Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Воскресенская, Конечные группы и ассоциированные с ними семейства модулярных форм, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 528–541

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:34:05

Конечные группы и ассоциированные с ними семейства модулярных форм

Г. В. Воскресенская

В этой статье изучается соответствие между конечными группами и q -рядами, которые при специализации являются разложениями Фурье для модулярных форм. Исследуются возникающие категории. Рассматривается проблема описания групп, которым соответствуют q -ряды с мультипликативными коэффициентами. Подгруппы такого типа содержатся в любой группе. Вводится и изучается понятие модулярного аналога генетического кода группы.

Библиография: 11 названий.

Введение. Изучение связей между модулярными формами и представлениями групп является одной из важных тем современных алгебры и теории чисел. В этой статье излагаются принципы соответствия между конечными группами и q -рядами, которые при специализации $q = e^{2\pi iz}$ являются разложениями Фурье для модулярных форм. С точки зрения теории групп эти исследования тесно связаны с задачей определения групп по классическим спектрам ее представлений. С точки зрения теории модулярных форм полученные результаты отвечают часто высказываемой идее о том, что “модулярные формы живут в семействах”.

Мы описываем возникающие здесь категории. Вводится и изучается понятие модулярного аналога генетического кода, т. е. исследуется вопрос о том, как наборы модулярных форм могут однозначно определять группу. Подробно рассматривается ситуация, когда группам соответствуют q -ряды с мультипликативными коэффициентами (модулярные формы, собственные относительно всех операторов Гекке).

Формулируются некоторые открытые проблемы.

1. Основные принципы соответствия с помощью рамочного шаблона.

1.1. *Общие сведения.* Для построения соответствия между элементами конечных групп и q -рядами мы используем эта-функцию Дедекинда, которая определяется формулой

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz},$$

z принадлежит верхней комплексной полуплоскости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00151а).

Пусть Φ – такое линейное представление G в пространстве V , где $24 \mid \dim V$, что для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен $P_g(x)$ имеет вид

$$\prod_{j=1}^s (x^{a_j} - 1)^{t_j}, \quad a_j, t_j \in \mathbb{N}, \quad 24 \mid \sum_{j=1}^s a_j t_j.$$

Тогда каждому элементу g можно сопоставить функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{j=1}^s \eta(a_j z)^{t_j}.$$

Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой из пространства $S_k(N, \chi)$, где

$$k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s t_j,$$

минимальный уровень N определяется из условия

$$24 \mid \sum_{j=1}^s \frac{N t_j}{a_j},$$

характер χ – характер Дирихле по модулю N ,

$$\chi(d) = \left(\frac{\prod_{j=1}^s a_j^{t_j}}{d} \right).$$

Если d четно, то $\chi(d)$ определяется как $\chi(d + N) = \chi(d)$, $(d, N) = 1$ [1], [2]. Символ $\prod_{j=1}^s a_j^{t_j}$ называется *рамочным шаблоном* (символом). Описанное выше соответствие называется *соответствием с помощью рамочного шаблона* (символа) (*frame-shape-correspondence*). Заметим, что название с использованием английского термина звучит лучше. Это название, видимо, и следует использовать. В любом случае русская терминология еще не устоялась.

Такое соответствие можно рассмотреть для любой группы. Например, можно подобрать представление в виде суммы регулярного и нескольких тривиальных.

Возникает интересная задача нахождения в рассматриваемой ситуации для данной группы минимального l такого, что $\dim V = 24l$. Так, для группы Z_{31} минимальное $l = 2$.

В нескольких следующих подпунктах мы рассмотрим множества модулярных форм, которые ассоциируются с элементами конечной группы, и возникающие здесь категории.

1.2. Категория $G - MF - SET$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество параболических форм $\eta_g(z)$, ассоциированных с элементами группы G по правилу, описанному в п. 1.1, с помощью некоторого представления, называется (G, Φ) -множеством.

ПРИМЕР. Рассмотрим $G \cong S_3$, $\Phi = 4 \cdot T_{\text{reg}}$, T_{reg} – регулярное представление;

$$G \cong \langle a, b : a^3 = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle;$$

$$\eta_e(z) = \eta^{24}(z), \quad \eta_a(z) = \eta_{a^2}(z) = \eta^8(3z), \quad \eta_b(z) = \eta_{ab}(z) = \eta_{a^2b}(z) = \eta^{12}(2z);$$

(S_3, T_{reg}) -множество

$$\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z)\}.$$

(G, Φ) -Множества образуют категорию, если фиксировать G и менять Φ . Пусть $A - (G, \Phi)$ -множество, $B - (G, \Psi)$ -множество. Морфизм определяется следующим образом:

$$f_1(z) = \eta_{g, \Phi}(z) \in A \quad \text{переходит в} \quad f_2(z) = \eta_{g, \Psi}(z) \in B$$

для любого элемента $g \in G$.

