество $\mathbb{Z}^d$, содержащее начало координат. Через $E_\Lambda(f) = E_\Lambda(f)_2$ обозначим величину наилучшего приближения элемента $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ функциями, спектр которых сосредоточен на множестве Λ .

Неравенством Джексона с обобщенным модулем непрерывности назовем следующее соотношение:

$$E_\Lambda(f) \leq C \bar{\omega}_\psi(f, T) \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d), \quad (1)$$

где константа C не зависит от выбора функции f . Точную нижнюю грань таких констант назовем *точной константой в неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности* и обозначим через $\kappa_\psi^{(d)}(\Lambda, T)$.

Первый вопрос, на который мы даем ответ в данной работе: какова величина *минимальной точной константы* в неравенстве (1) (под которой нам представляется естественным понимать величину $\kappa_\psi^{(d)}(\Lambda, \mathbb{T}^d)$)?¹

ТЕОРЕМА 1. Пусть множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ конечно и содержит начало координат. Тогда минимальная точная константа в неравенстве (1) равна

$$\kappa_\psi^{(d)}(\Lambda, \mathbb{T}^d) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу двойственности для расстояния от точки 0 до выпуклого множества A в нормированном пространстве $X = C(\mathbb{T}^d)$ (см. [4]), $\inf\{\|g\|_X : g \in A\} = \max\{\inf_{g \in A} \langle g^*, g \rangle : g^* \in X^*, \|g^*\|_{X^*} \leq 1\}$, получим двойственное представление точной константы в неравенстве Джексона:

$$\kappa_\psi^{(d)}(\Lambda, \mathbb{T}^d) = \left(\max_{\mu \in \mathcal{BM}^+(\mathbb{T}^d)} \inf_{k \notin \Lambda} \int_{\mathbb{T}^d} \psi(kt) d\mu(t) \right)^{-1/2},$$

где $\mathcal{BM}^+(\mathbb{T}^d)$ – множество конечных борелевских неотрицательных мер на $\mathbb{T}^d$, норма которых не превосходит 1.

Пусть $K = \sup\{k_1 : k = (k_1, \dots, k_d) \in \Lambda\}$. Тогда

$$\inf_{k \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(kt) d\mu(t) \leq \inf_{k_1 > K, k_1 \in \mathbb{Z}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(k_1 t_1) d\mu(t).$$

Представим $\int_{[0, 2\pi]^d} \psi(k_1 t_1) d\mu(t)$ в виде суммы

$$\int_{[0, 2\pi]^d} \psi(k_1 t_1) d\mu(t) = \int_{\Omega_1} \psi(k_1 t_1) d\mu(t) + \int_{\Omega_2} \psi(k_1 t_1) d\mu(t),$$

где $\Omega_1 = \{t \in [0, 2\pi]^d : t_1/\pi \in \mathbb{Q}\}$, $\Omega_2 = [0, 2\pi]^d \setminus \Omega_1$.

Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и выберем натуральное Q такое, что

$$\int_{\Omega_1} \psi(lQt_1) d\mu(t) \leq \epsilon \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{l \in \mathbb{N}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(lQt_1) d\mu(t) &= \inf_{l \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega_1} \psi(lQt_1) d\mu(t) + \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t) \right) \\ &\leq \epsilon + \inf_{l \in \mathbb{N}} \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t) = \epsilon + \inf_{N \in \mathbb{N}} \min_{1 \leq l \leq N} \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t). \end{aligned}$$

¹ Очевидно, что если $A \subset B$, A, B – замкнутые множества, то $\kappa_\psi^{(d)}(\Lambda, A) \geq \kappa_\psi^{(d)}(\Lambda, B)$.

Введем функцию $\bar{\psi}_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \psi(lx) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что

$$\min_{1 \leq l \leq N} \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t) \leq \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t) = \int_{\Omega_2} \bar{\psi}_N(Qt_1) d\mu(t).$$

Так как при каждом $t_1 \in [0, 2\pi] \setminus 2\pi\mathbb{Q}$ последовательность $\{l \cdot Qt_1\}_{l=1}^\infty$ равномерно распределена на $\mathbb{T}$, по критерию Вейля [5, с. 82]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\psi}_N(Qt_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \quad \forall t_1 \notin 2\pi\mathbb{Q}.$$

При этом $|\bar{\psi}_N(Qt_1)| \leq \max_{1 \leq l \leq N} |\psi(lQt_1)| \leq \|\psi(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}$, т.е. $|\bar{\psi}_N(Qt_1)|$ равномерно ограничено по t_1 и N . Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} \bar{\psi}_N(Qt_1) d\mu(t) = \int_{\Omega_2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right) d\mu(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} k \geq K+1, k \in \mathbb{N} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(kt) d\mu(t) &\leq \inf_{l \in \mathbb{N}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(lQt_1) d\mu(t) \\ &\leq \epsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} \bar{\psi}_N(Qt_1) d\mu(t) \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая произвол в выборе $\epsilon > 0$, заключаем, что

$$\inf_{k \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(kt) d\mu(t) \leq \inf_{k \geq K+1, k \in \mathbb{N}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(kt_1) d\mu(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx$$

для любой меры $\mu \in B\mathcal{M}^+(\mathbb{T}^d)$.

