Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 143–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:34:18

О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений

Н. В. Тимофеева

В предыдущих работах автором построена новая компактификация схемы модулей стабильных по Гизекеру векторных расслоений с данным многочленом Гильберта на гладкой проективной поляризованной поверхности (S, H) над полем $k = \bar{k}$ нулевой характеристики. Семейства локально свободных пучков на поверхности S пополнены локально свободными пучками на схемах, являющихся модификациями исходной поверхности S . В данной статье получен класс модифицированных поверхностей, возникающих в конструкции.

Библиография: 10 названий.

Введение, обозначения и соглашения. Пусть S – неособая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики. Зафиксируем обильный класс дивизоров $H \in \text{Pic } S$. Символ $\chi(\cdot)$ будет, как обычно, обозначать характеристику Эйлера–Пуанкаре. Мы используем следующее понятие (полу)стабильности когерентного пучка E без кручения на поверхности S , принадлежащее Гизекеру [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Когерентный $\mathcal{O}_S$ -пучок E без кручения *стабилен* (соответственно, *полустабилен*), если для любого собственного подпучка $F \subset E$ при $m \gg 0$ выполнено неравенство

$$\frac{\chi(F(mH))}{\text{rk}(F)} < \frac{\chi(E(mH))}{\text{rk}(E)} \quad \left(\text{соответственно,} \quad \frac{\chi(F(mH))}{\text{rk}(F)} \leq \frac{\chi(E(mH))}{\text{rk}(E)} \right).$$

Известно [2], что структура пространства модулей полустабильных пучков сильно зависит от выбора поляризации H . Схема модулей Гизекера–Маруямы полустабильных пучков без кручения на поверхности S с многочленом Гильберта $P(m) = \chi(E(mH))$ относительно класса H обозначена символом $\overline{M}$. Известно [3], что это проективная схема конечного типа над полем k . Точки, соответствующие локально свободным пучкам (векторным расслоениям), составляют открытую по Зарисскому подсхему M_0 в $\overline{M}$. Пусть $\overline{M}$ – тонкое пространство модулей. Тогда имеется тривиальное семейство поверхностей $\Sigma := \overline{M} \times S \rightarrow \overline{M}$, снабженное универсальным семейством стабильных пучков $\mathcal{E}$. В работах [4], [5] построены проективная схема $\widetilde{M}$ и нетривиальное плоское семейство (возможно, приводимых) схем $\widetilde{\Sigma} \xrightarrow{\pi} \widetilde{M}$,

наделенное семейством локально свободных пучков $\widetilde{\mathbb{E}}$. В [6] аналогичные построения (плоские семейства схем $\widetilde{\Sigma}_i \xrightarrow{\widetilde{\pi}_i} \widetilde{B}_i$ над этальными окрестностями $\widetilde{B}_i \xrightarrow{\text{étale}} \widetilde{M}$, снабженные локально свободными пучками $\widetilde{\mathbb{E}}_i$) проведены для грубого пространства модулей. Схема $\widetilde{M}$ содержит открытую по Зарисскому подсхему $\widetilde{M}_0$, изоморфную подсхеме M_0 . Более того, в обоих (тонком и грубом) случаях существует бирациональный морфизм компактификаций $\varphi: \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$ такой, что $\varphi|_{\widetilde{M}_0}$ – изоморфизм.

СОГЛАШЕНИЕ 0.1. Мы работаем в обозначениях, соответствующих тонкому случаю. Однако, все рассуждения остаются верными для грубого пространства модулей.

Бирациональный морфизм $\varphi: \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$, построенный в работах [4], [5], устанавливает соответствие между парами вида $(\widetilde{S}, \widetilde{E}) \in \widetilde{M}$ и $\varphi(\widetilde{S}, \widetilde{E}) = (S, E) \in \overline{M}$. Пусть $\widetilde{y} \in \widetilde{M}$, и $\varphi(\widetilde{y}) = y$. Следовательно, мы считаем, что слой $\pi^{-1}(y) = S$ семейства Σ является образом слоя $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{y}) = \widetilde{S}$, и когерентный пучок E на слое S является образом векторного расслоения $\widetilde{E}$ на слое $\widetilde{S}$.

Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2 (пучковый аналог приведенного в [7; 20.2]). Пусть X – алгебраическая схема, F_0, F_1 – локально свободные $\mathcal{O}_X$ -пучки, $\psi: F_1 \rightarrow F_0$ – гомоморфизм $\mathcal{O}_X$ -модулей. Введем обозначения: $\mathcal{F} = \text{сокет } \psi$, $r_0 = \text{rk } F_0$. Пучок нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{O}_X$ -модуля $\mathcal{F}$ определяется равенством

$$\mathcal{Fitt}^0(\mathcal{F}) = \text{im} \left(\psi': \bigwedge^{r_0} F_1 \otimes \bigwedge^{r_0} F_0^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X \right),$$

где ψ' – морфизм, ассоциированный к морфизму ψ .

Целью настоящей статьи является исследование структуры слоев морфизма $\widetilde{\Sigma} \rightarrow \widetilde{M}$ в общем случае. В работе [5] доказано, что слой в общей точке $\widetilde{y} \in \widetilde{M}_0$ изоморфен поверхности S , а одна из компонент слоя в специальной точке $\widetilde{y} \in \widetilde{M} \setminus \widetilde{M}_0$ изоморфна раздутию поверхности S в пучке идеалов $\mathcal{Fitt}^0 \text{Ext}^1(E, \mathcal{O}_S)$. Теперь мы дадим полное описание схем $\widetilde{S}$.

Как доказано в [5; предложение 3.1], схема $\widetilde{\Sigma}$ получается раздутием $\sigma: \widetilde{\Sigma} \rightarrow \widetilde{M} \times S$ тривиального семейства $\widetilde{M} \times S$ в пучке идеалов $\mathcal{Fitt}^0 \text{Ext}_\Delta^1(\mathcal{O}_{\widetilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$, где Δ – теоретико-схемное замыкание в произведении $\widetilde{M} \times \Sigma$ образа диагонального вложения $\widetilde{M}_0 \times S \hookrightarrow \widetilde{M}_0 \times M_0 \times S$, изоморфное произведению $\widetilde{M} \times S$. Это означает, что для описания слоев проекции $\widetilde{\pi}$ достаточно исследовать слои композиции $\pi \circ \sigma: \widetilde{\Sigma} \xrightarrow{\sigma} \widetilde{M} \times S \xrightarrow{\pi} \widetilde{M}$.

Структура статьи следующая. В первом разделе мы изучаем структуру особенностей полустабильных когерентных пучков без кручения на неособой поверхности. Во втором разделе построено плоское одномерное семейство когерентных пучков, содержащее E , такое, что общий член семейства локально свободен. Наконец, в третьем разделе получена схемная структура поверхностей $\widetilde{S}$.

СОГЛАШЕНИЕ 0.2. Как обычно, предполагается, что схема $\overline{M}$ неприводима. Если это не так, то рассматривается каждая из ее неприводимых компонент, содержащих локально свободные пучки. Мы ограничиваемся случаем, когда схема $\overline{M}$ содержит, по крайней мере, один локально свободный пучок.

СОГЛАШЕНИЕ 0.3. Во всем тексте в обозначении функторов $\mathcal{E}xt$ будут опускаться нижние индексы всюду, где исключена двусмысленность. Например, мы заменяем $\mathcal{E}xt_S^1(E, \mathcal{O}_S)$ на $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$. При работе с артиновыми пучками длина $l(\kappa)$ пучка κ означает его характеристику Эйлера–Пуанкаре: $l(\kappa) = \chi(\kappa)$. Аналогично, для нульмерной подсхемы $Z \subset S$ имеем $l(Z) = l(\mathcal{O}_Z) = \chi(\mathcal{O}_Z)$. Как обычно, схема Гротендика нульмерных факторпучков длины l $\mathcal{O}_S$ -пучка F на поверхности S обозначается символом $\mathrm{Quot}^l F$. Точка схемы Гротендика, соответствующая факторпучку $q: F \twoheadrightarrow \kappa$, обозначается символом q .

