Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, И. А. Пятышев, Пример не аппроксимативно компактного множества существования с конечнозначной метрической проекцией, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 170–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:06:53

Пример не аппроксимативно компактного множества существования с конечнозначной метрической проекцией

П. А. Бородин, И. А. Пятыхев

Указанный в заглавии пример строится в произвольной банаховой решетке, порядок в которой определяется счетным симметрическим базисом Шаудера с константой симметричности 1 с дополнительным условием строгой монотонности нормы относительно координат.

Библиография: 7 названий.

Пусть M – некоторое подмножество действительного банахова пространства $(X, \|\cdot\|)$. Последовательность $\{y_n\} \subset M$ называется *минимизирующей* для элемента $x \in X$, если

$$\|y_n - x\| \rightarrow \rho(x, M) := \inf\{\|x - y\| : y \in M\} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Ефимов, Стечкин, [1]). Множество M *аппроксимативно компактно*, если для любого $x \in X$ всякая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \subset M$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из M .

Понятие аппроксимативной компактности имеет непосредственное отношение к проблеме выпуклости *чебышевских* множеств, т.е. таких множеств $M \subset X$, что для любого элемента $x \in X$ его *метрическая проекция* $P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ состоит ровно из одного элемента. Наиболее остро проблема выпуклости стоит в гильбертовом пространстве: доказать (или опровергнуть), что в гильбертовом пространстве всякое чебышевское множество выпукло. О проблеме выпуклости см. обзорную работу [2].

В связи с этой проблемой была доказана

ТЕОРЕМА А (Ефимов, Стечкин, [1]). *Чебышевское множество в гладком равномерно выпуклом банаховом пространстве (в частности, в гильбертовом пространстве) выпукло тогда и только тогда, когда оно аппроксимативно компактно.*

В дальнейшем теорема А обобщалась Власовым [3].

Теорема А позволяет переформулировать проблему выпуклости следующим образом: существует ли в гильбертовом пространстве не аппроксимативно компактное чебышевское множество?

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00648а).

В настоящей работе для целого класса банаховых пространств, в частности, для сепарабельного гильбертова пространства получен утвердительный ответ на менее категоричный вопрос: существует ли такое не аппроксимативно компактное множество M , что метрическая проекция $P_M(x)$ непуста и конечна для любого $x \in X$?

Будем говорить, что банахово пространство принадлежит *классу* $(*)$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (1) X бесконечномерно и обладает счетным базисом Шаудера $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ из единичных векторов, так что каждый элемент $x \in X$ можно отождествить с набором $(x^1, x^2, \dots)$ его координат в этом базисе, и $x^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- (2) норма элемента не меняется при любой перестановке его координат;
- (3) если $x = (x^1, x^2, \dots)$, $y = (y^1, y^2, \dots)$ и $|y^n| \leq |x^n|$ для любого $n = 1, 2, \dots$, то $\|y\| \leq \|x\|$; при этом если $|y^j| < |x^j|$ хотя бы для одного j , то $\|y\| < \|x\|$.

Таким образом, класс $(*)$ состоит из банаховых решеток, порядок в которых определяется счетным симметрическим базисом с константой симметричности 1, с дополнительным условием строгой монотонности нормы относительно координат. Этот класс содержит все пространства l_p , $1 \leq p < \infty$.

ТЕОРЕМА. *В любом банаховом пространстве X из класса $(*)$ существует такое не аппроксимативно компактное ограниченное множество M , что метрическая проекция $P_M(x)$ непуста и конечна для любого $x \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем все векторы из множества

$$\left\{ \pm e_1, \pm \frac{e_1}{2}, \pm \frac{e_2}{2}, \dots, \pm \frac{e_1}{k}, \pm \frac{e_2}{k}, \dots, \pm \frac{e_k}{k}, \dots \right\}$$

в последовательность $s_1 = e_1, s_2, s_3, \dots$ таким образом, чтобы для любого n все координаты вектора s_n с номерами, большими n , были равны нулю: $s_n^k = 0$ при $k > n$. Положим $a_n = e_{2n} + s_n$, $b_n = -e_{2n} + s_n$, $n = 1, 2, \dots$. Покажем, что множество

$$M = \{e_1, a_n, b_n : n = 1, 2, \dots\}$$

— искомое.

