Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Поплавский, Теорема о полноте для сингулярных дифференциальных пучков, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 558–576

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:58:35

Теорема о полноте для сингулярных дифференциальных пучков

Д. В. Поплавский

В статье приводится теорема о полноте специальных вектор-функций, иницированных произведениями так называемых решений Вейля дифференциального уравнения четвертого порядка и их производными на полуоси. Доказывается, что такие нелинейные комбинации решений Вейля и их производных образуют линейное подпространство убывающих на бесконечности решений линейной сингулярной дифференциальной системы типа Камке. Строится и исследуется функция Грина соответствующей сингулярной краевой задачи на полуоси для пучков операторов, определяющих дифференциальную систему типа Камке. С использованием аналитических и асимптотических свойств функции Грина, методов спектральной теории операторов и теории аналитических функций доказывается искомая теорема о полноте.

Библиография: 9 названий.

Вопросы, связанные с исследованием полноты произведений собственных функций или специальных решений дифференциальных уравнений, достаточно часто возникают в различных задачах спектральной теории (см., например, [1]–[4]). Кроме этого, возрастает непосредственный интерес к данной тематике в связи с ее приложениями к решению вполне интегрируемых нелинейных уравнений математической физики. В частности, аналогичные теоремы о полноте нашли свое применение при решении уравнения Кортевега–де Фриза (см. [5]), в котором основная спектральная задача строится для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, а также при решении нелинейного уравнения Буссинеска (см. [6]), где соответствующая спектральная задача связана с обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка.

В настоящей статье приводится теорема о полноте вектор-функций $\Psi_k(x, \lambda)$, иницированных произведениями $\Phi_j^{(\nu)}(x, \lambda) \Phi_m^{(\nu)}(x, \lambda)$ при $\nu = 0, 1$ так называемых решений Вейля с заданным поведением на бесконечности следующего дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$ly := y^{(4)} + (p_2(x)y')' + p_0(x)y = \lambda y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

где $p_0(x)$, $p_2(x)$ – достаточно гладкие комплекснозначные функции и при этом $p_0(x)$, $p_2^{(\nu)}(x)$, $\nu = 0, 1$, суммируемые на полуоси. Ниже доказывается, что нелинейные комбинации $\Psi_k(x, \lambda)$ образуют линейное подпространство убывающих на бесконечности

решений линейной сингулярной дифференциальной системы типа Камке. Далее, строится и исследуется функция Грина соответствующей сингулярной краевой задачи на полуоси для пучков операторов, определяющих дифференциальную систему типа Камке. С использованием аналитических и асимптотических свойств функции Грина, методов спектральной теории операторов и теории аналитических функций доказывается искомая теорема о полноте. Представленная теорема о полноте имеет нетривиальное значение при исследовании вопроса разрешимости начально-краевой задачи для системы Богоявленского на полуоси (см. [7]). Независимо от этого приложения теорема о полноте также представляет и самостоятельный интерес.

Предварительно введем необходимые понятия и факты. Свяжем с уравнением (1) (пока формально) следующие векторные уравнения типа Камке:

$$L_\lambda Y(x) := Y^{(7)}(x) + \sum_{j=0}^5 P_j(x) Y^{(j)}(x) - \lambda \left(\Omega Y^{(3)}(x) + \sum_{j=0}^1 R_j(x) Y^{(j)}(x) \right) = 0, \quad (2)$$

$$L_\lambda^+ Z(x) := -Z^{(7)}(x) - \sum_{j=0}^5 Z^{(j)}(x) P_j^+(x) + \lambda \left(Z^{(3)}(x) \Omega + \sum_{j=0}^1 Z^{(j)}(x) R_j^+(x) \right) = 0, \quad (3)$$