Пусть r – ранг когерентных пучков E с многочленом Гильберта $P(m)$. Окончательный результат данной статьи заключен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Слой семейства $\tilde{\pi}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{M}$ в точке $\tilde{y} \in \tilde{M}$*

i) *изоморфен S , если $\tilde{y} \in \tilde{M}_0$,*

либо

ii) *содержится в классе всех*

$$\mathrm{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (\mathcal{I}_S[t] + (t))^s / (t^{s+1}), \quad \text{где } \mathcal{I}_S = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\kappa, \mathcal{O}_S),$$

причем κ – артинов пучок длины l , являющийся факторпучком прямой суммы $\mathcal{O}_S^{\oplus r}$, $l \leq c_2$, если $\tilde{y} \in \tilde{M} \setminus \tilde{M}_0$.

1. Особенности пучка E . В работе автора [5] доказано, что главная (доминирующая S) компонента $\tilde{S}_0$ схемы $\tilde{S}$ является раздутием поверхности S в пучке идеалов $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$. В этом пункте исследуется класс пучков, появляющихся в качестве $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ для различных полустабильных пучков E .

Для любого пучка без кручения E имеется точная тройка

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{\vee\vee} \rightarrow \kappa \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Поскольку S – неособая поверхность, дважды двойственный пучок $E^{\vee\vee}$ локально свободен, коядро κ – артинов пучок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. В точной тройке (1.1) назовем коядро κ *пучком особенностей* пучка E . Если необходимо, мы отражаем этот факт в обозначении $\kappa_E := E^{\vee\vee}/E$.

Вид многочлена Гильберта пучка E определяется геометрией поверхности S , выбором поляризации H , рангом r и классами Чженя c_1, c_2 пучка E . В любом случае все возможные числа l ограничены неравенством $0 \leq l \leq c_2$. Но, для фиксированного c_2 и различных S, H, r, c_1 наборы возможных значений l могут отличаться. Вместе с тем, в настоящее время нет явного описания таких значений l .

Теперь напомним понятие (полу)стабильности в смысле наклона, восходящее к Мамфорду и Такемото. Будем пользоваться следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Когерентный пучок E (полу)стабилен в смысле наклона относительно поляризации H , если для любого собственного подпучка $F \subset E$ выполнено неравенство

$$\frac{c_1(F) \cdot H}{\mathrm{rk}(F)} < \frac{c_1(E) \cdot H}{\mathrm{rk}(E)} \quad \left(\text{соответственно, } \frac{c_1(F) \cdot H}{\mathrm{rk}(F)} \leq \frac{c_1(E) \cdot H}{\mathrm{rk}(E)} \right).$$

Полустабильность влечет полустабильность в смысле наклона, и стабильность в смысле наклона влечет стабильность.

Следующее простое замечание показывает, что возможные значения l могут покрывать интервал $[0, c_2] \subset \mathbb{Z}$ не полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть $r, c_1, c_2, l, l \leq c_2$ таковы, что стабильных в смысле наклона пучков E , таких, что $\mathrm{rk}(E) = r, c_1(E) = c_1, c_2(E) = c_2$, не существует, но найдется, по крайней мере, одно стабильное в смысле наклона векторное расслоение F того же ранга и с тем же первым классом Чженя, но $c_2(F) = c_2 - l$. Тогда для любого артинова пучка $\mathcal{K}$ длины l стабильное в смысле наклона ядро E морфизма $F \rightarrow \mathcal{K}$ не должно существовать. Это означает, что пучки длины l не возникают как коядра точных последовательностей вида (1.1).

ПРИМЕР 1.1. Такие эффекты наблюдаются даже в классическом случае $S = \mathbb{P}^2$, $r = 2, c_1 = -1, c_2 = 2$. Соответствующее многообразие модулей полустабильных (=стабильных=стабильных в смысле наклона) когерентных пучков содержит непустое геометрическое место M_0 локально свободных пучков [8; гл. II, 4]. Предположим, что существует стабильный пучок E , для которого $l = 2$. Тогда для $E^{\vee\vee}$ вычислим дискриминант Богомолова:

$$\Delta(E^{\vee\vee}) = 2rc_2(E^{\vee\vee}) - (r-1)c_1^2(E^{\vee\vee}) = -1.$$

Это противоречит стабильности $E^{\vee\vee}$ в смысле наклона и показывает, что для не локально свободного пучка E имеется единственная возможность $E^{\vee\vee}/E \cong k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Артинов пучок $\mathcal{K}$ называется $(S, H, r, P(m))$ -допустимым, если имеется точная $\mathcal{O}_S$ -тройка (1.1), в которой когерентный пучок E ранга r с многочленом Гильберта $P(m)$ полустабильен относительно поляризации H .