ПРИМЕР. Пусть $G \cong S_3$, $T_1(a) = T_1(b) = 1$, $T_2(a) = 1$, $T_2(b) = -1$, $T_3 -$ двумерное неприводимое представление; $\Phi = 4 \cdot T_{\text{reg}}$, $\Psi = 8T_1 \oplus 4T_2 \oplus 6T_3$;

$$A = \{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z)\}$$

$-(G, \Phi)$ -множество,

$$B = \{\eta^{24}(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^8(2z)\eta^8(z)\}$$

$-(G, \Psi)$ -множество.

Действие морфизма:

$$\begin{aligned} \eta_{g, \Phi}(z) &= \eta^8(3z) \rightarrow \eta_{g, \Psi}(z) = \eta^6(3z)\eta^6(z), & g &= a, a^2, \\ \eta_{g, \Phi}(z) &= \eta^{12}(2z) \rightarrow \eta_{g, \Psi}(z) = \eta^8(2z)\eta^8(z), & g &= b, ab, a^2b, \\ \eta_{e, \Phi}(z) &= \eta^{24}(z) \rightarrow \eta_{e, \Psi}(z) = \eta^{24}(z). \end{aligned}$$

Тождественный морфизм:

$$\eta_{g, \Phi}(z) \rightarrow \eta_{g, \Phi}(z).$$

Эту категорию можно обозначить $G - MF - SET$.

1.3. Категория $GR - MF - SET$. Эта категория определится, если не фиксировать конечную группу G и рассматривать морфизм (G, Φ) -множества A в (H, Ψ) -множество B следующим образом: пусть ϕ -гомоморфизм группы G в группу H , тогда $\eta_{g, \Phi}(z) \rightarrow \eta_{\phi(g), \Psi}(z)$.

При определении композиции морфизмов учитывается область определения (так же, как и при определении гоморфизмов групп).

1.4. (G, Φ) -Множества как элементы полугруппы. Можно определить композицию множеств (G, Φ_1) -множества A и (G, Φ_2) -множества B как $(G, \Phi_1 \oplus \Phi_2)$ -множество. Если множество $A = \{\eta_{g, \Phi_1}\}_{g \in G}$, $B = \{\eta_{g, \Phi_2}\}_{g \in G}$, то их композиция $C = \{\eta_{g, \Phi_1} \eta_{g, \Phi_2}\}_{g \in G}$. Это задает структуру полугруппы.

1.5. Редуцированные (G, Φ) -множества. Во многих задачах удобно рассматривать множества, получающиеся из (G, Φ) -множеств удалением повторяющихся параболических форм. Мы будем называть такие множества *редуцированными*.

Например, редуцированное (S_3, T_{reg}) -множество

$$\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\}.$$

Интересной проблемой является определение соответствующих групп по заданным редуцированным (G, Φ) -множествам.

Технически это задача из теории групп, она по сути является задачей нахождения группы по данным характеристическим многочленам ее представлений.

1.6. *Вложения групповых алгебр в прямые суммы пространств модулярных форм.* В случае, когда определено (G, Φ) -множество, групповую алгебру $\mathbb{C}[G]$ можно интерпретировать как подпространство в

$$\bigoplus_{g \in G} S_{k,g}(N, \chi) = \bigoplus m_g S_{k,g}(N, \chi),$$

где $\eta_g(z) \in S_{k,g}(N, \chi)$. Во второй сумме мы собрали вместе одинаковые пространства. Каждому элементу $g \in G$ сопоставляется линейное пространство, порожденное $\eta_g(z)$ ($\mathbb{C}\eta_g(z)$).

В случае, когда все $\eta_g(z)$ являются мультипликативными η -произведениями, выполнено

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{g \in G} S_{k,g}(N, \chi).$$

Например,

$$\mathbb{C}[S_3] \cong S_{12}(1) \oplus 2S_4(9) \oplus 3S_6(4),$$

или

$$\mathbb{C}[S_3] \cong S_{12}(1) \oplus 2S_6(3) \oplus 3S_8(2).$$

Интересной малоизученной проблемой является нахождение условий, при которых вложение $\mathbb{C}[G]$ в прямую сумму пространств параболических форм является изоморфизмом в случаях, когда пространства $S_{k,g}(N, \chi)$ не одномерны, а также подробное изучение вложений (дополнительные элементы базиса, можно ли их разумным образом дополнить до (G, Φ) -множества).