Для нулевого элемента имеем $\|0 - e_1\| = 1$, $\|0 - a_n\| = \|0 - b_n\| > 1$ при всех n (см. условие (3) на пространство X), так что $\rho(0, M) = 1$ и метрическая проекция $P_M(0) = \{e_1\}$ одноточечна. В то же время $\|0 - a_n\| \leq \|e_{2n}\| + \|s_n\| \rightarrow 1$, т.е. $\{a_n\}$ — минимизирующая последовательность для 0. Из нее нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности: при $n > m$ получается $\|a_n - a_m\| \geq \|e_{2n}\| = 1$ (условие (3) на X), так что множество M не аппроксимативно компактно.

Осталось доказать непустоту и конечность метрической проекции $P_M(x)$ для любого элемента $x = (x^1, x^2, \dots) \neq 0$. Найдется такой номер m , что $|(x - s_m)^k| \leq |x^k|$ при всех $k = 1, \dots, m$, причем $|(x - s_m)^\nu| < |x^\nu|$ для некоторого $\nu \in \{1, \dots, m\}$, и, кроме того, $|x^{2m}| < 1$.

Пусть $x^{2m} \geq 0$. Тогда для любого $k \neq 2m$ имеем $|(x - a_m)^k| \leq |x^k|$, $|(x - a_m)^\nu| < |x^\nu|$ и $|(x - a_m)^{2m}| = |x^{2m} - 1| \leq 1$. Отсюда и из условия (3) на пространство X следует, что $\|x - e_{2m}\| > \|x - a_m\|$.

Для доказательства конечности и непустоты $P_M(x)$ достаточно доказать неравенство

$$\|x - a_m\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - a_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - b_n\|.$$

При $n > m$ у векторов $x - e_{2m} - x^{2n}e_{2n}$ и $x - e_{2n} - x^{2n}e_{2n}$ все координаты, кроме $(2n)$ -й и $(2m)$ -й, одинаковы, а

$$\begin{aligned} |(x - e_{2m} - x^{2n}e_{2n})^{2m}| &= |x^{2m} - 1| \leq 1 = |(x - e_{2n} - x^{2n}e_{2n})^{2n}|, \\ |(x - e_{2m} - x^{2n}e_{2n})^{2n}| &= 0 \leq |x^{2m}| = |(x - e_{2n} - x^{2n}e_{2n})^{2m}|, \end{aligned}$$

откуда по условиям (2) и (3) на пространство X получаем

$$\|x - e_{2m} - x^{2n}e_{2n}\| \leq \|x - e_{2n} - x^{2n}e_{2n}\|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - a_n\| &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - e_{2n}\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - e_{2n} - x^{2n}e_{2n}\| \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - e_{2m} - x^{2n}e_{2n}\| = \|x - e_{2m}\| > \|x - a_m\|, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Если $x^{2m} < 0$, то вместо a_m надо брать b_m и дальнейшие рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество $AC(M)$ точек аппроксимативной компактности построенного в теореме множества M совпадает с $X \setminus \{0\}$ (напомним, $AC(M)$ состоит из тех точек $x \in X$, для которых всякая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \subset M$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M), т.е. аппроксимативная компактность M нарушается в одной-единственной точке 0. Конечно, эту точку можно “размножить”, взяв объединение далеко отстоящих друг от друга “экземпляров” множества M , да и дополнение $X \setminus AC(M)$ в “хороших” пространствах X не бывает массивным ни для какого замкнутого M [4], но все же возникает вопрос: можно ли построить такое множество M с указанными в теореме свойствами, чтобы дополнение $X \setminus AC(M)$ было, скажем, не локально компактным?