а также

$$Y(x) = (Y_1(x), Y_2(x))^T, \quad Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x)), \quad \Omega = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ -80 & -24 \end{pmatrix},$$

$$P_5^+(x) = \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ 46 & 5p_2 \\ \frac{46}{3}p_2 & 5p_2 \end{pmatrix}, \quad P_4^+(x) = \begin{pmatrix} 14p_2' & 3p_2' \\ 0 & p_2' \end{pmatrix},$$

$$P_3^+(x) = \begin{pmatrix} 6p_2' + 36p_0 & 10p_0 \\ \frac{40}{3}p_2'^2 + 24p_2'' - 80p_0 & 4p_2'^2 + 8p_2'' - 24p_0 \end{pmatrix},$$

$$P_2^+(x) = \begin{pmatrix} 4p_2^{(3)} + 24p_0' + 10p_2p_2' & 5p_0' + 3p_2p_2' \\ 6p_2^{(3)} - 24p_0' + \frac{20}{3}p_2p_2' & 2p_2^{(3)} - 6p_0' + 2p_2p_2' \end{pmatrix},$$

$$P_1^+(x) = \begin{pmatrix} p_2^{(4)} + 10(p_2')^2 + 10p_0'' + \frac{40}{3}p_0p_2 & 3(p_2')^2 + p_0'' + 4p_0p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_0^+(x) = \begin{pmatrix} 2p_0^{(3)} + 20p_0p_2' & 6p_0p_2' \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1^+(x) = \begin{pmatrix} \frac{40}{3}p_2 & 4p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_0^+(x) = \begin{pmatrix} 20p_2' & 6p_2' \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = P_5^+, \quad P_4 = -P_4^+ + 5P_5^{+'}, \quad P_3 = P_3^+ - 4P_4^{+'} + 10P_5^{+(2)},$$

$$P_2 = -P_2^+ + 3P_3^{+'} - 6P_4^{+(2)} + 10P_5^{+(3)},$$

$$P_1 = P_1^+ - 2P_2^{+'} + 3P_3^{+(2)} - 4P_4^{+(3)} + 5P_5^{+(4)},$$

$$P_0 = -P_0^+ + P_1^{+'} - P_2^{+(2)} + P_3^{+(3)} - P_4^{+(4)} + P_5^{+(5)},$$

$$R_1 = R_1^+, \quad R_0 = -R_0^+ + R_1^{+'}.$$

Далее считаем, что элементы матриц

$$P_k(x), \quad k = 2, \dots, 5, \quad (1+x^2)P_0(x), \quad (1+x)P_1(x),$$

$$(1+x^2)R_0(x), \quad (1+x)R_1(x)$$

непрерывные и суммируемые на полуоси.

Интегрированием по частям убеждаемся, что для достаточно гладких вектор-функций $Y(x)$ и $Z(x)$ имеет место соотношение

$$\int_0^\infty Z(x) L_\lambda Y(x) dx = \langle Z(x), Y(x) \rangle|_{x=0}^\infty + \int_0^\infty L_\lambda^+ Z(x) Y(x) dx, \quad (4)$$

где

$$\langle Z, Y \rangle = \sum_{j=1}^7 (-1)^{j+1} Z^{(j-1)} Y^{(7-j)} + \sum_{k=1}^5 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} (Z P_k)^{(j-1)} Y^{(k-j)}$$

$$- \lambda \left(\sum_{j=1}^3 (-1)^{j+1} Z^{(j-1)} \Omega Y^{(3-j)} - Z R_1 Y \right).$$

ЛЕММА 1. Пусть $y(x)$ и $z(x)$ суть решения уравнения (1) (для удобства записи зависимость от λ не указываем) такие, что при каждом фиксированном $x \geq 0$ функция $(\xi - x)y'(\xi)z'(\xi) \in L(x, \infty)$. Тогда вектор-функция

$$(U(x), V(x)) := \left(y(x)z(x), \int_x^\infty (\xi - x)y'(\xi)z'(\xi) d\xi \right)$$

удовлетворяет уравнению (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условие леммы выполнено. Зададим функции $\alpha_k(x)$, $k = 1, \dots, 15$, равенствами

$$\alpha_1 = yz, \quad \alpha_2 = y'z, \quad \alpha_3 = yz', \quad \alpha_4 = y'z', \quad \alpha_5 = y^{(2)}z, \quad \alpha_6 = yz^{(2)}, \quad \alpha_7 = y^{(2)}z',$$

$$\alpha_8 = y'z^{(2)}, \quad \alpha_9 = y^{(2)}z^{(2)}, \quad \alpha_{10} = yz^{(3)}, \quad \alpha_{11} = y^{(3)}z, \quad \alpha_{12} = y^{(3)}z',$$

$$\alpha_{13} = y'z^{(3)}, \quad \alpha_{14} = y^{(3)}z^{(2)}, \quad \alpha_{15} = y^{(2)}z^{(3)}, \quad \alpha_{16} = y^{(3)}z^{(3)}.$$