1.7. Модулярные формы, независимые относительно группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем множество S , состоящее из эта-произведений, *независимым относительно группы*, если не существует такой группы G , что S содержится в некотором (G, Φ) -множестве M . В противном случае множество S будем называть *зависимым относительно группы*, а его элементы G -зависимыми.

Модулярные формы, принадлежащие одному и тому же (G, Φ) -множеству, будем называть G -связанными.

Определить, являются ли данные параболические формы G -зависимыми или нет, совсем не просто. И даже не так легко узнать, являются ли они G -связанными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функции из множества*

$$S = \{\eta^{24}(z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^8(3z)\}$$

не являются G -связанными ни для какой группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: множество S является редуцированным (G, Φ) -множеством для некоторой группы G . Элементы этой группы имеют порядки 1, 3, 5. Покажем сначала, что у группы $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ не существует такого точного представления, что элементам этой группы соответствуют только формы $\eta^{24}(z)$, $\eta^8(3z)$. Пусть такое представление существует, m_1 – кратность, с которой в него входит единичное представление;

$$m_1 = \frac{24}{9}.$$

Но это число должно быть целым. Следовательно, такое представление не существует и для элементарных абелевых групп экспоненты 3 большего ранга. Значит, силовская 3-подгруппа S_3 группы G изоморфна $\mathbb{Z}_3$. Аналогично показывается, что силовская 5-подгруппа S_5 группы G изоморфна $\mathbb{Z}_5$. В этом случае группа должна быть метациклической по известной теореме [1; теорема 9.3.4.]. Но так как $|S_3|$ не делит $|\text{Aut}(S_5)|$ и $|S_5|$ не делит $|\text{Aut}(S_3)|$, а элементов порядка 15 в группе нет, то искомой группы не существует. Получено противоречие, и утверждение доказано.

1.8. “Уровень” группы. Для каждого набора (G, Φ) -множеств, определяющих группу, можно определить такое минимальное число N , что все функции из этих множеств являются параболическими формами уровня N .

Рассматривая все определяющие наборы, можно выбрать минимальное число по ним. Это число будем называть *уровнем группы*. Можно классифицировать группы по так определенному уровню. Группой уровня 1 является только единичная.

2. Конечные группы, с элементами которых ассоциируются мультипликативные η -произведения. В этом пункте речь пойдет о группах, элементам которых соответствуют ряды с мультипликативными коэффициентами. В этом случае такой ряд соответствует представлению размерности 24, так как первый коэффициент должен равняться 1. Возникающие здесь параболические формы обладают очень интересными свойствами.

2.1. Мультипликативные η -произведения. Мы рассмотрим специальный класс модулярных форм, которые называются *мультипликативными η -произведениями*. Они находят различные применения в теории модулярных форм и ее приложениях.

ТЕОРЕМА 1. *Существует в точности 28 функций, удовлетворяющих следующим условиям:*

- 1) *они являются параболическими формами целого веса с характерами;*
- 2) *они не имеют нулей вне параболических вершин, и порядок нуля в каждой вершине равен 1.*

Эта теорема доказана в статье [3].

Заранее не предполагается, что эти функции являются собственными относительно всех операторов Гекке, но фактически это так. Следовательно, коэффициенты таких функций мультипликативны. Линейные пространства $S_k(N, \chi)$, содержащие функцию, являющуюся мультипликативным η -произведением, для минимального N одномерны.

С другой стороны, американские математики Даммит, Кисилевски и МакКей доказали, что существует в точности 30 функций вида

$$\prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z), \quad a_j, t_j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^s a_j t_j = 24,$$

с мультипликативными коэффициентами.

Число s не фиксировано, перебираются все возможные разбиения числа 24.

В их работе [4] в отличие от теоремы 1 заранее предполагается, что исследуемая функция является η -произведением.

Эти 30 функций содержат все функции, определяемые теоремой 1, и две функции полуцелого веса: $\eta^3(8z)$, $\eta(24z)$.

Эти параболические формы приведены в таблице 1 с указанием весов и характеров (их мы будем далее называть мультипликативными η -произведениями.)