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Построенное в теореме множество M не является чебышевским:

$$P_M\left(\frac{e_1 + a_1}{2}\right) = P_M\left(e_1 + \frac{e_2}{2}\right) = \{e_1, a_1\}.$$

Более того, по-видимому, мощность $|P_M(x)|$ метрической проекции при различных x может быть сколь угодно большой. Поэтому дальнейшим предметом исследований может быть вопрос о существовании множества M с такими же свойствами, как в теореме, но с дополнительным условием ограниченности $|P_M(x)|$ одним и тем же числом для всех $x \in X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Интересен также вопрос о справедливости утверждения теоремы в случае пространств X , не удовлетворяющих условиям (*). Например, в пространстве c_0 , не удовлетворяющем лишь условию (3) в части строгой монотонности, конструкция из доказательства теоремы не дает множества с искомыми свойствами, и вообще существование *счетного* множества $M \subset c_0$ с указанными в условии теоремы свойствами представляется маловероятным.

В любом рефлексивном строго выпуклом банаховом пространстве, не являющемся пространством Ефимова–Стечкина (см. [4]), существует не аппроксимативно компактное выпуклое чебышевское множество.

В пространстве $C[0, 1]$ имеется пример Данхэма [5] несчетного чебышевского множества, которое не является солнцем. Это множество не аппроксимативно компактно в силу теоремы 5.1 из [6]. Другой пример – подпространство

$$Y = \left\{ f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

Это чебышевское подпространство с *линейным* оператором метрического проектирования $P_Y : f \rightarrow f - \int_0^1 f(t) dt$, которое, как нетрудно показать, не является аппроксимативно компактным.

В пространстве L_1 также можно привести пример не аппроксимативно компактного чебышевского подпространства Y с линейным оператором P_Y . Именно, в $L_1[0, 2]$ рассмотрим подпространство

$$Y = \left\{ y \in L_1[0, 2] : y(t) = \int_0^{t-1} y(\tau) d\tau \quad \forall t \in [1, 2] \right\}.$$

Для любого $y \in Y$, $y \neq 0$, имеем $\|y\|_{L[1,2]} < \|y\|_{L[0,1]}$, поэтому по теореме Морриса [7] Y является чебышевским подпространством с линейным оператором метрического проектирования. Докажем, что Y не аппроксимативно компактно. Возьмем функцию $f = 2I_{[1,2]}$ – удвоенный индикатор отрезка $[1, 2]$. Для любой функции $y \in Y$ имеем

$$\|f - y\| = \|y\|_{L[0,1]} + \|2 - y\|_{L[1,2]} \geq \|y\|_{L[0,1]} + 2 - \|y\|_{L[1,2]} \geq 2 = \|f\|,$$

так что $\rho(f, Y) = 2$. В то же время последовательность функций

$$y_n(t) = \begin{cases} n, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right], \\ n(t-1), & t \in \left(1, 1 + \frac{1}{n}\right], \\ 1, & t \in \left(1 + \frac{1}{n}, 2\right], \end{cases}$$

принадлежит подпространству Y и является минимизирующей для f :

$$\|f - y_n\| = 2 + \frac{1}{2n} \rightarrow 2 = \rho(f, Y).$$

Поскольку из $\{y_n\}$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность, Y не аппроксимативно компактно.

Авторы признательны А.Р. Алимову за указание на работу [6], а также рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н.В. Ефимов, С.Б. Стечкин, “Аппроксимативная компактность и чебышевские множества”, *Докл. АН СССР*, **140**:3 (1961), 522–524.

- [2] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, “Проблема выпуклости чебышёвских множеств”, *УМН*, **51**:6 (1996), 125–188.
- [3] Л. П. Власов, “Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *УМН*, **28**:6 (1973), 3–66.
- [4] С. В. Конягин, “Об аппроксимативных свойствах произвольных замкнутых множеств в банаховых пространствах”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 979–989.
- [5] С. В. Dunham, “Chebyshev sets in $C[0, 1]$ which are not sums”, *Canad. Math. Bull.*, **18**:1 (1975), 35–37.
- [6] D. Braess, “Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation”, *J. Approx. Theory*, **11**:3 (1974), 260–274.
- [7] P. D. Morris, “Chebyshev subspaces of L^1 with linear metric projection”, *J. Approx. Theory*, **29**:3 (1980), 231–234.

П. А. Бородин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступило

15.09.2006

Исправленный вариант

19.11.2008

И. А. Пятышев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова