Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Куракин, В. И. Юдович, Бифуркация коразмерности 1
ответвления двумерных инвариантных торов от семейства
равновесий в системах с косимметрией, *Матем. заметки*,
2003, том 73, выпуск 5, 796–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:40:41

БИФУРКАЦИЯ КОРАЗМЕРНОСТИ 1 ОТВЕТВЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ ОТ СЕМЕЙСТВА РАВНОВЕСИЙ В СИСТЕМАХ С КОСИММЕТРИЕЙ

Л. Г. Куракин, В. И. Юдович

Непрерывное однопараметрическое семейство равновесий является обычным объектом для векторных полей с нетривиальной косимметрией. Спектр устойчивости равновесия меняется вдоль такого семейства, но всегда содержит точку нуля. В условиях общего положения семейство состоит из устойчивых и неустойчивых дуг, разделяемых граничными равновесиями, которые нейтрально устойчивы по линейному приближению. Таким образом, наличие в косимметричной системе граничного равновесия со спектром, имеющим нуль и пару (k пар) чисто мнимых собственных значений есть ситуация общего положения (имеет коразмерность $k - 1$).

В данной работе исследована бифуркация ответвления инвариантных двумерных торов в системах с косимметрией от граничного равновесия, чей спектр содержит нулевое и две пары чисто мнимых собственных значений. Обнаружен ряд эффектов, новых по сравнению с классическим случаем изолированного равновесия: рассматриваемая бифуркация имеет коразмерность 1 (в случае изолированного равновесия – 2); она не сопровождается бифуркацией ответвления нормального предельного цикла; имеется возможность рождения устойчивой дуги на неустойчивой (случай i) п. 1).

Ссылки по теории косимметрии и применяемым методам центрального многообразия и Ляпунова–Шмидта см. в работах [1]–[3], где изучено рождение цикла из семейства равновесий и исследованы бифуркации, сопровождающие монотонную потерю устойчивости равновесия косимметричной системы. Поскольку речь идет о локальной бифуркации, достаточно рассмотреть уравнение на линейном (гильбертовом) пространстве, отождествляя при этом векторы и ковекторы, а косимметрии (пфаффовы формы, аннулирующие данное векторное поле) – с векторными полями.

1. Метод центрального многообразия. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H

$$\dot{\theta} = F(\theta, \lambda) \quad (1)$$

с векторным параметром $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, имеющее равновесие θ_0 при некотором $\lambda = \lambda_0$, так что $F(\theta_0, \lambda_0) = 0$. Предположим, что векторное поле F допускает косимметрию $\mathcal{L}$, зависящую от λ . Это означает, что задано отображение $\mathcal{L}: H \times \mathbb{R}^n \rightarrow H: (\theta, \lambda) \rightarrow \mathcal{L}(\theta, \lambda)$ такое, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}^n$ для всех $\theta \in H$ векторы $F(\theta, \lambda)$, $\mathcal{L}(\theta, \lambda)$ ортогональны: $(F(\theta, \lambda), \mathcal{L}(\theta, \lambda)) = 0$.

Исследование, описанное в данной публикации, стало возможным благодаря частичной поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР), грант № RM1-2084, Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-22002 и № 02-01-00337 и программы “Университеты России – фундаментальные исследования”, проект № УР.04.01.063.

Примем следующие гипотезы.

Н1. Отображение $\mathcal{L}$ непрерывно, а отображение F аналитично в некоторой окрестности точки (θ_0, λ_0) .

Н2. Равновесие θ_0 некосимметрично: $L_0 = \mathcal{L}(\theta_0, \lambda_0) \neq 0$. Из этого следует, что точка 0 принадлежит спектру $\sigma(A_0)$ производной $A_0 = F'_\theta(\theta_0, \lambda_0)$. При этом $A_0^* L_0 = 0$.

Н3. Пересечение спектра $\sigma(A_0)$ с мнимой осью состоит из простых полюсов $\{0, \pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$, $\omega_1 > \omega_2 > 0$, — общих собственных значений оператора A_0 и его сопряженного A_0^* . Отсутствуют все резонансы второго и третьего порядков: $1 : 2, 1 : 1, 1 : 3$, так что $\omega_1 \neq 2\omega_2, \omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq 3\omega_2$.