При этом очевидно, что

$$\alpha'_1 = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha'_2 = \alpha_4 + \alpha_5, \quad \alpha'_3 = \alpha_4 + \alpha_6, \quad \alpha'_4 = \alpha_7 + \alpha_8, \quad \alpha'_5 = \alpha_7 + \alpha_{11},$$

$$\alpha'_6 = \alpha_8 + \alpha_{10}, \quad \alpha'_7 = \alpha_9 + \alpha_{12}, \quad \alpha'_8 = \alpha_9 + \alpha_{13}, \quad \alpha'_9 = \alpha_{14} + \alpha_{15},$$

$$\alpha'_{10} = \alpha_{13} + (\lambda - p_0)\alpha_1 - p'_2\alpha_3 - p_2\alpha_6, \quad \alpha'_{11} = \alpha_{12} + (\lambda - p_0)\alpha_1 - p'_2\alpha_2 - p_2\alpha_5,$$

$$\alpha'_{12} = \alpha_{14} + (\lambda - p_0)\alpha_3 - p'_2\alpha_4 - p_2\alpha_7, \quad \alpha'_{13} = \alpha_{15} + (\lambda - p_0)\alpha_2 - p'_2\alpha_4 - p_2\alpha_8,$$

$$\alpha'_{14} = \alpha_{16} + (\lambda - p_0)\alpha_6 - p'_2\alpha_8 - p_2\alpha_9, \quad \alpha'_{15} = \alpha_{16} + (\lambda - p_0)\alpha_5 - p'_2\alpha_7 - p_2\alpha_9,$$

$$\alpha'_{16} = (\lambda - p_0)(\alpha_{10} + \alpha_{11}) - p'_2(\alpha_{12} + \alpha_{13}) - p_2(\alpha_{14} + \alpha_{15}).$$

Далее, вводя обозначение $\tilde{V}(x) = y'(x)z'(x)$ и последовательно дифференцируя, находим

$$\begin{cases} U = \alpha_1, & U' = \alpha_2 + \alpha_3, & U^{(2)} - 2\tilde{V} = \alpha_5 + \alpha_6, \\ \tilde{V} = \alpha_4, & \tilde{V}' = \alpha_7 + \alpha_8, & \tilde{V}^{(2)} = 2\alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} U^{(3)} - 3\tilde{V}' = \alpha_{10} + \alpha_{11}, \\ \tilde{V}^{(3)} - (\lambda - p_0)U' + p_2\tilde{V}' + 2p_2'\tilde{V} = 3(\alpha_{14} + \alpha_{15}), \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} U^{(4)} - 3\tilde{V}^{(2)} - 2(\lambda - p_0)U + p_2'U' + p_2(U^{(2)} - 2\tilde{V}) = \alpha_{12} + \alpha_{13}, \\ \tilde{V}^{(4)} - (\lambda - p_0)U^{(2)} + p_0'U' + (p_2\tilde{V}')' + 2(p_2'\tilde{V})' \\ - 3(\lambda - p_0)(U^{(2)} - 2\tilde{V}) + 3p_2'\tilde{V}' = -6p_2\alpha_9 + 6\alpha_{16}. \end{cases} \quad (7)$$

Дифференцируя (7), попутно подставляя $\alpha_{14} + \alpha_{15}$, α_9 , $\alpha_{12} + \alpha_{13}$ из (6), (5), (7) соответственно, приходим к следующим уравнениям на функции $U(x)$ и $\tilde{V}(x)$:

$$\begin{cases} U^{(5)} - \frac{10}{3}\tilde{V}^{(3)} + p_2U^{(3)} + 2p_2'U^{(2)} - \frac{4}{3}p_2\tilde{V}' \\ + \left(-\frac{8}{3}(\lambda - p_0) + p_2^{(2)}\right)U' - \frac{2}{3}p_2'\tilde{V} + 2p_0'U = 0, \\ \tilde{V}^{(5)} + 3p_2'U^{(4)} + 5p_2\tilde{V}^{(3)} - 10(\lambda - p_0)U^{(3)} + p_2'\tilde{V}^{(2)} + (5p_0' + 3p_2p_2')U^{(2)} \\ + (4p_2^2 + 8p_2^{(2)} + 24(\lambda - p_0))\tilde{V}' + (3(p_2')^2 + p_0^{(2)} - 4p_2(\lambda - p_0))U' \\ + (2p_2^{(3)} - 6p_0' + 2p_2p_2')\tilde{V} - 6p_2'(\lambda - p_0)U = 0. \end{cases}$$

Продифференцировав дважды первое уравнение и используя очевидное соотношение $\tilde{V}(x) = V^{(2)}(x)$, находим

$$\begin{cases} U^{(7)} - \frac{10}{3}V^{(7)} + p_2U^{(5)} - \frac{4}{3}p_2V^{(5)} + 4p_2'U^{(4)} - \frac{10}{3}p_2'V^{(4)} \\ + \left(6p_2^{(2)} - \frac{8}{3}(\lambda - p_0)\right)U^{(3)} - \frac{8}{3}p_2^{(2)}V^{(3)} + \left(4p_2^{(3)} + \frac{22}{3}p_0'\right)U^{(2)} \\ - \frac{2}{3}p_2^{(3)}V^{(2)} + \left(\frac{20}{3}p_0^{(2)} + p_2^{(4)}\right)U' + 2p_0^{(3)}U = 0, \\ V^{(7)} + 5p_2V^{(5)} + 3p_2'U^{(4)} + p_2'V^{(4)} - 10(\lambda - p_0)U^{(3)} \\ + (4p_2^2 + 8p_2^{(2)} + 24(\lambda - p_0))V^{(3)} + (5p_0' + 3p_2p_2')U^{(2)} + (2p_2^{(3)} - 6p_0' + 2p_2p_2')V^{(2)} \\ + (3(p_2')^2 + p_0^{(2)} - 4p_2(\lambda - p_0))U' - 6p_2'(\lambda - p_0)U = 0. \end{cases}$$

Прибавляя к первому уравнению второе, умноженное предварительно на $10/3$, получаем требуемое. Лемма 1 доказана.

Пусть $\Phi_k(x, \lambda)$, $k = 1, \dots, 4$, суть решения Вейля уравнения (1), т.е.

$$\Phi_k^{(j-1)}(0, \lambda) = \delta_{jk}, \quad j = 1, \dots, k, \quad \Phi_k(x, \lambda) = O(e^{\rho r_k x}), \quad x \rightarrow \infty,$$

где $\lambda = \rho^4$, δ_{jk} – символ Кронекера, r_k , $k = 1, \dots, 4$, – корни уравнения $r^4 = 1$, занумерованные в каждом секторе S раствора $\pi/4$ (т.е. $\arg \rho \in (\nu\pi/4, (\nu+1)\pi/4)$, $\nu = 0, \dots, 7$) так, что

$$\operatorname{Re}(\rho r_1) < \operatorname{Re}(\rho r_2) < \operatorname{Re}(\rho r_3) < \operatorname{Re}(\rho r_4). \quad (8)$$

Асимптотические представления решений Вейля и их производных при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in S$, имеют вид (см. [8; гл. 3, § 1])

$$\Phi_k^{(j-1)}(x, \lambda) = \rho^{1-k} \sum_{m=1}^k (\rho r_m)^{j-1} e^{\rho r_m x} \left(a_{km} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{21} &= \frac{-1}{r_2 - r_1}, & a_{22} &= \frac{1}{r_2 - r_1}, \\ a_{31} &= \frac{r_3 - r_2}{\Delta_0}, & a_{32} &= \frac{r_1 - r_3}{\Delta_0}, & a_{33} &= \frac{r_2 - r_1}{\Delta_0}, \\ \Delta_0 &= \det[r_k^{j-1}]_{j=1, \dots, 3, k=1, \dots, 3}. \end{aligned}$$

Определим вектор-функции $\Psi_k(x, \lambda) = (\Psi_{k1}(x, \lambda), \Psi_{k2}(x, \lambda))$, $k = 1, \dots, 4$, следующим образом:

$$\Psi_k(x, \lambda) = \left(\Phi_j(x, \lambda) \Phi_p(x, \lambda), \int_x^\infty (\xi - x) \Phi_j'(\xi, \lambda) \Phi_p'(\xi, \lambda) d\xi \right),$$

где $k = p$ при $j = 1$, $p = 1, \dots, 3$ и $k = 4$ при $j = p = 2$. С учетом последнего из леммы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Вектор-функции $\Psi_k(x, \lambda)$, $k = 1, \dots, 4$, удовлетворяют уравнению (3).

