Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Киу-Минг Луо, Формулы умножения для полиномов типа Апостола и кратные знакопеременные суммы, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 54–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:16:02

Формулы умножения для полиномов типа Апостола и кратные знакопеременные суммы

Киу-Минг Луо

Изучаются формулы умножения для полиномов типа Апостола и вводятся λ -кратные знакопеременные суммы, которые оцениваются с помощью полиномов типа Апостола. Выводятся рекуррентные формулы и рассматриваются некоторые интересные частные случаи, включающие классические формулы Раабе и более ранние результаты Карлица и Говарда.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Классические полиномы Бернулли $B_n(x)$, Эйлера $E_n(x)$ и Геноччи $G_n(x)$ вместе с их близкими обобщениями $B_n^{(\alpha)}(x)$, $E_n^{(\alpha)}(x)$ и $G_n^{(\alpha)}(x)$ (действительного или комплексного) порядка α обычно определяются следующими производящими функциями (более подробно, см. [1]–[3]):

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi, \quad 1^\alpha := 1, \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{2}{e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi, \quad 1^\alpha := 1, \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{2t}{e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi, \quad 1^\alpha := 1, \quad (1.3)$$

так что, как следует из (1.1)–(1.3), классические полиномы Бернулли $B_n(x)$, Эйлера $E_n(x)$ и Геноччи $G_n(x)$ легко записываются в соответствующем виде:

$$B_n(x) := B_n^{(1)}(x), \quad E_n(x) := E_n^{(1)}(x), \quad G_n(x) := G_n^{(1)}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.4)$$

Аналогично, классические числа Бернулли B_n , Эйлера E_n и Геноччи G_n легко получаются из (1.4) как

$$B_n := B_n(0) = B_n^{(1)}(0), \quad E_n := E_n(0) = E_n^{(1)}(0), \quad G_n := G_n(0) = G_n^{(1)}(0). \quad (1.5)$$

Некоторые интересные аналоги классических полиномов и чисел Бернулли впервые изучались Апостолом [4; с. 165, уравнение (3.1)]. Здесь мы сначала вспомним следующие определения Апостола.

Работа выполнена при поддержке Фонда Чангкингского нормального университета (грант 10XLR017) и Natural Science Foundation Project of Chongqing (грант CSTC2011JJA00024).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (Апостол [4]). *Полиномы Апостола–Бернулли* $\mathcal{B}_n(x; \lambda)$ определяются производящей функцией

$$\frac{ze^{xz}}{\lambda e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(x; \lambda) \frac{z^n}{n!}, \quad (1.6)$$

$$|z| < 2\pi \quad \text{при} \quad \lambda = 1, \quad |z| < |\log \lambda| \quad \text{при} \quad \lambda \neq 1,$$

где, очевидно,

$$B_n(x) = \mathcal{B}_n(x; 1), \quad \mathcal{B}_n(\lambda) := \mathcal{B}_n(0; \lambda), \quad (1.7)$$

и где $\mathcal{B}_n(\lambda)$ – так называемые числа Апостола–Бернулли.

Луо и Сривастава недавно расширили понятие так называемых *полиномов типа Апостола*, включающее полиномы Апостола–Бернулли, Апостола–Эйлера и Апостола–Геноччи и их формы более высокого порядка (см. [5]–[11]), следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 (ср. Луо и Сривастава [7]). *Полиномы Апостола–Бернулли* $\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$ *порядка* α определяются производящей функцией

$$\left(\frac{z}{\lambda e^z - 1} \right)^\alpha \cdot e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{z^n}{n!}, \quad (1.8)$$

$$|z| < 2\pi \quad \text{при} \quad \lambda = 1, \quad |z| < |\log \lambda| \quad \text{при} \quad \lambda \neq 1,$$

где, очевидно,

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(x) &= \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x; 1), & \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(\lambda) &:= \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(0; \lambda), \\ \mathcal{B}_n(x; \lambda) &:= \mathcal{B}_n^{(1)}(x; \lambda), & \mathcal{B}_n(\lambda) &:= \mathcal{B}_n^{(1)}(\lambda), \end{aligned} \quad (1.9)$$

и где $\mathcal{B}_n(\lambda)$, $\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(\lambda)$ и $\mathcal{B}_n(x; \lambda)$ – так называемые числа Апостола–Бернулли, числа Апостола–Бернулли порядка α и полиномы Апостола–Бернулли, соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 (ср. Луо [8]). *Полиномы Апостола–Эйлера* $\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$ *порядка* α определяются производящей функцией

$$\left(\frac{2}{\lambda e^z + 1} \right)^\alpha \cdot e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < |\log(-\lambda)|, \quad (1.10)$$

где, очевидно,

$$\begin{aligned} E_n^{(\alpha)}(x) &= \mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x; 1), & \mathcal{E}_n^{(\alpha)}(\lambda) &:= \mathcal{E}_n^{(\alpha)}(0; \lambda), \\ \mathcal{E}_n(x; \lambda) &:= \mathcal{E}_n^{(1)}(x; \lambda), & \mathcal{E}_n(\lambda) &:= \mathcal{E}_n^{(1)}(\lambda), \end{aligned} \quad (1.11)$$

и где $\mathcal{E}_n(\lambda)$, $\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(\lambda)$ и $\mathcal{E}_n(x; \lambda)$ – так называемые числа Апостола–Эйлера, числа Апостола–Эйлера порядка α и полиномы Апостола–Эйлера, соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 (ср. Луо [10]). *Полиномы Апостола–Геноччи* $\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$ *порядка* α определяются производящей функцией

$$\left(\frac{2z}{\lambda e^z + 1} \right)^\alpha \cdot e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < |\log(-\lambda)|, \quad (1.12)$$

где, очевидно,

$$\begin{aligned} G_n^{(\alpha)}(x) &= \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x; 1), & \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(\lambda) &:= \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(0; \lambda), \\ \mathcal{G}_n(x; \lambda) &:= \mathcal{G}_n^{(1)}(x; \lambda), & \mathcal{G}_n(\lambda) &:= \mathcal{G}_n^{(1)}(\lambda), \end{aligned} \quad (1.13)$$

и где $\mathcal{G}_n(\lambda)$, $\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(\lambda)$ и $\mathcal{G}_n(x; \lambda)$ – так называемые числа Апостола–Геноччи, числа Апостола–Геноччи порядка α и полиномы Апостола–Геноччи, соответственно.

ЛЕММА 1.5 (полиномиальное тождество, см. [12; с. 28, теорема В]). *Если $x_1, \dots, x_m$ – коммутирующие элементы кольца ($x_i x_j = x_j x_i$, $1 \leq i < j \leq m$), то для всех целых $n \geq 0$ выполняется соотношение*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_m = n}} \binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_m} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}, \quad (1.14)$$

где последнее суммирование проводится по всем положительным или нулевым целым числам $a_i \geq 0$ таким, что $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$, и числа

$$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_m} := \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_m!}$$

называются полиномиальными коэффициентами, определенными в работе [12; с. 28, определение В].

ЛЕММА 1.6 (обобщенное полиномиальное тождество, см. [12; с. 41, уравнение (12m)]). *Если $x_1, x_2, \dots, x_m$ – коммутирующие элементы кольца ($x_i x_j = x_j x_i$, $1 \leq i < j \leq m$), то для любого действительного или комплексного переменного α выполняется соотношение*

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_m)^\alpha = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_m} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_m^{v_m}, \quad (1.15)$$

где последнее суммирование проводится по всем положительным или нулевым целым числам $v_i \geq 0$ и числа

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_m} &:= \frac{\{\alpha\}_{v_1 + v_2 + \dots + v_m}}{v_1! v_2! \dots v_m!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - v_1 - v_2 - \dots - v_m + 1)}{v_1! v_2! \dots v_m!} \end{aligned}$$

называются обобщенными полиномиальными коэффициентами, определенными в работе [12; с. 27, уравнение (10c'')]. Здесь $\{a\}_k = a(a - 1)(a - 2) \dots (a - k + 1)$, $a \in \mathbb{C}$.

Луо и Сривастава [7], [8] изучали элементарные свойства полиномов типа Апостола и получили явные формулы, выраженные через гауссову гипергеометрическую функцию и (обобщенную) дзета-функцию Гурвица. Мы также рассмотрели некоторые соотношения между полиномами типа Апостола.

Совсем недавно Луо и Сривастава [10] рассмотрели полиномы Апостола–Геноччи высших порядков и их элементарных свойств. Были получены некоторые явные

соотношения между полиномами Апостола–Бернулли и Апостола–Эйлера и различные явные представления в виде рядов от гауссовой гипергеометрической функции и (обобщенной) дзета-функции Гурвица. Луо [11], [5] получил разложения Фурье и интегральные представления для полиномов типа Апостола, а также вывел их частные случаи и приложения, которые, как здесь показано, приводят к соответствующим результатам для полиномов Бернулли, Геноччи и Эйлера [6].

Основная цель данной работы состоит в изучении формул умножения для полиномов Апостола–Геноччи и Апостола–Эйлера высших порядков. Вводится так называемая λ -кратная знакопеременная сумма и приводятся явные формулы в виде рядов от полиномов типа Апостола. Также выводятся рекуррентные соотношения для чисел типа Апостола и рассматриваются некоторые интересные случаи, включающие ранние результаты Карлица и Говарда.

2. Формулы умножения для полиномов Апостола–Геноччи высших порядков. В данном разделе доказаны формулы умножения для полиномов Апостола–Геноччи высших порядков, определена λ -кратная знакопеременная сумма и даны их явные формулы с помощью полиномов типа Апостола. Также получены некоторые рекуррентные формулы для чисел Апостола–Геноччи высших порядков.

ТЕОРЕМА 2.1. *При $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ имеет место следующая формула умножения для полиномов Апостола–Геноччи высших порядков:*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(mx; \lambda) &= m^{n-\alpha} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \\ &\quad \times (-\lambda)^r \mathcal{G}_n^{(\alpha)}\left(x + \frac{r}{m}; \lambda^m\right), \quad m - \text{нечетное}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(mx; \lambda) &= (-2)^\alpha m^{n-\alpha} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \\ &\quad \times (-\lambda)^r \mathcal{B}_n^{(\alpha)}\left(x + \frac{r}{m}; \lambda^m\right), \quad m - \text{четное}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $r = v_1 + 2v_2 + \dots + (m-1)v_{m-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$\frac{1}{\lambda e^t + 1} = -\frac{1 - \lambda e^t + \lambda^2 e^{2t} - \dots + (-\lambda)^{m-1} e^{(m-1)t}}{(-\lambda)^m e^{mt} - 1}. \quad (2.3)$$

Если m нечетное, то в силу (1.12), (1.15) и (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(mx; \lambda) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1} \right)^\alpha e^{mxt} = \left(\frac{2t}{\lambda^m e^{mt} + 1} \right)^\alpha \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-\lambda e^t)^k \right)^\alpha e^{mxt} \\ &= \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} (-\lambda)^r \left(\frac{2t}{\lambda^m e^{mt} + 1} \right)^\alpha e^{(x+r/m)mt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(m^{n-\alpha} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} (-\lambda)^r \mathcal{G}_n^{(\alpha)}\left(x + \frac{r}{m}; \lambda^m\right) \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сравнивая коэффициенты при $t^n/n!$ в обеих частях (2.4), получим утверждение (2.1) теоремы 2.1.

Для четных m утверждение (2.2) теоремы 2.1 доказывается аналогично. Теорема доказана.

Полагая $\lambda = 1$ в (2.1) и (2.2), соответственно, получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. При $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ имеют место следующие формулы умножения для полиномов Геноччи высших порядков:

$$G_n^{(\alpha)}(mx) = m^{n-\alpha} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \times (-1)^r G_n^{(\alpha)}\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad m - \text{нечетное}, \quad (2.5)$$

$$G_n^{(\alpha)}(mx) = (-2)^\alpha m^{n-\alpha} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \times (-1)^r B_n^{(\ell)}\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad m - \text{четное}, \quad (2.6)$$

где $r = v_1 + 2v_2 + \dots + (m-1)v_{m-1}$.

Полагая $\alpha = 1$ в (2.1) и (2.2), соответственно, получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. При $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ имеют место следующие формулы умножения для полиномов Апостола–Геноччи:

$$\mathcal{G}_n(mx; \lambda) = \begin{cases} m^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (-\lambda)^j \mathcal{G}_n\left(x + \frac{j}{m}; \lambda^m\right), & m - \text{нечетное}, \\ -2m^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (-\lambda)^j \mathcal{B}_n\left(x + \frac{j}{m}; \lambda^m\right), & m - \text{четное}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Полагая $\lambda = 1$, $\alpha = \ell$ в (2.1) и (2.2), соответственно, получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. При $m \in \mathbb{N}$, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$ имеют место следующие формулы умножения для полиномов Геноччи высших порядков:

$$G_n^{(\ell)}(mx) = m^n \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \times (-1)^r G_n^{(\ell)}\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad m - \text{нечетное}, \quad (2.8)$$

$$G_n^{(\ell)}(mx) = (-2)^\ell m^{n-\ell} \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \times (-1)^r B_n^{(\ell)}\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad m - \text{четное}, \quad (2.9)$$

где $r = v_1 + 2v_2 + \dots + (m-1)v_{m-1}$.

Очевидно, полагая $\ell = 1$, $\lambda = 1$ в (2.1) и (2.2), соответственно, получим следующую хорошо известную формулу.

СЛЕДСТВИЕ 2.5 (теорема умножения Раабе). *При $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ имеет место следующая формула:*

$$G_n(mx) = \begin{cases} m^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j G_n\left(x + \frac{j}{m}\right), & m - \text{нечетное}, \\ -2m^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j B_n\left(x + \frac{j}{m}\right), & m - \text{четное}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Теперь определим кратную знакопеременную сумму:

$$Z_k^{(\ell)}(m; \lambda) = (-1)^\ell \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_m \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_m = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_m} \times (-\lambda)^{v_1 + 2v_2 + \dots + mv_m} (v_1 + 2v_2 + \dots + mv_m)^k, \quad (2.11)$$

$$Z_k^{(\ell)}(m) = \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_m \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_m = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_m} \times (-1)^{v_1 + 2v_2 + \dots + mv_m + \ell} (v_1 + 2v_2 + \dots + mv_m)^k, \quad (2.12)$$

$$Z_k(m; \lambda) = \lambda 1^k - \lambda^2 2^k + \dots + (-1)^{m+1} \lambda^m m^k = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \lambda^j j^k, \quad (2.13)$$

$$Z_k(m) = 1^k - 2^k + \dots + (-1)^{m+1} m^k = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} j^k, \quad m, k, \ell \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.14)$$

которая называется λ -кратной знакопеременной суммой, кратной знакопеременной суммой, λ -знакопеременной суммой и знакопеременной суммой, соответственно.

Далее, оценим эти суммы. Применяя (1.12), (1.14) и (2.11), получим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(\ell)}(m; \lambda) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^\ell \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_m \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_m = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_m} \times \right. \\ &\quad \left. \times (-\lambda)^{v_1 + 2v_2 + \dots + mv_m} (v_1 + 2v_2 + \dots + mv_m)^n \right] \frac{t^n}{n!} \\ &= (-1)^\ell \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_m \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_m = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_m} (-\lambda e^t)^{v_1 + 2v_2 + \dots + mv_m} \\ &= (\lambda e^t - \lambda^2 e^{2t} + \dots + (-1)^{m+1} \lambda^m e^{mt})^\ell = \left(\frac{(-1)^{m+1} \lambda^{m+1} e^{(m+1)t}}{\lambda e^t + 1} + \frac{\lambda e^t}{\lambda e^t + 1} \right)^\ell \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \left(\frac{(-1)^{m+1} \lambda^{m+1} e^{(m+1)t}}{\lambda e^t + 1} \right)^j \left(\frac{\lambda e^t}{\lambda e^t + 1} \right)^{\ell-j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2t)^{-\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{j(m+1)} \lambda^{mj+\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(j)}(mj+\ell; \lambda) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(\ell-j)}(\lambda) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{-\ell}}{(n+1)_{\ell}} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{j(m+1)} \lambda^{mj+\ell} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{k=0}^{n+\ell} \binom{n+\ell}{k} \mathcal{G}_k^{(j)}(mj+\ell; \lambda) \mathcal{G}_{n+\ell-k}^{(\ell-j)}(\lambda) \right) \frac{t^n}{n!}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $t^n/n!$ в обеих частях (2.15), получим следующую явную формулу для $Z_n^{(\ell)}(m; \lambda)$.

ТЕОРЕМА 2.6. При $m, n, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место следующая формула для λ -кратной знакопеременной суммы:

$$Z_n^{(\ell)}(m; \lambda) = \frac{2^{-\ell}}{(n+1)_{\ell}} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{j(m+1)} \lambda^{mj+\ell} \sum_{k=0}^{n+\ell} \binom{n+\ell}{k} \mathcal{G}_k^{(j)}(mj+\ell; \lambda) \mathcal{G}_{n+\ell-k}^{(\ell-j)}(\lambda), \tag{2.16}$$

которая выражается через полиномы Апостола–Геноччи высших порядков. Здесь $(n)_0 = 1$, $(n)_k = n(n+1) \cdots (n+k-1)$.

Полагая $\lambda = 1$ в (2.16), получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. При $m, n, \ell \in \mathbb{N}_0$ имеет место следующая формула для кратной знакопеременной суммы:

$$Z_n^{(\ell)}(m) = \frac{2^{-\ell}}{(n+1)_{\ell}} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{j(m+1)} \sum_{k=0}^{n+\ell} \binom{n+\ell}{k} G_k^{(j)}(mj+\ell) G_{n+\ell-k}^{(\ell-j)}, \tag{2.17}$$

которая выражается через полиномы Геноччи высших порядков.

Из (1.12) легко выводятся соотношения

$$\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x; \lambda) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{G}_k^{(\alpha)}(\lambda) x^{n-k}, \tag{2.18}$$

$$\lambda \mathcal{G}_n(x+1; \lambda) + \mathcal{G}_n(x; \lambda) = 2nx^{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{2.19}$$

Полагая $\ell = 1$ в (2.16) и замечая, что

$$\mathcal{G}_n^{(0)}(\lambda) = \delta_{n,0} \quad \text{и} \quad \lambda \mathcal{G}_{n+1}(1; \lambda) = -\mathcal{G}_{n+1}(\lambda),$$

где $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера, получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. При $m, n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место следующая формула для λ -знакопеременной суммы:

$$Z_n(m; \lambda) = \frac{(-\lambda)^{m+1} \mathcal{G}_{n+1}(m+1; \lambda) - \mathcal{G}_{n+1}(\lambda)}{2(n+1)}, \tag{2.20}$$

которая выражается через полиномы Апостола–Геноччи.

Полагая $\ell = 1$, $\lambda = 1$, приходим к следующей хорошо известной формуле:

$$Z_n(m) = -\frac{(-1)^m G_{n+1}(m+1) + G_{n+1}}{2(n+1)}. \quad (2.21)$$

Очевидно, легко можно найти производящую функцию для $Z_n^{(\ell)}(m; \lambda)$ из (2.15) следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(\ell)}(m; \lambda) \frac{t^n}{n!} = (\lambda e^t - \lambda^2 e^{2t} + \dots + (-1)^{m+1} \lambda^m e^{mt})^\ell = \left[\frac{(-\lambda)^{m+1} e^{(m+1)t} + \lambda e^t}{\lambda e^t + 1} \right]^\ell. \quad (2.22)$$

Далее приведем некоторые интересные рекуррентные формулы для чисел Апостола–Геноччи высших порядков.

Если m нечетное, то, полагая $\alpha = \ell \in \mathbb{N}_0$, $x = 0$ в (2.1) и $r = v_1 + 2v_2 + \dots + (m-1)v_{m-1}$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^{(\ell)}(\lambda) &= m^{n-\ell} \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} (-\lambda)^r \mathcal{G}_n^{(\ell)}\left(\frac{r}{m}; \lambda^m\right) \\ &\stackrel{(2.18)}{=} m^{n-\ell} \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} (-\lambda)^r \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{G}_k^{(\ell)}(\lambda^m) \left(\frac{r}{m}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{k-\ell} \mathcal{G}_k^{(\ell)}(\lambda^m) \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} (-\lambda)^r r^{n-k} \\ &= (-1)^\ell \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{k-\ell} \mathcal{G}_k^{(\ell)}(\lambda^m) Z_{n-k}^{(\ell)}(m-1; \lambda) + m^{n-\ell} \mathcal{G}_n^{(\ell)}(\lambda^m). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Таким образом, мы получили утверждение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.9. Если m нечетное, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то имеют место следующие рекуррентные формулы для чисел Апостола–Геноччи высших порядков:

$$m^n \mathcal{G}_n^{(\ell)}(\lambda^m) - m^\ell \mathcal{G}_n^{(\ell)}(\lambda) = (-1)^{\ell-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k \mathcal{G}_k^{(\ell)}(\lambda^m) Z_{n-k}^{(\ell)}(m-1; \lambda), \quad (2.24)$$

которые выражаются через λ -кратную знакопеременную сумму, определенную в (2.11).

Полагая $\lambda = 1$ в (2.24), получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Если m нечетное, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, то имеют место следующие рекуррентные формулы для чисел Геноччи высших порядков:

$$(m^n - m^\ell) G_n^{(\ell)} = (-1)^{\ell-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k G_k^{(\ell)} Z_{n-k}^{(\ell)}(m-1), \quad (2.25)$$

которые выражаются через кратную знакопеременную сумму, определенную в (2.12).

Очевидно, результат Говарда [13; с. 166, теорема 6]

$$(m^n - m)G_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k G_k Z_{n-k}(m-1), \quad m - \text{нечетное}, \quad (2.26)$$

– это частный случай формулы (2.24) при $\lambda = 1$, $\ell = 1$. Очевидно, формула (2.25) является обобщением результата Говарда (2.26).

Если m четное, то, полагая $x = 0$ в (2.2), получим

$$\mathcal{G}_n^{(\ell)}(\lambda) = (-2)^\ell m^{n-\ell} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} (-\lambda)^r \mathcal{B}_n^{(\ell)}\left(\frac{r}{m}; \lambda^m\right)$$

(так как $B_n^{(\alpha)}(x; \lambda) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_k^{(\alpha)}(\lambda) x^{n-k}$, см. [8; с. 301, уравнение (55)])

$$\begin{aligned} &= (-2)^\ell m^{n-\ell} \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} (-\lambda)^r \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_k^{(\ell)}(\lambda^m) \left(\frac{r}{m}\right)^{n-k} \\ &= (-2)^\ell \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{k-\ell} \mathcal{B}_k^{(\ell)}(\lambda^m) \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} (-\lambda)^r r^{n-k} \\ &= 2^\ell \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{k-\ell} \mathcal{B}_k^{(\ell)}(\lambda^m) Z_{n-k}^{(\ell)}(m-1; \lambda) + (-2)^\ell m^{n-\ell} \mathcal{B}_n^{(\ell)}(\lambda^m) \end{aligned} \quad (2.27)$$

и, следовательно, получим утверждение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.11. *Если m четное, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то имеет место следующая формула:*

$$m^\ell \mathcal{G}_n^{(\ell)}(\lambda) - (-2)^\ell m^n \mathcal{B}_n^{(\ell)}(\lambda^m) = 2^\ell \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k \mathcal{B}_k^{(\ell)}(\lambda^m) Z_{n-k}^{(\ell)}(m-1; \lambda), \quad (2.28)$$

которая выражается через λ -кратную знакпеременную сумму.

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *Если m четное, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, то имеет место следующая формула:*

$$m^\ell G_n^{(\ell)} - (-2)^\ell m^n B_n^{(\ell)} = 2^\ell \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k B_k^{(\ell)} Z_{n-k}^{(\ell)}(m-1), \quad (2.29)$$

которая выражается через кратную знакпеременную сумму.

Полагая $\lambda = 1$, $\ell = 1$ в (2.28) и замечая, что $Z_0(m-1) = 1$, если m четное, сразу получим формулу

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} m^k B_k Z_{n-k}(m-1) = \frac{m}{2} G_n, \quad m - \text{четное}. \quad (2.30)$$

Применяя соотношение $G_n = 2(1 - 2^n)B_n$ к (2.30), приходим к рекуррентной формуле для чисел Бернулли, полученной Говардом [13; с. 167, уравнение (33)]:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} m^k B_k Z_{n-k}(m-1) = m(1 - 2^n)B_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad m - \text{четное}. \quad (2.31)$$

3. Формулы умножения для полиномов Апостола–Эйлера высших порядков. Ниже получим аналогичные результаты для полиномов Апостола–Эйлера высших порядков.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $m \in \mathbb{N}$, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$, то имеют место следующие формулы умножения для полиномов Апостола–Эйлера высших порядков:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^{(\alpha)}(mx; \lambda) = m^n \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \\ \times (-\lambda)^r \mathcal{E}_n^{(\alpha)}\left(x + \frac{r}{m}; \lambda^m\right), \quad m - \text{нечетное}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^{(\ell)}(mx; \lambda) = \frac{(-2)^\ell m^n}{(n+1)^\ell} \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \\ \times (-\lambda)^r \mathcal{B}_{n+\ell}^{(\ell)}\left(x + \frac{r}{m}; \lambda^m\right), \quad m - \text{четное}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $r = v_1 + 2v_2 + \dots + (m-1)v_{m-1}$, $(n)_0 = 1$, $(n)_k = n(n+1) \cdots (n+k-1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, то имеют место следующие формулы умножения для полиномов Эйлера высших порядков:

$$\begin{aligned} E_n^{(\alpha)}(mx) = m^n \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \\ \times (-1)^r E_n^{(\alpha)}\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad m - \text{нечетное}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} E_n^{(\ell)}(mx) = \frac{(-2)^\ell m^n}{(n+1)^\ell} \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \\ \times (-1)^r B_{n+\ell}^{(\ell)}\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad m - \text{четное}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $r = v_1 + 2v_2 + \dots + (m-1)v_{m-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Если $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то имеют место следующие формулы умножения для полиномов Апостола–Эйлера:

$$\mathcal{E}_n(mx; \lambda) = \begin{cases} m^n \sum_{j=0}^{m-1} (-\lambda)^j \mathcal{E}_n\left(x + \frac{j}{m}; \lambda^m\right), & m - \text{нечетное}, \\ -\frac{2}{n+1} m^n \sum_{j=0}^{m-1} (-\lambda)^j \mathcal{B}_{n+1}\left(x + \frac{j}{m}; \lambda^m\right), & m - \text{четное}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Очевидно, случай Карлица [14; с. 60, уравнение (1.7)'] является частным случаем формулы (3.1) при $\lambda = 1$, $\alpha = \ell$, т.е. имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Если $m \in \mathbb{N}$, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, то имеют место следующие формулы умножения для полиномов Эйлера высших порядков:

$$E_n^{(\ell)}(mx) = m^n \sum_{\substack{0 \leq v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \leq \ell \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = \ell}} \binom{\ell}{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} \times (-1)^r E_n^{(\ell)}\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad m - \text{нечетное}, \quad (3.6)$$

где $r = v_1 + 2v_2 + \dots + (m-1)v_{m-1}$.

Очевидно, хорошо известную формулу умножения Раабе можно получить из (3.1) и (3.2) при $\ell = 1$, $\lambda = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5 (теорема умножения Раабе). Если $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, то имеют место следующие формулы умножения для полиномов Эйлера:

$$E_n(mx) = \begin{cases} m^n \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j E_n\left(x + \frac{j}{m}\right), & m - \text{нечетное}, \\ -\frac{2}{n+1} m^n \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j B_{n+1}\left(x + \frac{j}{m}\right), & m - \text{четное}. \end{cases} \quad (3.7)$$

ТЕОРЕМА 3.6. Если $m, n, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то имеет место следующая формула для λ -кратной знакопеременной суммы:

$$Z_n^{(\ell)}(m; \lambda) = 2^{-\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{j(m+1)} \lambda^{mj+\ell} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{E}_k^{(j)}(mj + \ell; \lambda) \mathcal{E}_{n-k}^{(\ell-j)}(\lambda), \quad (3.8)$$

которая выражается через полиномы Апостола–Эйлера высших порядков.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Если $m, n, \ell \in \mathbb{N}_0$, то имеет место следующая формула для кратной знакопеременной суммы:

$$Z_n^{(\ell)}(m) = 2^{-\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{j(m+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k^{(j)}(mj + \ell) E_{n-k}^{(\ell-j)}, \quad (3.9)$$

которая выражается через полиномы Эйлера высших порядков.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Если $m, n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то имеет место следующая формула для λ -знакопеременной суммы

$$Z_n(m; \lambda) = \frac{(-\lambda)^{m+1} \mathcal{E}_n(m+1; \lambda) - \mathcal{E}_n(\lambda)}{2}, \quad (3.10)$$

которая выражается через полиномы Апостола–Эйлера.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Если $m, n \in \mathbb{N}_0$, то имеет место следующая формула для знакопеременной суммы:

$$Z_n(m) = -\frac{(-1)^m E_n(m+1) + E_n}{2}, \quad (3.11)$$

которая выражается через полиномы Эйлера.

ТЕОРЕМА 3.10. Если m нечетное, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то имеют место следующие рекуррентные формулы для чисел Апостола–Эйлера высших порядков:

$$m^n \mathcal{E}_n^{(\ell)}(\lambda^m) - \mathcal{E}_n^{(\ell)}(\lambda) = (-1)^{\ell-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k \mathcal{E}_k^{(\ell)}(\lambda^m) Z_{n-k}^{(\ell)}(m-1; \lambda), \quad (3.12)$$

которые выражаются через λ -кратную знакопеременную сумму, определенную в (2.11).

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Если m нечетное, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, то имеют место следующие рекуррентные формулы для чисел Эйлера высших порядков:

$$(m^n - 1)E_n^{(\ell)} = (-1)^{\ell-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k E_k^{(\ell)} Z_{n-k}^{(\ell)}(m-1), \quad (3.13)$$

которые выражаются через кратную знакопеременную сумму, определенную в (2.12).

СЛЕДСТВИЕ 3.12. Если m нечетное, $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то имеет место следующая рекуррентная формула для чисел Апостола–Эйлера:

$$m \mathcal{E}_n(\lambda) - m^n \mathcal{E}_n(\lambda^m) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k \mathcal{E}_k(\lambda^m) Z_{n-k}(m-1; \lambda), \quad (3.14)$$

которая выражается через λ -знакопеременную сумму, определенную в (2.13).

Полагая $\lambda = 1$, $\ell = 1$ в (3.12), получим формулу

$$(m^n - 1)E_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k E_k Z_{n-k}(m-1), \quad m - \text{нечетное}, \quad (3.15)$$

которая аналогична результату, полученному Говардом (см. Говард [13; с. 166, теорема 6]).

ТЕОРЕМА 3.13. Если m четное, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то имеет место следующая формула:

$$\mathcal{E}_n^{(\ell)}(\lambda) - \frac{(-2)^\ell}{(n+1)_\ell} m^n \mathcal{B}_{n+\ell}^{(\ell)}(\lambda^m) = \frac{2^\ell}{(n+1)_\ell} \sum_{k=0}^{n+\ell} \binom{n+\ell}{k} m^{k-\ell} \mathcal{B}_k^{(\ell)}(\lambda^m) Z_{n+\ell-k}^{(\ell)}(m-1; \lambda), \quad (3.16)$$

которая выражается через λ -кратную знакопеременную сумму.

СЛЕДСТВИЕ 3.14. Если m четное, $n, \ell \in \mathbb{N}_0$, то имеет место следующая формула:

$$E_n^{(\ell)} - \frac{(-2)^\ell}{(n+1)_\ell} m^n B_{n+\ell}^{(\ell)} = \frac{2^\ell}{(n+1)_\ell} \sum_{k=0}^{n+\ell} \binom{n+\ell}{k} m^{k-\ell} B_k^{(\ell)} Z_{n+\ell-k}^{(\ell)}(m-1), \quad (3.17)$$

которая выражается через кратную знакопеременную сумму.

Полагая $\lambda = 1$, $\ell = 1$ в (3.16), и замечая, что $Z_0(m-1) = 1$, если m четное, получим

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} m^k B_k Z_{n+1-k}(m-1) = \frac{m(n+1)}{2} E_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m - \text{четное.} \quad (3.18)$$

Применяя соотношение [15; с. 805, уравнение (23.1.20)] [1; с. 29]

$$E_n = \frac{2}{n+1} (1 - 2^{n+1}) B_{n+1} \quad (3.19)$$

к (3.18), снова получим формулу Говарда (2.31).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Grundlehren Math. Wiss., **52**, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [2] N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Grundlehren Math. Wiss., **13**, Springer-Verlag, Berlin, 1924.
- [3] J. Sándor, B. Crstici, *Handbook of Number Theory. II*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [4] T. M. Apostol, “On the Lerch zeta function”, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 161–167.
- [5] Q.-M. Luo, “Fourier expansions and integral representations for the Apostol–Bernoulli and Apostol–Euler polynomials”, *Math. Comp.*, **78** (2009), 2193–2208.
- [6] Q.-M. Luo, “Fourier expansions and integral representations for the Genocchi polynomials”, *J. Integer Seq.*, **12**:1 (2009), Article 09.1.4.
- [7] Q.-M. Luo, H. M. Srivastava, “Some generalizations of the Apostol–Bernoulli and Apostol–Euler polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.*, **308**:1 (2005), 290–302.
- [8] Q.-M. Luo, “Apostol–Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions”, *Taiwanese J. Math.*, **10**:4 (2006), 917–925.
- [9] Q.-M. Luo, H. M. Srivastava, “Some relationships between the Apostol–Bernoulli and Apostol–Euler polynomials”, *Comput. Math. Appl.*, **51**:3-4 (2006), 631–642.
- [10] Q.-M. Luo, H. M. Srivastava, “Some generalizations of the Apostol–Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind”, *Appl. Math. Comput.*, **217**:12 (2011), 5702–5728.
- [11] Q.-M. Luo, “Extensions of the Genocchi polynomials and its Fourier expansions and integral representations”, *Osaka J. Math.*, **48**:2 (2011).
- [12] L. Comtet, *Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions*, Reidel Publ., Dordrecht, 1974.
- [13] F. T. Howard, “Applications of a recurrence for Bernoulli numbers”, *J. Number Theory*, **52**:1 (1995), 157–172.
- [14] L. Carlitz, “The multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials”, *Math. Mag.*, **27**:2 (1953), 59–64.
- [15] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Nat. Bureau Standards Appl. Math. Ser., **55**, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.

Киу-Минг Луо

Department of Mathematics,

Chongqing Normal University, KHP

E-mail: luomath@126.com, luomath2007@163.com

Поступило

16.09.2008

Исправленный вариант

06.04.2011