Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Я. Будылин, Разложение матриц над двумерным локальным полем, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 936–939

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:35:04

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Разложение матриц над двумерным локальным полем

Р. Я. Будылин

1. G -расслоения и двойные классы смежности. В работе Бравермана и Каждана [1] доказан следующий результат (лемма 3.8):

$$G(F_q((x))((t))) = G(F_q((x))[[t]])G(F_q[[x]]((t))).$$

Здесь G – произвольная связная линейная редуктивная группа, F_q – конечное поле, для произвольного поля k через $k((x))$ и $k[[x]]$ обозначаются соответственно поля степенных рядов Лорана и Тейлора с коэффициентами в поле k . Данная работа посвящена доказательству элементарными методами этой леммы для $G = \mathrm{GL}(n)$.

Заметим, что для нередуктивных групп G это утверждение не всегда верно. Например, если G – одномерная аддитивная группа, то неверно, что

$$F_q((x))((t)) = F_q((x))[[t]] + F_q[[x]]((t)).$$

Тем самым, неверно это и для унитарных групп. Покажем, какие имеются препятствия для справедливости этой леммы для нередуктивных групп. Пусть

$$K = F_q((u))((t)), \quad O = F_q((u))[[t]], \quad A = F_q[[u]]((t)).$$

Обозначим через Δ схему $\mathrm{Spec}(k[[u, t]])$, через U – схему $\mathrm{Spec}(k[[u]]((t)))$ и через V – схему $\mathrm{Spec}(k((u))[[t]])$. Рассмотрим следующую тройку объектов: тривиальные G -расслоения на U и V и изоморфизм G -расслоений над $\mathrm{Spec}(K)$, задаваемый умножением на $g \in G(K)$. В первоначальном варианте доказательства леммы (см. препринт [2; лемма 3.8]) использовалось, что по такой тройке однозначно строится расслоение на $\Delta \setminus 0$. Для векторных расслоений подобный факт известен – это лемма Бовилля–Лазло [3]. Так как мы можем менять тривиализации на U и V , то множество таких расслоений с точностью до изоморфизма описывается двойным фактором $G(O) \setminus G(K)/G(A)$. Таким образом, если доказать, что все такие расслоения тривиальны, то лемма доказана. Для доказательства тривиальности в [2] предлагается продолжить G -расслоения с $\Delta \setminus 0$ на Δ и воспользоваться тем, что на Δ все G -расслоения тривиальны. Векторные расслоения (т.е. со структурной группой G_m) всегда можно продолжить однозначным образом: взять прямой образ пучка на Δ , он будет рефлексивным, следовательно, локально свободным (см. [4; леммы 1.1.10 и 1.1.12]). Однако, ниже следующее рассуждение, принадлежащее А. Н. Паршину, доказывает, что для аффинных расслоений это неверно.

Множество аффинных одномерных расслоений равно $H^1(B, O_B)$, где B – база, O_B – ее структурный пучок. Пусть $\Delta = \mathrm{Spec} k[[u, t]]$, O_Δ – его структурный пучок, $S = k[[u, t]]$ –

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-000950).

кольцо функций и $\Delta_0 = \Delta \setminus \{0\}$. Тогда имеем точную последовательность когомологий пучков относительно вложения $\Delta_0 \rightarrow \Delta$:

$$\begin{aligned} H^0(\Delta, O_\Delta) &\rightarrow H^0(\Delta_0, O_\Delta|_{\Delta_0}) \rightarrow H_0^1(\Delta, O_\Delta) \rightarrow H^1(\Delta, O_\Delta) \\ &\rightarrow H^1(\Delta_0, O_\Delta|_{\Delta_0}) \rightarrow H_0^2(\Delta, O_\Delta) \rightarrow H^2(\Delta, O_\Delta). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $H_0^i(\Delta, O_\Delta)$ – когомологии с носителями в 0 (см. [5; упражнение 2.3, гл. 3]). Так как $H^i(\Delta, O_\Delta) = 0$ для $i > 0$, то из (1) получаем, что группа аффинных расслоений на Δ_0 есть $H_0^2(\Delta, O_\Delta)$. Если S_0 – локальное кольцо в точке 0, то естественное отображение $S \rightarrow S_0$ является плоским морфизмом колец. Так как S_0 регулярно, а значит, горенштейново, то $H_0^2(\Delta, O_\Delta) \otimes_S S_0 = E_{S_0}(k) \supset k$, где $E_{S_0}(k)$ – инъективная оболочка k относительно кольца S_0 (см. [6]). Значит, $H_0^2(\Delta, O_\Delta)$ отлично от нуля. Поэтому на Δ_0 имеются расслоения, непродолжаемые на все Δ .

Д. В. Осипов любезно сообщил мне рассуждение, основанное на идее из [2], доказывающее лемму для группы Gl . Пусть $\Delta_u = \Delta \setminus \{u = 0\}$, аналогично определяются Δ_t и Δ_{ut} . Через $\widehat{\Delta}_{ut}$ и $\widehat{\Delta}_u$ обозначим пополнения соответствующих схем по t -адической топологии. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\Delta}_{ut} & \longrightarrow & \Delta_{ut} & \longrightarrow & \Delta_t \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\Delta}_u & \longrightarrow & \Delta_u & \longrightarrow & \Delta \setminus \{0\} \end{array}$$

Применим к схеме Δ_u и элементу t лемму Бовилля–Лазло (см. [3]). В силу этой леммы по тривиальным расслоениям над Δ_{ut} и над $\widehat{\Delta}_u$ и изоморфизму их прообразов над $\widehat{\Delta}_{ut}$ можно построить n -мерное векторное расслоение над Δ_u . Так как $\widehat{\Delta}_{ut} = \mathrm{Spec}(K)$, то изоморфизм тривиальных расслоений над $\widehat{\Delta}_{ut}$ задается матрицей $f \in \mathrm{Gl}(n, K)$. Построенное расслоение над Δ_u склеивается с векторным расслоением, тривиальным над Δ_t , и получается векторное расслоение J_f над $\Delta \setminus \{0\}$. Таким образом, расслоение J_f задано некой склейкой тривиальных расслоений над $\Delta_t = \mathrm{Spec}(A)$ и $\widehat{\Delta}_u = \mathrm{Spec}(O)$. Следовательно, все расслоения вида J_f находятся в биективном соответствии с $\mathrm{Gl}(n, O) \setminus \mathrm{Gl}(n, K) / \mathrm{Gl}(n, A)$. Но каждое расслоение J_f тривиально, так как его можно продолжить на Δ . Поэтому и множество двойных классов тривиально.

В опубликованной работе [1] дается другое доказательство этой леммы, основанное на собственности инд-схемы Gr_G . В итоге, все доказательства леммы привлекают какие-либо тяжелые теоремы.

2. Элементарное доказательство разложения для группы GL . Итак, данная работа состоит в доказательстве элементарными средствами существования следующего разложения:

$$\mathrm{Gl}(n, k((t))((u))) = \mathrm{Gl}(n, k((t))[[u]]) \mathrm{Gl}(n, k[[t]]((u))),$$

где k – конечное поле. Докажем результат в большей общности – кольцо $k[[t]]$ заменим на произвольное евклидово кольцо R . Построенный нами алгоритм дает даже более сильное разложение:

$$\mathrm{Gl}(n, \mathrm{Frac}(R)((u))) = \mathrm{Gl}(n, \mathrm{Frac}(R)[[u]]) \mathrm{Gl}(n, R[u, u^{-1}]). \quad (2)$$

Здесь $\mathrm{Frac}(R)$ – поле частных кольца R . Тот же алгоритм дает разложение и для группы Sl . В дальнейшем пусть $F = \mathrm{Frac}(R)((u))$. Пусть $f \in L((u))$, где L – поле. Через $f(0)$ обозначим коэффициент при u^0 в f . Через $\mathrm{ord}(f)$ обозначим нормирование f по u , т.е. наименьшую степень u , входящую в разложение f . Заметим, что обратимость элемента $f \in L[[u]]$ равносильна равенству $\mathrm{ord}(f) = 0$. Поэтому матрица $(a_{nm}) \in \mathrm{Mat}(n, L[[u]])$, где $a_{nm} \in L[[u]]$, принадлежит $\mathrm{GL}(n, L[[u]])$ тогда и только тогда, когда $\det((a_{nm})(0)) \neq 0$.

Для матрицы $M = (m_{ij}) \in \text{Mat}(n, L[[u]])$ положим $M(0) = ((m_{ij})(0))$. Очевидно, что $(AM)(0) = AM(0)$, если $A \in \text{Mat}(n, L)$.

Для следующей леммы нам понадобится ряд определений технического характера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если имеется i -я, $1 \leq i \leq n$, строка матрицы $A \in \text{Mat}(n, m)$, то i -й ступенью матрицы A называется подмножество этой строки $\{a_{i1}, \dots, a_{ik}\}$, где k минимальное, т.ч. $a_{ij} = 0$ для $i \geq j$. Будем говорить, что длина i -й ступени – это число k .

Пусть дана i -я строка и длина ее ступени больше длин ступеней всех предшествующих строк. Тогда старшим элементом i -й строки называется такой элемент a_{ij} , с наименьшим возможным j , что $a_{ij} \neq 0$ и j больше длин ступеней предшествующих строк.

Старшая позиция в i -й строке = $1 +$ максимальная длина ступеней с номером, меньшим i .

Матрица называется нижней ступенчатой, если длина 1-й ступени не больше 1 и длина $(i + 1)$ -й ступени превосходит длину i не более чем на 1 для всех i .

ЛЕММА 1. Пусть $A \in \text{Mat}(n, \text{Frac}(R))$, где R – евклидово кольцо. Тогда существует $Q \in \text{Gl}(n, R)$ с определителем ± 1 такая, что AQ нижняя ступенчатая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. У матрицы $A = \{x_{ij}/y_{ij}\}$, $x_{ij}, y_{ij} \in R$, мы можем вынести знаменатели y_{ij} с помощью умножения слева на диагональную (а, значит, и верхнетреугольную) матрицу из $\text{Gl}(n, \text{Frac}(R))$. Поэтому мы можем считать, что $A \in \text{Mat}(n, R)$. Умножение на матрицу справа – это действие над столбцами. Матрица приводится к требуемому виду с помощью модифицированного алгоритма Гаусса. Пусть j – номер старшего элемента 1-й строки, k – номер следующего ненулевого элемента. Применим алгоритм Евклида к парам элементов a_{1j} и $a_{1,k}$, вычитая содержащие их столбцы, умноженные на соответствующие коэффициенты. То есть вычтем j -й столбец, умноженный на неполное частное от деления $a_{1,k}$ на a_{1j} , из k -го, в полученной матрице (b_{ij}) вычтем k -й, умноженный на неполное частное от деления b_{1j} на b_{1k} из j -го, и т.д. В итоге в полученной матрице (c_{ij}) на местах $1j$ и $1k$ будут стоять 0 и НОД(a_{1j}, a_{1k}). Затем повторяем те же действия, что и с исходной матрицей, с матрицей (c_{ij}) , и т.д. пока в матрице не останется лишь 1 ненулевой элемент в 1-й строке с номером, большим старшей позиции, затем мы переставим его на старшую позицию. Так же действуем с остальными строками от 2-й до n . Ясно, что после всех действий вид матрицы будет нижним ступенчатым.

Этот факт является непосредственным обобщением разложения Ивасава для дискретно нормированных колец. А его доказательство – небольшое видоизменение доказательства приведения целочисленной матрицы к диагональному виду (см., например, [7; предложение 9.1.1]), только с заменой модуля целого числа на евклидову норму элемента.

Вернемся к доказываемому утверждению, пусть матрица $M \in \text{Gl}(n, \text{Frac}(R)((u)))$. Нужно получить ее разложение вида (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Чтобы получить разложение достаточно доказать, что, умножив данную матрицу справа на матрицу из $\text{Gl}(n, R[u, u^{-1}])$, можно получить матрицу из $\text{Gl}(n, \text{Frac}(R)[[u]])$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно считать, что матрица $M \in \text{Mat}(n, \text{Frac}(R)[[u]])$ и $\det(M) \neq 0$. Этого легко добиться, умножив справа нашу матрицу на матрицу S вида

$$\begin{pmatrix} u^{l_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^{l_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u^{l_n} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ЛЕММА 2. Матрицу $A \in \text{Mat}(n, \text{Frac}(R)[[u]])$ с $\det(A) \neq 0$ можно привести к матрице из $\text{Gl}(n, \text{Frac}(R)[[u]])$, умножая справа на матрицы из $\text{Gl}(n, R)$ с определителем ± 1 и на матрицы вида (3), у которых $l_1 \leq 0, \dots, l_n \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 существует $Q \in \mathrm{Gl}(n, R)$ такая, что $A(0)Q$ нижняя ступенчатая. Умножим A на Q справа. Получим матрицу A_1 , причем $A_1(0) = A(0)Q$ будет ниже-ступенчатой. Следовательно, если $A_1(0)$ будет вырожденной, у ней будет нулевой столбец. Значит, в A_1 будет столбец, делящийся на u в $\mathrm{Frac}(R)[[u]]$. Вынесем из этого столбца степень u , на которую он делится с помощью матрицы вида (3). Получится матрица A_2 . Затем будем повторять эти действия: приводим матрицу вычетов к ниже-ступенчатому виду, получаем A_3 , если $A_3(0)$ вырождена, выносим степень u из какого-то столбца A_3 и т.д. Так как при каждом вынесении степени u уменьшается $\mathrm{ord}(\det(A_i)) \geq 0$, то на каком-то шаге $A_N(0)$ будет невырожденной, а значит, A_N принадлежит $\mathrm{Gl}(n, \mathrm{Frac}(R)[[u]])$.

Из леммы 2 и замечаний 1, 2 следует искомое разложение.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если исходная матрица $M \in \mathrm{Sl}(n, \mathrm{Frac}(R)((u)))$, то после преобразований замечания 2 и леммы 2 определитель получившейся матрицы M_1 будет $\pm u^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как $M_1 \in \mathrm{Gl}(n, \mathrm{Frac}(R)[[u]])$, то $\det(M_1) = \pm 1$, умножив 1-ю строку на -1 при необходимости, получим матрицу из $\mathrm{Sl}(n, \mathrm{Frac}(R)[[u]])$. Таким образом, получено разложение для группы Sl .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. У F есть подкольцо $\mathrm{Frac}(R) \otimes_R R[[u]]$. Его элементы – это ряды, коэффициенты которых можно привести к единому знаменателю. Непосредственно из вышеизложенного алгоритма разложения видно, что справедливо

$$\mathrm{Gl}(n, \mathrm{Frac}(R) \otimes_R R((u))) = \mathrm{Gl}(n, \mathrm{Frac}(R) \otimes_R R[[u]]) \mathrm{Gl}(n, R((u))).$$

Автор благодарен А. Н. Паршину за постановку задачи и ряд замечаний, а также благодарен Д. В. Осипову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Braverman, D. Kazhdan, *Nagoya Math. J.*, **184** (2006), 57–84. [2] A. Braverman, D. Kazhdan, *Some Examples of Hecke Algebras over 2-Dimensional Local Fields*, [arXiv:math.RT/0510538](#). [3] A. Beauville, Y. Laszlo, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **320**:3 (1995), 335–340. [4] К. Оконёк, М. Шнейдер, Х. Шпиндлер, *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах*, Математика. Новое в зарубежной науке, **36**, Мир, М., 1984. [5] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981. [6] R. Hartshorne, *Local Cohomology*, A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, 1961, Lecture Notes in Math., **41**, Springer-Verlag, Berlin, 1967. [7] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, Университетский учебник, Факториал Пресс, М., 2002.

Р. Я. Будылин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: budylin@yandex.ru

Поступило

25.09.2008

Исправленный вариант

01.12.2008