Н4. Спектр $\sigma(A_0)$ лежит в замыкании левой полуплоскости.

В рассматриваемой ситуации применима косимметрическая версия теоремы о неявной функции (см. [1]–[3]). Из нее следует, что множество равновесий уравнения (1) локально в окрестности точки (θ_0, λ_0) , представляет собой $(n + 1)$ -мерное подмногообразие в $H \times \mathbb{R}^n$.

От уравнения (1) переходим к нормализованной системе на центральном многообразии (см. [4]), в которой отбрасываем старшие слагаемые. Полученная система обладает симметрией, что позволяет перейти к ее трехмерной факторсистеме в полупространстве $\{(x, \rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^3 : \rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0\}$:

$$\dot{x} = a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2, \quad \dot{\rho}_k = \rho_k (b_{k1} \rho_1 + b_{k2} \rho_2 + b_{k3} x + \beta_k). \quad (2)$$

Здесь a_k, b_{kl} — вещественные коэффициенты, а β_k — малые вещественные параметры ($k = 1, 2, l = 1, 2, 3$). Система (2) имеет семейство равновесий Γ , задаваемое уравнениями $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0$. Предельному тору (циклу) системы (1) отвечает равновесие $(x_*, \rho_{1*}, \rho_{2*})$ системы (2) такое, что $\rho_{1*} > 0, \rho_{2*} > 0$ ($\rho_{1*} > 0, \rho_{2*} = 0$ или $\rho_{1*} = 0, \rho_{2*} > 0$). Система (1) не имеет предельных циклов, если $a_1 a_2 \neq 0$.

Предполагая выполнение условий $a_1 a_2 b_{13} b_{23} \neq 0, b_{23} b_{12} - b_{22} b_{13} \neq 0$, строим главное семейство векторных полей

$$\dot{x} = \rho_1 + \varkappa \rho_2, \quad \dot{\rho}_1 = a x \rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = \rho_2 (b \rho_1 - \rho_2 + c x + \beta), \quad (3)$$

где $\varkappa$ — дискретный параметр, принимающий два значения: $\varkappa = \pm 1$. Оно получено уменьшением числа непрерывных параметров системы (2) с помощью масштабных замен переменных, обращения времени и еще одной замены, с последующим отбрасыванием несущественных слагаемых.

Внутренние бифуркации на семействе равновесий. Спектр устойчивости равновесия $(x_0, 0, 0)$ векторного поля (3) меняется вдоль семейства Γ (параметр β мал и фиксирован) и имеет вид $\{0, \lambda_1, \lambda_2\}$, где $\lambda_1 = a x_0, \lambda_2 = c x_0 + \beta$ — собственные значения.

Введем обозначения $D_{--}, D_{-+}, D_{+-}, D_{++}$ для открытых дуг, образованных на прямой Γ равновесиями одного типа, так что $(x_0, 0, 0) \in D_{\text{sgn } \lambda_1, \text{sgn } \lambda_2}$.

Анализ системы (3) приводит к следующим выводам.

Семейство равновесий $\rho_1 = \rho_2 = 0$ системы (3) разбивается граничными точками $K_1 = (0, 0, 0)$ и $K_2 = (-\beta/c, 0, 0)$ на дуги, образованные однотипными равновесиями. Движению вдоль прямой $(x, 0, 0)$ в направлении возрастания величины x отвечают последовательности дуг и граничных точек.

- i) *Случай $a > 0, c < 0$: $D_{-+} K_2 D_{--} K_1 D_{+-}$ при $\beta < 0$ и $D_{-+} K_1 D_{++} K_2 D_{+-}$, когда $\beta > 0$.*
- ii) *Случай $a > 0, c > 0$: $D_{--} K_1 D_{+-} K_2 D_{++}$, если $\beta < 0$, и $D_{--} K_2 D_{-+} K_1 D_{++}$, когда $\beta > 0$.*

Случаи iii) $a < 0, c > 0$ и iv) $a < 0, c < 0$ сводятся к i) и ii) обращением времени $t \mapsto -t$.

Условия существования тора и анализ его спектра устойчивости. В случае $\varkappa = 1$ система (3) не имеет равновесий, не лежащих на прямой Γ . Пусть теперь $\varkappa = -1$. Равновесие системы (3)

$$x_* = 0, \quad \rho_{1*} = \rho_{2*} = \rho_*, \quad \rho_* = \frac{\beta}{1-b} \quad (4)$$

при $\rho_* > 0$ отвечает тору системы (1). Значит, $\beta = 0$ есть точка ответвления тора.

Назовем *типом* грубого равновесия четверку целых неотрицательных чисел (m_-, n_-, m_+, n_+) , где m_- и n_- (m_+ и n_+) — означают соответственно число вещественных и комплексно-сопряженных пар собственных значений в левой (правой) полуплоскости.

Равновесие (4) имеет следующий тип:

- 1) $(1, 0, 2, 0)$, если выполнены оба неравенства $B = a - c > 0$, $C = a(b - 1) > 0$;
- 2) $(2, 0, 1, 0)$, когда $B > 0$, $C < 0$;
- 3) $(0, 2, 1, 0)$ в случае $B < 0$, $C < 0$;
- 4) $(1, 2, 0, 0)$, когда $B < 0$, $C > 0$, $D = B + C < 0$;
- 5) $(1, 0, 0, 2)$, если $B < 0$, $D > 0$.

2. Метод Ляпунова–Шмидта. Внесем изменения в условия п. 1:

- а) параметр $\lambda \in \mathbb{R}$;
- б) частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы;
- в) отказываемся от гипотезы Н4.

Пусть $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$, $\{L_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ — собственные векторы операторов A_0 , A_0^* соответственно: $A_0\varphi_0 = 0$, $A_0\varphi_k = i\omega_k\varphi_k$, $A_0^*\Phi_k = -i\omega_k\Phi_k$, $(\varphi_0, L_0) = 1$, $(\varphi_k, \Phi_k) = 1$, $k = 1, 2$.

Введем обозначения: $\hat{H} = L_2(T^2, H)$ — гильбертово пространство вектор-функций на торе $T^2 = S^1 \times S^1$ со значениями в H ; $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ — угловые переменные на торе, а $\hat{H}^0$ — подпространство в $\hat{H}$, состоящее из вектор-функций вида: $u(\tau) = \beta\varphi_0 + \sum_{k=1}^2 (\alpha_k\varphi_k e^{i\tau_k} + \alpha_k^*\varphi_k^* e^{-i\tau_k})$, где $\alpha_k \in C$, $\beta \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Определим проектор $\Pi: \hat{H} \rightarrow \hat{H}^0$:

$$(\Pi f)(\tau) = 2 \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re}[(\langle f, \Phi_k \rangle e^{-i\tau_k}) e^{i\tau_k} \varphi_k] + (\langle f \rangle, L_0) \varphi_0, \quad \langle f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{T^2} f(\tau) d\tau.$$

Через $\hat{H}'$ обозначим дополнительное подпространство, а через Π' — дополнительный проектор, так что $\hat{H} = \hat{H}^0 \oplus \hat{H}'$, $\Pi' = I - \Pi$.

Введем оператор R : $Ru = \omega_1 \partial u / \partial \tau_1 + \omega_2 \partial u / \partial \tau_2 - A_0 u$ ($\tau_k = \omega_k t$, $k = 1, 2$) с областью определения $\mathcal{D}(R)$, состоящей из вектор-функций, допускающих сильные производные $\partial u / \partial \tau_i \in \hat{H}'$. Его сужение R_1 на $\hat{H}' \cap \mathcal{D}(R)$ — обратимый оператор.

Пусть $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ — матрица, задаваемая выражениями

$$a_{kk} = \operatorname{Re} g_k, \quad a_{k3} = \operatorname{Re} \eta_k, \quad a_{12} = \operatorname{Re} \xi_{12}, \quad a_{21} = \operatorname{Re} \xi_{21}, \quad a_{3k} = (F_0''(\varphi_k, \varphi_k^*), L_0), \quad a_{33} = 0,$$

$$g_k = \left\langle \left(F_0''(\psi_k, v_k) + \frac{1}{6} F_0''' \psi_k^3, \Phi_k \right) e^{-i\tau_k} \right\rangle, \quad \eta_k = (F_0''(\varphi_k, \varphi_0), \Phi_k),$$

$$\xi_{kj} = \left\langle \left(F_0''(\psi_k, v_j) + F_0''(\psi_j, v_3) + \frac{1}{2} F_0'''(\psi_k^1, \psi_j^2), \Phi_k \right) e^{-i\tau_k} \right\rangle,$$

где $k = 1, 2$, функция $\psi_k(\tau_k) = \varphi_k e^{i\tau_k} + \varphi_k^* e^{-i\tau_k}$, а $v_1, v_2, v_3 \in \hat{H}'$:

$$v_k = \frac{1}{2} R_1^{-1} \Pi' F_0'' \psi_k^2, \quad k = 1, 2, \quad v_3 = R_1^{-1} \Pi' F_0''(\psi_1, \psi_2).$$

Здесь приняты обозначения $F_0' = F_\theta'(\theta_0, \lambda_0)$, $F_0'' = F_\theta''(\theta_0, \lambda_0), \dots$.

Далее понадобятся определители $\Delta = \det \mathcal{A}$, $\Delta_1 = a_{23} \operatorname{Re} \zeta_1 - a_{13} \operatorname{Re} \zeta_2$, $\Delta_2 = \det \mathcal{A}_2$. Матрица $\mathcal{A}_2$ получается заменой 3-й колонки матрицы $\mathcal{A}$ на колонку $(-\operatorname{Re} \zeta_1, -\operatorname{Re} \zeta_2, 0)$;

$$\zeta_k = (F_0''(\varphi_k, v_0) + F_0' \varphi_k, \Phi_k), \quad v_0 = R_1^{-1} F_0 \lambda, \quad k = 1, 2.$$

Применение метода Ляпунова–Шмидта приводит к следующей теореме, в которой пункты 2) и 3) сформулированы с точностью до утверждения о сходимости формальных степенных рядов.

ТЕОРЕМА. Пусть для уравнения (1) с правой частью F , аналитической в окрестности точки (θ_0, λ_0) , где (θ_0, λ_0) – равновесие: $F(\theta_0, \lambda_0) = 0$, и с косимметрией $\mathcal{L}$ выполнены гипотезы Н1–Н3 п. 1 и предположения а), б) п. 2.

1) Если выполняется неравенство $a_{31}a_{32} \neq 0$ ($a_{31}a_{32} > 0$), то при малых δ в окрестности θ_0 нет малых предельных циклов (торов).

2) Пусть выполнены неравенства $a_{31}a_{32} < 0$ и $\Delta_1 \neq 0$. Тогда λ_0 есть точка ответвления тора. При этом имеются лишь две возможности: либо существует единственный нормальный (вектор частот (ν_1, ν_2) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ стремится к (ω_1, ω_2)) тор, и эта бифуркация односторонняя, либо при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство квазипериодических двухчастотных решений $\{\theta_\alpha\}$, представимое формальным разложением по параметру α (θ_α не является равновесием при $\alpha \neq 0$). Если при этом $\delta = \lambda - \lambda_0$ достаточно мало, но отлично от нуля, то уравнение (1) не имеет малых квазипериодических двухчастотных решений, не являющихся равновесными.