Ниже приведена теорема о полноте системы вектор-функций $\{\Psi_k(x, \lambda)\}_{k=1, \dots, 4}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, где $f_1(x), f_2(x) \in L(0, \infty)$. Если имеют место равенства

$$\int_0^\infty \Psi_k(x, \lambda) f(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, 4, \quad |\lambda| > \lambda^*, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \quad (10)$$

то $f(x) = 0$ п.в. на $[0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 основано на исследовании соответствующих сингулярных краевых задач для неоднородных уравнений (2), (3) и проводится в несколько этапов. Оставшаяся часть статьи посвящена этому доказательству.

1. При фиксированных t и λ определим матрицу-функцию $g(x, t, \lambda)$ при $x \geq t$ как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} L_\lambda g(x, t, \lambda) &= 0, \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} g(x, t, \lambda)|_{x=t} &= 0, \quad j = 0, \dots, 5, \quad \frac{\partial^6}{\partial x^6} g(x, t, \lambda)|_{x=t} = E_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь и далее через E_m будем обозначать единичную матрицу размерности m . Также определим матрицу-функцию $g^+(x, t, \lambda)$ при $x \leq t$ как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} L_\lambda^+ g^+(x, t, \lambda) &= 0, \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} g^+(x, t, \lambda)|_{x=t} &= 0, \quad j = 0, \dots, 5, \quad \frac{\partial^6}{\partial x^6} g^+(x, t, \lambda)|_{x=t} = -E_2, \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что при фиксированных x и t матрицы-функции $g(x, t, \lambda)$ и $g^+(x, t, \lambda)$ являются целыми аналитическими по переменной λ . Доопределим эти матрицы-функции следующим образом:

$$g(x, t, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad x < t \quad \text{и} \quad g^+(x, t, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad x > t. \quad (13)$$

Через $L_{\text{loc}}(0, \infty)$ обозначим множество локально суммируемых на полуоси функций. Справедлива

ЛЕММА 2. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, где $f_1(x), f_2(x) \in L_{\text{loc}}(0, \infty)$. Если имеет место равенство

$$Y(x) = \int_0^x g(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (14)$$

то

$$L_\lambda Y(x) = f(x), \quad Y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, 6. \quad (15)$$

Справедливо и обратное утверждение. Если $Y(x)$ является решением задачи (15), то имеет место представление (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $Y(x)$ определяется по (14), тогда в силу определения $g(x, t, \lambda)$ непосредственным дифференцированием по x получаем (15).

2) Обратно. Пусть верно (15). Определим $\tilde{Y}(x) = \int_0^x g(x, t, \lambda) f(t) dt$ и $\hat{Y}(x) = Y(x) - \tilde{Y}(x)$. Тогда по доказанному $Y(x)$ и $\tilde{Y}(x)$ удовлетворяют (15), а следовательно,

$$L_\lambda \hat{Y}(x) = 0, \quad \hat{Y}^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, 6.$$

Откуда заключаем, что $\hat{Y}(x) = 0$. Таким образом, имеет место представление (14). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $f^+(x) = (f_1^+(x), f_2^+(x))$, где $f_1^+(x), f_2^+(x)$ – финитные суммируемые функции. Если имеет место равенство

$$Z(x) = \int_x^\infty f^+(t) g^+(x, t, \lambda) dt, \quad (16)$$

то

$$L_\lambda^+ Z(x) = f^+(x), \quad Z(x) - \text{гладкая финитная вектор-функция}. \quad (17)$$

Справедливо и обратное утверждение. Если $Z(x)$ является решением задачи (17), то имеет место представление (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3 повторяет доказательство леммы 2.