С другой стороны,

$$\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+(\mathbb{T}^d)} \inf_{k \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(kt) d\mu(t) \geq \inf_{k \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(kt) \frac{dt}{(2\pi)^d}.$$

А в силу 2π -периодичности $\psi(\cdot)$ для всякого $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$, справедливо равенство

$$\int_{[0, 2\pi]^d} \psi(kt) \frac{dt}{(2\pi)^d} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx.$$

Теорема доказана.

Приведем следствие из этой теоремы, относящееся к неравенству Джексона с “классическим” модулем произвольного порядка (которое еще принято называть *неравенством Джексона–Стечкина*), усиливающее результаты работ [6]–[8].

Для этого сначала заметим, что классический модуль непрерывности порядка r в пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$

$$\omega_r(f, T)_2 = \sup_{t \in T} \|\Delta_t^r f\|_2,$$

совпадает с обобщенным модулем непрерывности, отвечающим функции $\psi_r(x) := 4^r \sin^{2r}(x/2)$. При этом, $\int_0^{2\pi} \psi_r(x) dx = C_{2^r}^r$. (Здесь $\Delta_t^r f(\tau) = \Delta_t(\Delta_t^{r-1} f(\tau))$, $\Delta_t f(\tau) = \Delta_t^1 f(\tau) = f(\tau+t) - f(\tau)$, $\Delta_t^0 f(\tau) = f(\tau)$.)

СЛЕДСТВИЕ 1.1. В предположении теоремы 1 относительно множества Λ минимальная точная константа в неравенстве Джексона–Стечкина

$$E_{\Lambda}(f) \leq C\omega_r(f, T) \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d)$$

равна $1/\sqrt{C_{2r}^T}$.

Отметим, что в одномерном случае наиболее исследованным является вопрос о поведении точной константы в неравенстве Джексона с модулем непрерывности первого порядка. В работе [9] доказано, что точная константа в неравенстве²

$$E_{n-1}(f)_2 \leq C\omega(f, \delta)_2 \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T})$$

равна $1/\sqrt{2}$ при всех $\delta \geq \pi/n$.

Следующая проблема, на которую мы обращаем внимание, состоит в том, чтобы выделить класс обобщенных одномерных модулей непрерывности, которые, во-первых, обладают тем же свойством стабилизации точной константы в неравенстве Джексона с $\delta = \pi/n$, как у классического модуля непрерывности первого порядка, во-вторых, аннулируют множество алгебраических многочленов заданной степени $r-1$, в-третьих, удобны для вычислений, и, в-четвертых, – чтобы в случае, когда обобщенный модуль непрерывности задается при помощи разностного оператора (как, например, в классической ситуации), отношение величины минимальной точной константы в неравенстве Джексона с таким модулем к операторной норме соответствующего разностного оператора мало отличалось (по порядку) от такого отношения для классического модуля непрерывности порядка r .

Символом Υ обозначим класс непрерывных неотрицательных π -периодических четных функций. Для $\xi \in \Upsilon$ положим $h_{\xi}(x) := -\int_0^{\pi} \cos(xt)\xi(xt)\sin t dt$.

Пусть $\mathbf{b} = \{b_k\}$ – заданный конечный набор положительных чисел. Обозначим через $\Psi(\mathbf{b})$ множество четных непрерывных неотрицательных 2π -периодических функций $\psi(\cdot)$, $\psi(0) = 0$, $\psi(\cdot) \not\equiv 0$, для которых справедливо представление

$$\int_0^{\pi} \psi(xt) \frac{\sin t}{2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) dt + \sum_k h_{\xi_k}(b_k x) \quad \forall x \geq \hat{b} := \max_k \frac{1}{b_k}, \quad (2)$$

с некоторыми $\xi_k(\cdot) \in \Upsilon$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{b} = \{b_k\}$ – конечный набор положительных чисел, $\psi \in \Psi(\mathbf{b})$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда точная константа в неравенстве³

$$E_{n-1}(f)_2 \leq C\overline{\omega}_{\psi}(f, \delta) \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}) \quad (3)$$

равна $(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx)^{-1/2}$ при всех $\delta \geq \min\{\frac{\pi}{n}\hat{b}, \pi\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что точная константа $\mathfrak{K}_{\psi}(n, \delta)$ в неравенстве (3) ограничена снизу величиной $(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx)^{-1/2}$. Чтобы получить такую же оценку сверху для точной константы, опять воспользуемся ее двойственным представлением, вследствие которого

$$\mathfrak{K}_{\psi}(n, \delta) \leq \left(\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \pi])} \inf_{x \geq \hat{b}} \int_0^{\pi} \psi(xt) d\mu(t) \right)^{-1/2}.$$

Учитывая, что $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2} dt = 1$ и $\sin t \geq 0$ ($\forall t \in [0, \pi]$), полагая $d\mu(t) = \frac{\sin t}{2} dt$, получаем неравенство

$$\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \pi])} \inf_{x \geq \hat{b}} \int_0^{\pi} \psi(xt) d\mu(t) \geq \inf_{x \geq \hat{b}} \int_0^{\pi} \psi(xt) \cdot \frac{\sin t}{2} dt.$$

²Здесь $E_{n-1} := E_{\{-n+1, \dots, n-1\}}$.