Применяя к (1.1) функтор $\mathcal{E}xt^\bullet(-, \mathcal{O}_S)$, сразу получаем

$$\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) = \mathcal{E}xt^2(\mathcal{K}, \mathcal{O}_S).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Класс всех пучков $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ для всех полустабильных пучков E фиксированного ранга r и с многочленом Гильберта $P(m)$ содержится в классе пучков вида

$$\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\mathcal{K}, \mathcal{O}_S)$$

для всех $q: \mathcal{O}_S^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{K}, q \in \mathrm{Quot}^l \mathcal{O}_S^{\oplus r}, l \leq c_2$.

2. Устранимость особенности. Докажем (имея в виду соглашение 0.2), что любой полустабильный пучок может быть включен в некоторое одномерное плоское семейство пучков такое, что общий член семейства локально свободен.

Возьмем $m \gg 0$ такое, что $E(mH)$ порожден глобальными сечениями. Рассмотрим векторное пространство $V \cong H^0(S, E(mH))$ и схему Гротендика $\mathrm{Quot} = \mathrm{Quot}^{P(m)}(V \otimes \mathcal{O}_S(-mH))$, параметризующую факторпучки вида

$$V \otimes \mathcal{O}_S(-mH) \rightarrow E \tag{2.1}$$

с многочленом Гильберта, равным $P(m) = \chi(E(mH))$. Как обычно, мы работаем с квазипроективной подсхемой $Q \subset \mathrm{Quot}$, образованной всеми факторпучками (2.1),

когда E полустабилен, и имеется изоморфизм $H^0(S, E(mH)) \cong V$. Схема Гротендика Quot обладает универсальным факторпучком $\mathbb{E}_{\text{Quot}}$; пусть $\mathbb{E}_Q$ – его ограничение на подсхему Q . Пусть также Q_0 – открытая подсхема схемы Q , точки которой соответствуют локально свободным факторпучкам E .

В дальнейшем рассмотрении используется теорема Бертини, для чего необходима гладкость схемы Q . Если это не так, заменим ее (если необходимо) редукцией Q_{red} и затем гладким разрешением, например, по Хиронаке [9].

Поскольку схема Q квазипроективна, существует проективное пространство $\mathbb{P}^N$ вместе с локально замкнутым вложением $i: Q \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Зафиксируем любую точку q в образе $i(Q)$ такую, что q соответствует факторпучку E . Рассмотрим множество всех гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{P}^N$, проходящих через точку q . Выберем гиперплоскость H_1 такую, что схема, заданная пересечением $Q_{(1)} = i(Q) \cap H_1$, содержащая точку q и пересекающая образ $i(Q_0)$, неприводима и неособа. Такой выбор возможен по теореме Бертини [10; гл. III, следствие 7.9]. Ясно, что пересечение $i(Q_0) \cap Q_{(1)}$ составляет открытое подмножество в многообразии $Q_{(1)}$. Теперь повторим процедуру, заменив Q на $Q_{(1)}$. Итерируя процесс, приходим к подсхеме $Q_{(d)}$, которая является неприводимой кривой при некотором $d > 0$.

3. Структура модифицированных поверхностей. Здесь мы получим схемную структуру схем $\tilde{S}$ как проективных спектров подходящих алгебр. Как обычно, символ $\mathcal{O}_S$ означает структурный пучок поверхности S , и пусть $\mathcal{I}_S \subset \mathcal{O}_S$ – пучок идеалов, раздуваемый на схеме S .

Как показывает прямое вычисление с уравнениями раздутия, схема $\tilde{S}$ может быть наделена весьма сложной структурой. Главная ее компонента $\tilde{S}_0$ допускает особенности, каждая из остальных компонент может иметь структуру неприведенной схемы.