Из лемм 2 и 3 следует, что матрицы-функции $g(x, t, \lambda)$ и $g^+(x, t, \lambda)$ являются функциями Грина задач Коши (11) и (12) соответственно.

ЛЕММА 4. Имеет место следующее соотношение:

$$g^+(x, t, \lambda) = g(t, x, \lambda). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f^+(x) = (f_1^+(x), f_2^+(x))$, где $f_1(x), f_2(x) \in L_{\text{loc}}(0, \infty)$ и $f_1^+(x), f_2^+(x)$ – финитные суммируемые функции. Определим

$$Y(x) = \int_0^x g(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad Z(x) = \int_x^\infty f^+(t) g^+(x, t, \lambda) dt. \quad (19)$$

Используя равенство (4), леммы 2 и 3, вычисляем

$$\int_0^\infty Z(x) f(x) dx = \int_0^\infty f^+(x) Y(x) dx.$$

Записывая последнее равенство, используя определения $Y(x)$ и $Z(x)$, меняя порядок интегрирования в левой части равенства и учитывая (13), находим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f^+(t) g^+(x, t, \lambda) f(x) dx dt = \int_0^\infty \int_0^\infty f^+(t) g(t, x, \lambda) f(x) dx dt.$$

В силу произвольного выбора вектор-функций $f(x)$ и $f^+(x)$ получаем утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

2. Рассмотрим матрицу-функцию

$$G^+(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^4 B_k(t, \lambda) \Psi_k(x, \lambda) + g^+(x, t, \lambda), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (20)$$

где вектор-функции $B_k(t, \lambda) = (B_{k1}(t, \lambda), B_{k2}(t, \lambda))^T$ определим из следующих условий в точке $x = 0$:

$$G^+(0, t, \lambda) = 0, \quad G_x^+(0, t, \lambda) = 0.$$

То есть они могут быть найдены из следующей системы:

$$\sum_{k=1}^4 B_k(t, \lambda) \Psi_k(0, \lambda) = -g^+(0, t, \lambda), \quad \sum_{k=1}^4 B_k(t, \lambda) \Psi'_k(0, \lambda) = -g_x^+(0, t, \lambda). \quad (21)$$

Отметим, что система (21) распадается на две системы для скалярных функций $B_{k1}(t, \lambda)$ и $B_{k2}(t, \lambda)$, $k = 1, \dots, 4$, каждая из которых имеет определитель

$$\Delta_1(\lambda) = \det[(\Psi_{k1}(0, \lambda), \Psi_{k2}(0, \lambda), \Psi'_{k1}(0, \lambda), \Psi'_{k2}(0, \lambda))^T]_{k=1, \dots, 4}. \quad (22)$$

ЛЕММА 5. При $|\lambda| > \lambda^*$, $\text{Im } \lambda \neq 0$ определитель $\Delta_1(\lambda)$ отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению вектор-функций $\Psi_k(x, \lambda)$ с учетом условий на решения Вейля в точке $x = 0$, определитель (22) после несложных преобразований принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \det \left[\left(\int_0^\infty \xi \Phi'_k(\xi, \lambda) \Phi'_{4-k}(\xi, \lambda) d\xi, \int_0^\infty \Phi'_k(\xi, \lambda) \Phi'_{4-k}(\xi, \lambda) d\xi \right) \right]_{k=1, 2}.$$

Используя асимптотические представления решений Вейля (9), находим

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{\theta}{\rho^3} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in S,$$

где

$$\theta = \frac{r_3(r_2 - r_1)((r_1 + r_3)^2 + 4r_1^2)}{(4\Delta_0(r_1 + r_2)^2(r_1 + r_3)^2)}.$$

В силу введенной нумерации корней r_k (см. (8)) в каждом секторе S имеет место условие $\theta \neq 0$. И из последнего представления следует утверждение леммы. Лемма 5 доказана.

Учитывая условие (8) и то, что $\Phi_j^{(\nu)}(x, \lambda) = O(e^{\rho r_j x})$, $j = 1, \dots, 3$, при $x \rightarrow \infty$, $|\lambda| > \lambda^*$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, из определения $\Psi_k(x, \lambda)$ находим

$$\Psi_k^{(\nu)}(x, \lambda) \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, 4, \quad x \rightarrow \infty, \quad |\lambda| > \lambda^*, \quad \text{Im } \lambda \neq 0.$$

Тогда из (20) при фиксированных λ , $|\lambda| > \lambda^*$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, и t , принадлежащем некоторому компактному из $[0, \infty)$, следует, что

$$G^{+(\nu)}(x, t, \lambda) \xrightarrow{\text{exp}} 0, \quad \nu = 0, \dots, 6, \quad x \rightarrow \infty.$$

Здесь и в дальнейшем символ $\xrightarrow{\text{exp}}$ означает экспоненциальное стремление.

ЛЕММА 6. Пусть $f^+(x) = (f_1^+(x), f_2^+(x))$, где $f_1^+(x)$, $f_2^+(x)$ – финитные суммируемые функции. Если имеет место равенство

$$Z(x) = \int_0^\infty f^+(t)G^+(x, t, \lambda) dt,$$

то при фиксированном λ ($|\lambda| > \lambda^*$, $\text{Im } \lambda \neq 0$)

$$L_\lambda^+ Z(x) = f^+(x), \quad Z(0) = Z'(0) = 0, \quad Z^{(\nu)}(x) \xrightarrow{\text{exp}} 0, \quad \nu = 0, \dots, 6, \quad x \rightarrow \infty. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$Z(x) = \sum_{k=1}^4 \left(\int_0^\infty f^+(t)B_k(t, \lambda) dt \right) \Psi_k(x, \lambda) + \int_x^T f^+(t)g^+(x, t, \lambda) dt.$$

Применяя следствие 1 и лемму 3, вычисляем

$$\begin{aligned} L_\lambda^+ Z(x) &= \sum_{k=1}^4 \left(\int_0^\infty f^+(t)B_k(t, \lambda) dt \right) L_\lambda^+ \Psi_k(x, \lambda) + L_\lambda^+ \left(\int_x^T f^+(t)g^+(x, t, \lambda) dt \right) \\ &= L_\lambda^+ \left(\int_x^T f^+(t)g^+(x, t, \lambda) dt \right) = f^+(x). \end{aligned}$$

Так как при фиксированных λ , $|\lambda| > \lambda^*$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, и t , принадлежащем компактному из $[0, \infty)$, имеют место следующие условия:

$$G^+(0, t, \lambda) = 0, \quad G_x^+(0, t, \lambda) = 0, \quad G^{+(\nu)}(x, t, \lambda) \xrightarrow{\text{exp}} 0, \quad \nu = 0, \dots, 6, \quad x \rightarrow \infty,$$

находим

$$Z(0) = Z'(0) = 0, \quad Z^{(\nu)}(x) \xrightarrow{\text{exp}} 0, \quad \nu = 0, \dots, 6, \quad x \rightarrow \infty.$$

Лемма 6 доказана.

3. Теперь рассмотрим простейшее уравнение вида (2) с нулевыми коэффициентами $P_j(x)$, $R_k(x)$, $j = 0, \dots, 5$, $k = 0, 1$, т.е.

$$L_\lambda^0 Y(x) := Y^{(7)}(x) - \lambda \Omega Y^{(3)}(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (24)$$

где

$$Y(x) = (Y_1(x), Y_2(x))^T, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ -80 & -24 \end{pmatrix}.$$

В этом пункте построим функцию Грина сингулярной краевой задачи со специально выбранными краевыми условиями для неоднородного уравнения (24).

Введем фундаментальную систему решений

$$X_k(x, \lambda) = (X_{k1}(x, \lambda), X_{k2}(x, \lambda))^T, \quad k = 1, \dots, 14,$$

уравнения (24), удовлетворяющую условиям

$$X_k^{(m)}(0, \lambda) = (X_{k1}^{(m)}(0, \lambda), X_{k2}^{(m)}(0, \lambda))^T = (\delta_{k-1, 2m}, \delta_{k-2, 2m})^T, \\ m = 0, \dots, 6, \quad k = 1, \dots, 14.$$