ТАБЛИЦА 1

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$(-23/d)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$(-11/d)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$(-7/d)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$(-5/d)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$(-3/d)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$(-2/d)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$(-1/d)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$(-3/d)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$(-1/d)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$(-2/d)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$(-7/d)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$(-1/d)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1
$\eta^3(8z)$	$3/2$	4	$(-4/d)$
$\eta(24z)$	$1/2$	576	$(12/d)$

2.2. $M\eta P$ -группы. В следующем предложении описывается свойство, позволяющее определить группы некоторого нового специального типа. Подгруппы такого типа содержатся в любой группе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если g – такой элемент в группе G , что функция $\eta_g(z)$, ассоциированная с g посредством некоторого представления, является мультипликативным η -произведением, то функция $\eta_h(z)$, $h = g^k$, также является мультипликативным η -произведением.

Этот факт приводит к рассмотрению интересной открытой проблемы:

проблема нахождения всех таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами группы с помощью некоторого точного представления с помощью рамочного символа, являются мультипликативными η -произведениями.

Будем называть такие группы $M\eta P$ -группами.

Очевидно, что подгруппа $M\eta P$ -группы сама является $M\eta P$ -группой.

Мейсон показал, что группа Матье M_{24} является $M\eta P$ -группой [5], [6]. Это большая и неразрешимая группа, но существуют $M\eta P$ -группы, не являющиеся подгруппами в M_{24} . Кроме того, во многих случаях для одной и той же $M\eta P$ -группы возможны различные соответствия между элементами группы и мультипликативными η -произведениями.

Все это стимулировало интерес к изучению классификации $M\eta P$ -групп. В статьях [7]–[11] автором были найдены абелевы метациклические $M\eta P$ -группы, $M\eta P$ -подгруппы в $SL(5, C)$, $M\eta P$ -группы порядка p^k , p – нечетное простое число, доказано, что все группы порядка 24 являются $M\eta P$ -группами.

Так как функция $\eta^{24}(z)$ является мультипликативным η -произведением, то $M\eta P$ -подгруппы содержатся в любой группе (такая подгруппа может быть тривиальной).

2.3. Ограничения представлений на $M\eta P$ -подгруппы. Если рассматривать ограничение на $M\eta P$ -подгруппу H группы G такого представления $\Phi: G \rightarrow GL(V)$, что для любого $h \in H$ $\eta_{h,\Phi}(z)$ является мультипликативным η -произведением, то ограничение представления Φ на другую подгруппу F может уже не приводить к мультипликативным η -произведениям.

Например, рассмотрим группу

$$D_5 \cong \langle a, b : a^5 = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle.$$

Пусть

$$\Phi = 2(T_1 \oplus T_2) \oplus 8(T_3 \oplus T_4),$$

здесь T_1, T_2 – двумерные неприводимые представления, T_3, T_4 – одномерные неприводимые представления.

Далее, рассмотрим подгруппы $H \cong \langle b \rangle$, $F \cong \langle a \rangle$.

Функции

$$\eta_{b,\Phi}(z) = \eta^{12}(2z), \quad \eta_{e,\Phi}(z) = \eta^{24}(z)$$

являются мультипликативными η -произведениями, а функция $\eta_{a,\Phi}(z) = \eta^2(5z)\eta^{14}(z)$ не является, т. е. ограничение представления Φ на H приводит к мультипликативным η -произведениям, а ограничение на F не приводит.

Но справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – такая конечная группа, в которой существуют не менее двух нетривиальных $M\eta P$ -подгрупп. Если существует такое точное представление $\Phi: G \rightarrow GL(V)$, $\dim V = 24$, что для любой подгруппы H в G и для любого $h \in H$, $\eta_{h,\Psi}(z)$ является мультипликативным η -произведением, Ψ – ограничение Φ на H , то G сама является $M\eta P$ -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида мультипликативных η -произведений следует, что в группе могут быть элементы только порядков от 1 до 24, исключая 13, 17, 19. Пусть $g \in G$, $h = g^l$ – элемент простого порядка. Так как при ограничении на подгруппу $\langle h \rangle$ каждый элемент соответствует мультипликативному η -произведению, то h соответствует одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} &\eta^{12}(2z), \quad \eta^8(2z)\eta^8(z), \quad \eta^8(3z), \quad \eta^6(3z)\eta^6(z), \\ &\eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^3(7z)\eta^3(z), \quad \eta^2(11z)\eta^2(z), \quad \eta(23z)\eta(z). \end{aligned}$$

Можно показать, что в этом случае $\eta_{g,\Phi}(z)$ является мультипликативным η -произведением. Покажем, например, это в случае, когда $\text{ord}(g) = 6$. Характеристические многочлены элементов g , g^2 , g^3 равны

$$P_g(x) = \Phi_6^\alpha \Phi_3^\beta \Phi_2^\gamma \Phi_1^\delta, \quad P_{g^2}(x) = \Phi_3^{\alpha+\beta} \Phi_1^{\gamma+\delta}, \quad P_{g^3}(x) = \Phi_2^{2\alpha+\gamma} \Phi_1^{2\beta+\delta}.$$

Здесь Φ_j – круговые многочлены.