3) Пусть справедливы неравенства $a_{31}a_{32} < 0$, $\Delta \neq 0$, $\Delta_1 \neq 0$. Тогда для малого тора, стягивающегося при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ к равновесию θ_0 , справедливо формальное асимптотическое разложение

$$\theta(t) = \theta_0 + \sqrt{\gamma_1 \delta} \psi_1(\omega_1 t) + \sqrt{\gamma_2 \delta} \psi_2(\omega_2 t) + \delta(\gamma \varphi_0 + v_0 + \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} v_3) + \dots, \quad (5)$$

где опущены члены порядка $\delta^{3/2}$ и выше, а амплитудные коэффициенты γ, γ_k задаются равенствами: $\gamma = \Delta_2/\Delta$, $\gamma_1 = a_{31}\Delta_1/\Delta$, $\gamma_2 = -a_{32}\Delta_1/\Delta$. Это решение вещественно либо при малых $\delta > 0$, если $\gamma_1 > 0$, либо при $\delta < 0$, когда $\gamma_1 < 0$.

Частоты ν_k , $k = 1, 2$, этого тора зависят от δ и имеют вид

$$\nu_k = \omega_k + \text{Im}(\zeta_k + \gamma \eta_k + \gamma_k g_k + \mu_k) \delta + \dots, \quad \mu_1 = \gamma_2 \xi_{12}, \quad \mu_2 = \gamma_1 \xi_{21}. \quad (6)$$

Хорошо известно, что при исследовании квазипериодических режимов и их возмущений возникают трудные проблемы, связанные с малыми знаменателями [4]–[6]. В различных формах эта трудность возникала и, в известной мере, преодолена и в проблеме сохранения квазипериодических режимов при возмущении гамильтоновых систем (КАМ теория), и при изучении бифуркаций вынужденных и автоколебательных периодических режимов, связанных с колебательной неустойчивостью и возникновением новой частоты [7], [8] и при исследовании инвариантных кривых отображения (к этой задаче сводится предыдущая, когда рассматривается оператор монодромии или отображение Пуанкаре), и при исследовании ответвления инвариантного тора от равновесия, имеющего в составе своего спектра две пары чисто мнимых собственных значений (эта бифуркация коразмерности 2 была исследована в работах [9], [10]).

Имеющиеся в этой области результаты подразделяются на две категории. К первой отнесем утверждения о существовании двумерных инвариантных торов без указания на характер динамики сужения системы на такого рода тор, а ко второй – результаты о существовании инвариантных торов, на которых движения квазипериодические.

Во всех упомянутых исследованиях существенную роль играют резонансные соотношения вида $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 = 0$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Каждый раз, чтобы прийти к определенному результату, приходится предполагать, что либо все эти резонансные соотношения не выполняются, так что отношение ω_1/ω_2 иррационально (так и п. 2 данной статьи), либо, по крайней мере, не выполнены резонансные соотношения с малыми m_1, m_2 (см. п. 1).

Если бы отношение ω_1/ω_2 было рациональным, то удалось бы построить лишь конечное число членов рядов (5) и (6). Мы не занимаемся здесь доказательством их сходимости. Его можно провести, накладывая на соотношения ω_1/ω_2 обычные арифметические ограничения плохой аппроксимируемости рациональными дробями [6], [11], [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куракин Л. Г., Юдович В. И. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 2. С. 317–320.
2. Kurakin L. G., Yudovich V. I. // Chaos. 2000. V. 10. № 2. P. 311–331.
3. Куракин Л. Г., Юдович В. И. // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 1. С. 29–33.
4. Арнольд В. И. и др. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: ВИНТИ 1986. С. 5–220.
5. Guckenheimer J. // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. № 1. P. 1–49.
6. Iooss G. Bifurcation of maps and applications. North-Holland Mathematics Studies № 36. Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland, 1979.
7. Sacker R. J. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations // New York Univ. IMM-NYU. 1964. № 333.
8. Ruelle O., Takens F. // Comm. Maths. Phis. 1971. V. 20. P. 167–192.
9. Жолондек Х. // УМН. 1986. Т. 41. № 5(251). С. 175–176.
10. Jost R. and Zender E. // Helvetica Physica Acta. 1972. V. 45. P. 258–276.
11. Колмогоров А. Н. // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.
12. Herman M. Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. Geometry and topology. Lecture Notes in Mathematics. V. 597. New York: Springer-Verlag, 1977.

Ростовский государственный университет
E-mail: kurakin@math.rsu.ru
yudovich@math.rsu.ru

Поступило
18.04.2001