³Здесь, по аналогии с классическими обозначениями, $\overline{\omega}_{\psi}(f, \delta) := \overline{\omega}_{\psi}(f, [0, \delta])$.

Следовательно, в силу представления (2) для того, чтобы установить справедливость неравенства $\tilde{\kappa}_\psi(n, \delta) \leq (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx)^{-1/2}$ при всех $\delta \geq \pi \hat{b}/n$, достаточно доказать следующее свойство:

$$h_\xi(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1, \forall \xi \in \Upsilon.$$

Заметим, что функция $h_\xi(x)$ может быть представлена в виде $h_\xi(x) = g_\xi(x) + R_\xi(x)$, где

$$g_\xi(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/2x} \xi(xt) \cos(xt) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2x} - t\right) dt,$$

если $1 \leq x \leq 2$, $l \in \mathbb{N}$ и

$$g_\xi(x) = 2 \cos^2\left(\frac{(2l+1)\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/2x} \xi(xt) \cos(xt) \cdot \cos t \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} - \operatorname{tg} t\right) dt,$$

если $2l \leq x \leq 2l+2$, $l \in \mathbb{N}$, а

$$R_\xi(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{(2l+1/2)\pi}{x} \int_{\pi}^{(2l+1/2)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \cdot \sin\left(t - \frac{(2l+1/2)\pi}{x}\right) dt \\ \quad + \int_{(4l+1-x)\pi/x}^{(2l+1)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \cdot \sin t dt & \text{при } x \in [2l, 2l+1/2], \quad l \in \mathbb{N}, \\ \int_{\pi}^{(2l+1)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \cdot \sin t dt & \text{при } x \in [2l+1/2, 2l+1], \quad l \in \mathbb{N}, \\ - \int_{(2l+1)\pi/x}^{\pi} \xi(xt) \cos(xt) \cdot \sin t dt & \text{при } x \in [2l+1, 2l+3/2], \quad l \in \mathbb{Z}_+, \\ 2 \cos \frac{(2l+3/2)\pi}{x} \int_{(2l+3/2)\pi/x}^{\pi} \xi(xt) \cos(xt) \cdot \sin\left(\frac{(2l+3/2)\pi}{x} - t\right) dt \\ \quad - \int_{(2l+1)\pi/x}^{(4l+3-x)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \cdot \sin t dt & \text{при } x \in [2l+3/2, 2l+2], \quad l \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что функции $g_\xi(x)$ и $R_\xi(x)$ неотрицательны при $x \geq 1$. Теорема доказана.

Пусть $r, a \in \mathbb{N}$. Обобщенным модулем Тунэ–Морса функции $f \in L_2(\mathbb{T})$ назовем величину

$$\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta) := \max_{0 \leq t \leq \delta} \left\| \prod_{k=0}^{r-1} \Delta_{a^k t} f \right\|_2.$$

Ясно, что $\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta) = \overline{\omega}_{\psi_{a,r}}(f, [0, \delta])$, где $\psi_{a,r}(x) = 4^r \prod_{k=0}^{r-1} \sin^2\left(\frac{a^k}{2} t\right)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $a = 2s$, $s, n \in \mathbb{N}$. Тогда точная константа в неравенстве

$$E_{n-1}(f)_2 \leq C \tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta) \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T})$$

равна $1/\sqrt{2^r}$ при всех $\delta \geq \pi/n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{a,r}(x) dx = 2^r$. Покажем, что функция $\psi_{a,r}(\cdot)$ принадлежит классу $\Psi(\mathbf{b})$ для $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{r-1}) := (a^{r-1}, \dots, a^0)$. Действительно, положим $\xi_0(x) = 2^{r-1}$, $\xi_k(x) = 2^{r-1} \prod_{s=1}^k (1 - \cos(a^s x))$, $k = 1, \dots, r-1$. Ясно, что $\xi_k(\cdot) \in \Upsilon$ и

$$\int_0^\pi \psi_{a,r}(xt) \cdot \frac{\sin t}{2} dt = 2^r + \sum_{k=0}^{r-1} h_{\xi_k}(a^{r-1-k} x).$$

Применяя теперь теорему 2, получаем требуемое утверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shapiro H. S. // Acta Math. 1968. V. 120. P. 279–292. 2. Boman J., Shapiro H. S. // Arkiv för Matematik. 1971. V. 9. № 1. P. 91–116. 3. Boman J. // Arkiv för Matematik. 1980. V. 18. № 1. P. 73–100. 4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. // УМН. 1968. Т. 23. № 6. С. 51–116. 5. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961. 6. Бердышева Е. Е. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 336–350. 7. Черных Н. И. // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522. 8. Виноградов О. Л., Жук В. В. // Проблемы матем. анализа. 2001. № 22. С. 3–26. 9. Черных Н. И. // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
05.07.2002