Следует рассмотреть 4 случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad &\begin{cases} g^2 \leftrightarrow \eta^8(3z), \\ g^3 \leftrightarrow \eta^{12}(2z), \end{cases} & 2) \quad &\begin{cases} g^2 \leftrightarrow \eta^6(3z)\eta^6(3z), \\ g^3 \leftrightarrow \eta^{12}(2z), \end{cases} \\ 3) \quad &\begin{cases} g^2 \leftrightarrow \eta^8(3z), \\ g^3 \leftrightarrow \eta^8(2z)\eta^8(z), \end{cases} & 4) \quad &\begin{cases} g^2 \leftrightarrow \eta^6(3z)\eta^6(3z), \\ g^3 \leftrightarrow \eta^8(2z)\eta^8(z). \end{cases} \end{aligned}$$

В каждом из этих случаев мы должны в натуральных числах решить соответствующую систему:

$$\begin{aligned} 1) \quad &\begin{cases} \alpha + \beta = 8, \\ \gamma + \delta = 8, \\ \alpha + \gamma = 12, \\ 2\beta + \delta = 12. \end{cases} & 2) \quad &\begin{cases} \alpha + \beta = 6, \\ \gamma + \delta = 12, \\ 2\alpha + \gamma = 12, \\ 2\beta + \delta = 12. \end{cases} \\ 3) \quad &\begin{cases} \alpha + \beta = 6, \\ \gamma + \delta = 12, \\ 2\alpha + \gamma = 8, \\ 2\beta + \delta = 16. \end{cases} & 4) \quad &\begin{cases} \alpha + \beta = 8, \\ \gamma + \delta = 8, \\ 2\alpha + \gamma = 8, \\ 2\beta + \delta = 16. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитываем также неравенства

$$\alpha \leq \beta, \quad \alpha \leq \gamma, \quad \alpha \leq \delta, \quad \beta \leq \delta, \quad \gamma \leq \delta.$$

В четвертом случае решений в натуральных числах нет. В остальных случаях получаем единственную возможность в каждом случае:

$$\begin{cases} 1) \quad g \leftrightarrow \eta^4(6z), \\ 2) \quad g \leftrightarrow \eta^3(6z)\eta^3(2z), \\ 3) \quad g \leftrightarrow \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z). \end{cases}$$

Для элементов других порядков доказательство аналогично. Все случаи проверены. Теорема доказана.

Таблица 2

$\text{ord}(g)$	модулярная форма
4	$\eta^{6l}(4z)$
6	$\eta^{4l}(6z)$
8	$\eta^{3l}(8z)$
12	$\eta^{2l}(12z)$
24	$\eta^l(24z)$

Но в случае, если в G содержится только одна нетривиальная $M\eta P$ -подгруппа, то теорема может быть не верна. Например, если

$$G \cong \mathbb{Z}_9 \cong \langle g \rangle, \quad \eta_g(z) = \eta^2(9z)\eta^6(z), \quad \eta_{g^3}(z) = \eta^6(3z)\eta^6(z).$$

В этом случае $\eta_g(z)$ не является мультипликативным η -произведением, а $\eta_{g^3}(z)$ является.

Интересной представляется следующая задача: нахождение всех $M\eta P$ -подгрупп группы G , и для каждой такой подгруппы H нахождение всех таких точных представлений Φ группы G , что $\eta_{h,\Phi}(z)$ является мультипликативным η -произведением для $h \in H$.

При исследовании q -рядов, соответствующих элементам группы с помощью рамочного символа, хотелось бы получить информацию о коэффициентах этих рядов, выразить их через известные арифметические функции.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – группа порядка $24l$, $(l, 24) = 1$, Φ – регулярное представление группы, тогда

1) выполнено равенство

$$\eta_{g,\Phi}(z) = f(lz), \quad l \mid \text{ord}(g),$$

где f – мультипликативное η -произведение,

2) для коэффициентов Фурье функции $\eta_{g,\Phi}(z)$ справедливо

- a) $b(n) = 0$, если l не делит n ,
- b) $b(n) = a(n/l)$, $l \mid n$, где $a(n)$ – коэффициент функции $f(z)$,
- c) $b(lmn) = b(lm)b(ln)$, $(m, n) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого элемента $g \neq e$ характеристический многочлен $P_g(x)$ имеет след, равный 0.