ПРИМЕР 3.1. По локальности можно заменить исходную неособую поверхность аффинной плоскостью $U \cong \mathbb{A}^2 = \text{Spec } k[x, y]$. Возьмем $I_S = (x^2, y)$. Рассмотрим тривиальное семейство $T_U = U \times \text{Spec } k[t] = \text{Spec } k[x, y, t]$ с естественной проекцией $\pi: T_U \rightarrow \text{Spec } k[t]$. Раздуем схему T_U в неприведенной точке с идеалом I_S в слое над точкой $b_0 = \{t = 0\}$. Это равносильно раздутию $\sigma: \tilde{T}_U \rightarrow T_U$ точки с идеалом $I = (x^2, y, t)$ на схеме T_U . Схема $\tilde{T}_U$ задается в прямом произведении $T_U \times \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2$ для $\mathbb{P}^2 = \text{Proj } k[u : v : w]$ обычными соотношениями для раздутия: $x^2 : y : t = u : v : w$. Исключительный дивизор E морфизма раздутия $\sigma: \tilde{T}_U \rightarrow T_U$ несет неприведенную (“двойную”) структуру; его уравнения имеют вид $x^2 = y = t = 0$. Слой $\tilde{S}$ композиции морфизмов $\pi \circ \sigma$ над точкой b_0 состоит из двух компонент: $\tilde{S} = \tilde{S}_0 \cup \tilde{S}_1$. В нашем случае компонента $\tilde{S}_0$ имеет квадратичные особенности; в аффинной карте $v \neq 0$, $z := u/v$ ее уравнения имеют вид $x^2 = yz$, $w = t = 0$. Компонента $\tilde{S}_1 = E$.

Для общего рассмотрения образуем полиномиальное расширение $\mathcal{O}_S[t]$, где элемент t трансцендентен над $\mathcal{O}_S$; пусть $(t) \subset \mathcal{O}_S[t]$ – пучок главных идеалов. Положим $\mathcal{I} := \mathcal{I}_S[t] + (t) \subset \mathcal{O}_S[t]$. Пусть $T := \text{Spec } k[t] \times S$, а также $\mathcal{O}_Z := \mathcal{O}_T/I$. Обозначим $B := \text{Spec } k[t]$, и нулевая точка базы B есть $b_0 = \{t = 0\}$. Пусть $\pi: T \rightarrow B$ – проекция, индуцированная морфизмом $\mathcal{O}_S[t]$ -алгебр $k[t] \rightarrow \mathcal{O}_S[t]$. Последний морфизм получен расширением структурного морфизма $k \rightarrow \mathcal{O}_S$.

Образует градуированную $\mathcal{O}_S[t]$ -алгебру $\mathcal{A} := \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}^s$, и $\tilde{T} := \text{Proj } \mathcal{A}$. Имеет место проективный морфизм (раздутия) $\sigma: \tilde{T} \rightarrow T$, индуцированный естественным морфизмом $\mathcal{O}_S[t]$ -алгебр $\mathcal{O}_S[t] \rightarrow \mathcal{A}$ на нулевую градуированную компоненту.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Слой композиции морфизмов $\sigma \circ \pi$ в точке $b_0 \in B$ равен*

$$\tilde{S} = (\text{Proj } \mathcal{A}) \times_T \pi^{-1}(b_0) = \text{Proj } \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}^s / (t^{s+1}).$$

ПРИМЕР 3.2. Возьмем $\mathcal{I}_S = \mathfrak{m}_p$ – пучок максимальных идеалов, соответствующих приведенной точке $p \in S = \pi^{-1}(b_0)$. При замене S аффинной схемой U имеем $I = (x, y, t)$, откуда $A = \bigoplus_{s \geq 0} (x, y, t)^s$, $T = \text{Spec } k[x, y, t]$, $\tilde{T} = \text{Proj } \bigoplus_{s \geq 0} (x, y, t)^s$. Для исключительного дивизора $E = \sigma^{-1}(p, b_0)$ имеем

$$E = \left(\text{Proj } \bigoplus_{s \geq 0} (x, y, t)^s \right) \times_T (p, b_0) = \text{Proj } \bigoplus_{s \geq 0} (x, y, t)^s / (x, y, t)^{s+1}.$$

Слой $\tilde{S} = (\sigma \circ \pi)^{-1}(b_0)$ задается расслоенным произведением

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \xrightarrow{\sigma} & T \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\sigma} & S \end{array} \quad (3.1)$$

в котором σ – ограничение морфизма σ на слой $\tilde{S}$ над точкой b_0 . При переходе к алгебрам получим, что алгебра $R = \bigoplus_{s \geq 0} R_s$ для слоя $\tilde{S}$ равна копроизведению градуированных алгебр, заданному равенством

$$R_s = (x, y, t)^s \coprod_{k[x, y, t]} k[x, y].$$

Точная “push-out”-диаграмма $k[x, y, t]$ -модулей

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & (t) & \xlongequal{\quad} & (t) & & & \\ & \downarrow & & \downarrow \cdot t^s & & & \\ 0 & \longrightarrow & k[x, y, t] & \xrightarrow{\cdot t^s} & (x, y, t)^s & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & k[x, y] & \longrightarrow & R_s & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (3.2)$$

дает явную форму компоненты R_s :

$$R_s = (x, y, t)^s / (t^{s+1}). \quad (3.3)$$

Универсальное свойство алгебры R как копроизведения проверяется непосредственно.

Вложение исключительного дивизора E в схему $\tilde{S}$ определяется эпиморфизмом алгебр

$$\bigoplus_{s \geq 0} (x, y, t)^s / (t^{s+1}) \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} (x, y, t)^s / (x, y, t)^{s+1}. \quad (3.4)$$

Аналогично, вложение главной компоненты $\tilde{S}_0 \hookrightarrow \tilde{S}$ определено эпиморфизмом

$$\bigoplus_{s \geq 0} (x, y, t)^s / (t^{s+1}) \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} (x, y)^s. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Пусть $Z \subset T$ – нульмерная подсхема, задаваемая пучком идеалов $\mathcal{I}$. Исключительный дивизор E раздутья σ дается выражением

$$E := (\text{Proj } \mathcal{A}) \times_T Z = \text{Proj } \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}^s / \mathcal{I}^{s+1}.$$

Расслоенному произведению (3.1) соответствует $\mathcal{O}_S[t]$ -алгебра

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{R}_s \quad (3.6)$$

как копроизведение

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{I}^s \coprod_{\mathcal{O}_S[t]} \mathcal{O}_S, \quad s \geq 0.$$

Для (3.2) и (3.3) имеем прямые обобщения, и

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{I}^s / (t^{s+1}). \quad (3.7)$$

Аналогично (3.4) и (3.5) определены вложения исключительного дивизора E и главной компоненты $\tilde{S}_0$, задаваемые эпиморфизмами $\mathcal{O}_S[t]$ -алгебр

$$\bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}^s / (t^{s+1}) \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}^s / \mathcal{I}^{s+1}, \quad \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}^s / (t^{s+1}) \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}_S^s$$

соответственно. Следовательно, $\tilde{S} = \text{Proj } \mathcal{R}$, если $\mathcal{R}$ задано соотношениями (3.6), (3.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть E_0 – исключительный дивизор главной компоненты $\tilde{S}_0$, т.е. исключительный дивизор морфизма раздутья $\sigma_0 = \sigma|_{\tilde{S}_0} : \tilde{S}_0 \rightarrow S$. Нетрудно видеть, что главная компонента $\tilde{S}_0 = \text{Proj } \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}_S^s$ специального слоя $\tilde{S}$ пересекает исключительный дивизор E точно по подсхеме $E_0 = \text{Proj } \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{I}_S^s / \mathcal{I}_S^{s+1}$.

Автор выражает глубокую и искреннюю признательность М. Риду в Центре математических исследований Уорикского университета, Великобритания, В.В. Шокурову и Д.Б. Каледину в Институте им. В.А. Стеклова РАН, Россия, и М.Е. Сорокиной в Ярославском государственном педагогическом университете, Россия, за обсуждения и комментарии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Gieseker, “On the moduli of vector bundles on an algebraic surface”, *Ann. of Math.* (2), **106**:1 (1977), 45–60.
- [2] G. Ellingsrud, L. Göttsche, “Variation of moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarization”, *J. Reine Angew. Math.*, **467** (1995), 1–49.
- [3] M. Maruyama, “Moduli of stable sheaves. II”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**:3 (1978), 557–614.
- [4] Н. В. Тимофеева, “Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 756–769.
- [5] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 103–122.
- [6] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. II”, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 95–118.
- [7] D. Eisenbud, *Commutative Algebra. With a View Toward Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [8] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Progr. Math., **3**, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [9] H. Hironaka, “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I”, *Ann. of Math.* (2), **79**:1 (1964), 109–203.
- [10] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.

Н. В. Тимофеева

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: ntimofeeva@list.ru

Поступило

21.04.2009