Если $\text{ord}(g) = 2$, то имеется единственная возможность

$$P_g(z) = (x^2 - 1)^{12l}, \quad g \leftrightarrow \eta^{12l}(2z).$$

Если $\text{ord}(g) = 3$, то имеется единственная возможность

$$P_g(z) = (x^3 - 1)^{8l}, \quad g \leftrightarrow \eta^{8l}(3z).$$

Из этого вытекают соответствия таблицы 2.

Если

$$\text{ord}(h) = l\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24,$$

то элемент h соответствует функции $\eta^{24/\alpha}(\alpha z)$, причем $\eta^{24/\alpha}(\alpha z)$ является мультипликативным η -произведением.

Рассмотрим разложения в ряды Фурье

$$\eta^{24/\alpha}(\alpha z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n, \quad \eta^{24/\alpha}(\alpha z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^{ln} = \eta_{g,\Phi}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n.$$

Из них вытекает, что

- а) $b(n) = 0$, если l не делит n ,
- б) $b(n) = a(n/l)$, $l \mid n$.

Так как коэффициенты $a(n)$ мультипликативны, то при $(m, n) = 1$

$$b(lmn) = a(mn) = a(m)a(n) = a(lm)a(ln) = b(m)b(n) \quad \text{для всех } l.$$

Теорема 3 доказана.

3. Модулярный аналог генетического кода группы. *Генетическим кодом* группы называется набор порождающих элементов и определяющих соотношений между ними. Эти наборы определяют группу. Генетический код группы находится неоднозначно.

В рассматриваемом контексте является содержательной задача нахождения таких наборов редуцированных (G, Φ) -множеств, которые *однозначно* определяют группу. Это в некотором смысле модулярный аналог генетического кода.

В таблице 3 мы укажем определяющие (G, Φ) -множества для групп порядков от 1 до 8. Дальнейшее исследование модулярных аналогов генетического кода является перспективной темой исследований.

Поясним нахождение модулярного генетического кода на примере $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Так как для группы G существует редуцированное (G, Φ_1) -множество $\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\}$, то все неединичные элементы этой группы имеют порядок 2. Порядок этой группы равен 2^n . Число $m_1 = 24/2^n$ – кратность тривиального представления в представлении Φ_1 . Это число должно быть неотрицательным целым. Порядок группы равен 2, 4 или 8.

Теперь рассмотрим второе (G, Φ_2) -множество

$$\{\eta^{24}(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}.$$

В этом случае в группе есть по крайней мере два несопряженных элемента порядка 2. Покажем, что случай $|G| = 8$ невозможен.

Пусть в группе G α элементов соответствуют модулярной форме $\eta^{11}(2z)\eta^2(z)$, а β элементов соответствуют модулярной форме $\eta^{10}(2z)\eta^4(z)$. Так как число m_1 – целое, то $8 \mid (2\alpha + 4\beta)$. Существуют две возможности:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 5, \quad \alpha = 6, \quad \beta = 1.$$

Пусть группа порождается элементами a, b, c .

В первом случае рассмотрим представление

$$T: \quad T(a) = 1, \quad T(b) = -1.$$

Таблица 3

группа	модулярный генетический код
$\{e\}$	$\{\eta^{24}(z)\}$
$\mathbb{Z}_2$	$\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\} \wedge \{\eta^{24}(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z)\}$
$\mathbb{Z}_3$	$\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z)\}$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$ $\{\eta^{24}(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}$
$\mathbb{Z}_4$	$\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$ $\{\eta^{24}(z), \eta^5(4z)\eta^2(2z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}$
$\mathbb{Z}_5$	$\{\eta^{24}(z), \eta^4(5z)\eta^4(z)\}$
$\mathbb{Z}_6$	$\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^8(3z)\eta^{12}(2z)\} \wedge$ $\{\eta^{24}(z), \eta^3(6z)\eta^6(z), \eta^3(6z)\eta^6(z), \eta^9(2z)\eta^6(z)\}$
S_3	$\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z)\eta^{12}(2z)\} \wedge$ $\{\eta^{24}(z), \eta^3(6z)\eta^6(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z)\}$
$\mathbb{Z}_7$	$\{\eta^{24}(z), \eta^3(7z)\eta^3(z)\}$
$\mathbb{Z}_8$	$\{\eta^{24}(z), \eta^3(8z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\}$
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$ $\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z)\}$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$ $\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^6(2z)\eta^{12}(z), \eta^4(2z)\eta^{16}(z)\}$
D_4	$\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$ $\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}$
Q_8	$\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$ $\{\eta^{24}(z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^4(4z)\eta^8(z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z)\}$

Здесь мы полагаем, что элементы a, b соответствуют модулярной форме $\eta^{11}(2z)\eta^2(z)$. Кратность вхождения этого представления в Φ_2 равна числу $20/8$, а должна равняться целому числу.

Во втором случае рассмотрим представление

$$T: \quad T(a) = 1, \quad T(b) = 1, \quad T(c) = -1.$$

Здесь мы полагаем, что элемент a соответствуют модулярной форме $\eta^{10}(2z)\eta^4(z)$. Кратность вхождения этого представления в Φ_2 равна числу $18/8$, а должна равняться целому числу.

Итак, остается единственная возможность

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle.$$

Выпишем соответствующие представления. Пусть элементы a, b соответствуют модулярной форме $\eta^{11}(2z)\eta^2(z)$, элемент ab соответствуют модулярной форме $\eta^{10}(2z) \times \eta^4(z)$. Искомое представление:

$$\Phi_1 \cong 6 \cdot T_{\text{reg}}, \quad \Phi_2 \cong 8T_1 \oplus 5T_2 \oplus 5T_3 \oplus 6T_4.$$

Здесь

$$T_1(a) = T_2(a) = T_1(b) = T_3(b) = 1, \quad T_3(a) = T_4(a) = T_2(b) = T_4(b) = -1.$$

В остальных случаях доказательство проводится аналогичными рассуждениями.

ТЕОРЕМА 4. Пусть p – нечетное простое число, $p \neq 3, 7$. Тогда диэдральная группа D_p однозначно определяется множеством

$$\{\eta^{24p}(z), \eta^{24}(pz), \eta^{12p}(2z)\}.$$

Группы D_3 и D_7 определяются наборами из двух множеств:

$$\begin{aligned} D_3 &\cong S_3 : \{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\} \wedge \{\eta^{24}(z), \eta^3(6z)\eta^6(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z)\}, \\ D_7 &\cong \{\eta^{168}(z), \eta^{24}(7z), \eta^{84}(2z)\} \wedge \{\eta^{24}(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим множество

$$\{\eta^{24p}(z), \eta^{24}(pz), \eta^{12p}(2z)\}$$

через S . Пусть Φ – представление группы G , для которого S является редуцированным (G, Φ) -множеством. Из вида параболических форм следует, что $|G| = 2^s p^t$. Вычислим кратность, с которой в это представление входит единичное. Получим, $m_1 = 24p/(2^s p^t)$. Так как это число должно быть целым, то при $p > 3$, $t = 1$, s может принимать значения 1, 2 или 3. При $p > 3$ силовская p -подгруппа является циклической порядка p . По теореме Силова $1 + pt$ делит $|G|$. Если $m = 0$, то S_p является нормальной, и так как в группе нет элементов порядка $2p$, S_2 является подгруппой в $\text{Aut}(Z_p)$. Значит, в этом случае $S_2 \cong Z_2$ и $G \cong D_p$. Искомым представлением Φ является прямая сумма, в которую каждое неприводимое двумерное представление входит с кратностью 24, а каждое одномерное – с кратностью 12.

Возможны еще два случая:

$$p = 3, \quad m = 1, \quad 1 + pt = 4, \quad p = 7, \quad m = 1, \quad 1 + pt = 8.$$

Случай $p = 3$. Обозначим множество

$$\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\}$$

через S , множество

$$\{\eta^{24}(z), \eta^3(6z)\eta^6(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z)\}$$

через S_1 . Пусть множество S соответствует представлению Φ , а S_1 – представлению Ψ .

Вычислим кратность, с которой в Φ входит единичное. Получим, $m_1 = 24/(2^s 3^t)$. Так как это число должно быть целым, то $t = 1$.

Если силовская 3-подгруппа нормальна, то вся группа является диэдральной по тем же соображениям, что и выше. В противном случае в группе 8 элементов порядка 3, остальные элементы порядков 1 и 2. Вычислим кратность, с которой в Ψ входит единичное. Получим, $m_1 = (24 + 8 \cdot 6 + 2l)/(3 \cdot 2^s)$. При $s = 2$ имеем $l = 3$, при $s = 3$ имеем $l = 15$. В обоих этих случаях m_1 не является целым числом.

Для D_3 представление Φ является прямой суммой, в которую неприводимое двумерное представление входит с кратностью 8, а одномерные представления входят с кратностью 4.

Представление Ψ является прямой суммой, в которую неприводимое двумерное представление входит с кратностью 6, а одномерные представления, переводящие

элементы второго порядка в -1 , входят с кратностью 5, единичное представление – с кратностью 7.

Случай $p = 7$. Обозначим множество

$$\{\eta^{168}(z), \eta^{24}(7z), \eta^{84}(2z)\}$$

через S , множество

$$\{\eta^{24}(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}$$

через S_1 . Пусть множество S соответствует представлению Φ , а S_1 – представлению Ψ .

Если силовская 7-подгруппа нормальна, то вся группа является диэдральной по тем же соображениям, что и выше. В противном случае в группе 48 элементов порядка 7, остальные элементы порядков 1 и 2. Порядок группы равен 56. Силовская 2-подгруппа должна быть нормальна. Вычислим кратность, с которой в Ψ входит единичное. Получим, $m_1 = (24 + 48 \cdot 3 + 7 \cdot 4)/56$. Это число не является целым.

Для D_7 представление Φ является прямой суммой, в которую неприводимое двумерное представление входит с кратностью 24, а одномерные представления входят с кратностью 12.

Представление Ψ является прямой суммой, в которую неприводимое двумерное представление входит с кратностью 3, а одномерные представления, переводящие элементы второго порядка в 1, входят с кратностью 1, единичное представление – с кратностью 5. Теорема доказана.

4. Некоторые открытые проблемы и перспективы исследований.

Задача 1. Описать все конечные группы G , для которых существуют (G, Φ) -множества, состоящие из мультипликативных произведений, т. е. завершить классификацию $M\eta P$ -групп.

Задача 2. Для данной группы найти наборы модулярных форм, однозначно ее определяющие.

Задача 3. Для данного N описать все группы “уровня N ”.

Задача 4. Пусть некоторое множество S является редуцированным (G, Φ) -множеством. Описать все такие группы H , что S является (H, Ψ) -множеством. В этом случае можно говорить, что группа G определяет некоторое семейство, состоящее из наборов модулярных форм. С другой стороны, группы G и H оказываются связанными с помощью модулярных форм.

Задача 5. Задача 1 допускает обобщение: пусть S – некоторое множество параболических форм, определяемых некоторыми естественными условиями. Описать все такие группы G , что (G, Φ) -множества состоят только из элементов множества S .

Задача 6. Для данной группы описать все ее $M\eta P$ -подгруппы и все ее точные представления, ограничения которых на выбранную $M\eta P$ -подгруппу ассоциируют элементы этой подгруппы со степенями мультипликативных η -произведений.

Задача 7. Изучить вопрос о G -зависимости параболических форм.

Продолжение исследований позволит изучить глубокие связи между математическими объектами различной природы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Холл, *Теория групп*, ИЛ, М., 1962.
- [2] К. Ono, *The Web of Modularity: Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and q -Series*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [3] G. V. Voskresenskaya, “One special class of modular forms and group representations”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **11**:1, (1999), 247–262.
- [4] D. Dummit, H. Kisilevskii, J. McKay, “Multiplicative products of η -functions”, *Finite Groups – Coming of Age* (Montreal, Que., 1982), Contemp. Math., **45**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, 89–98.
- [5] G. Mason, “ M_{24} and certain automorphic forms”, *Finite Groups – Coming of Age* (Montreal, Que., 1982), Contemp. Math., **45**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, 223–244.
- [6] G. Mason, “Finite groups and Hecke operators”, *Math. Ann.*, **283**:3, (1989), 381–409.
- [7] Г. В. Воскресенская, “Метациклические группы и модулярные формы”, *Матем. заметки*, **67**:2, (2000), 163–173.
- [8] Г. В. Воскресенская, “Абелевы группы и модулярные формы”, *Вестн. Самарского гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2003, № 2, 21–35.
- [9] Г. В. Воскресенская, “Мультипликативные произведения эта-функций Дедекинда и представления групп”, *Матем. заметки*, **73**:4, (2003), 511–526.
- [10] Г. В. Воскресенская, “О проблеме классификации конечных групп, ассоциированных с мультипликативными η -произведениями”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **10**:4, (2004), 43–64.
- [11] G. V. Voskresenskaya, “Multiplicative Dedekind η -functions and representations of finite groups”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **17**:1, (2005), 359–380.

Г. В. Воскресенская

Самарский государственный университет

E-mail: galvosk@mail.ru

Поступило

22.09.2008

Исправленный вариант

03.11.2009