При этом

$$X_1(x, \lambda) = (1, 0)^T, \quad X_2(x, \lambda) = (0, 1)^T, \quad X_3(x, \lambda) = (x, 0)^T, \\ X_4(x, \lambda) = (0, x)^T, \quad X_5(x, \lambda) = \left(\frac{x^2}{2}, 0\right)^T, \quad X_6(x, \lambda) = \left(0, \frac{x^2}{2}\right)^T.$$

Очевидно, что вронскиан этой системы равен 1. Также рассмотрим экспоненциальные решения $(e^{\rho\omega_k x}, \beta_k e^{\rho\omega_k x})^T$, $k = 1, \dots, 8$, где ω_k – корни уравнений $\omega^4 = -4$ и $\omega^4 = 16$, пронумерованные в каждом секторе $S = \{\rho : \arg \rho \in (\pi\nu/4, \pi(\nu+1)/4)\}$, $\nu = 0, \dots, 7$, так, что $\omega_k^4 = -4$, $\beta_k = -4$ при $k = 1, 2, 5, 6$ и $\omega_k^4 = 16$, $\beta_k = -2$ при $k = 3, 4, 7, 8$, причем

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) < \operatorname{Re}(\rho\omega_2) < \operatorname{Re}(\rho\omega_5) < \operatorname{Re}(\rho\omega_6), \\ \operatorname{Re}(\rho\omega_3) < \operatorname{Re}(\rho\omega_4) < \operatorname{Re}(\rho\omega_7) < \operatorname{Re}(\rho\omega_8). \quad (25)$$

Теперь построим фундаментальную систему решений уравнения (24)

$$N_k(x, \lambda) = (N_{k1}(x, \lambda), N_{k2}(x, \lambda))^T, \quad k = 1, \dots, 14,$$

определив ее следующим образом:

$$N_k(x, \lambda) = X_k(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, 6, \\ N_{k+6}(x, \lambda) = (e^{\rho\omega_k x}, \beta_k e^{\rho\omega_k x})^T, \quad k = 1, \dots, 8.$$

Отметим, что в силу (25) при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ вектор-функции $N_k(x, \lambda)$ при $k = 7, \dots, 10$ экспоненциально убывают, а при $k = 11, \dots, 14$ экспоненциально возрастают, когда $x \rightarrow \infty$. Тот факт, что вектор-функции $N_k(x, \lambda)$, $k = 1, \dots, 14$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (24), вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 7. При $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ определитель Вронского системы решений $N_k(x, \lambda)$, $k = 1, \dots, 14$, уравнения (24) отличен от нуля.

$$\det[N_j^{(k-1)}(0, \lambda)]_{k=1, \dots, 7, j=1, \dots, 14} = \rho^{36} \prod_{k=1}^8 \omega_k^3 D_0,$$

где $D_0 = \det[(\omega_k^{j-1}, \omega_k^{j-1} \beta_k)^T]_{j=1, \dots, 4, k=1, \dots, 8}$. Используя (25) и теорему Виета для корней ω_k , вычисляем

В силу введенной нумерации корней ω_k последнее выражение отлично от нуля в каждом секторе S . Таким образом, лемма 7 доказана.

$$X_k(x, \lambda) = \sum_{\nu=1}^1 \alpha_{\nu,k}(\lambda) N_{\nu}(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, 14, \quad (26)$$
[illegible]
$$\alpha_{\nu,k}(\lambda) = \frac{\alpha_{\nu,k}^0}{\rho^5}, \quad \nu = 3, 4, \quad \alpha_{\nu,k}(\lambda) = \frac{\alpha_{\nu,k}^0}{\rho^4}, \quad \nu = 5, 6,$$

где $\alpha_{\nu,k}^0$ – некоторые фиксированные числа.

При фиксированных t и λ определим матрицу-функцию $g_0(x, t, \lambda)$ при $x \geq t$ как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} L_\lambda^0 g_0(x, t, \lambda) &= 0, \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} g_0(x, t, \lambda)|_{x=t} &= 0, \quad j = 0, \dots, 5, \quad \frac{\partial^6}{\partial x^6} g_0(x, t, \lambda)|_{x=t} = E_2, \end{aligned} \quad (29)$$

а при $x < t$ положим $g_0(x, t, \lambda) = 0$.

Из (29) и из того, что для матрицы-функции $(X_{13}, X_{14}) = (X_{13}(x, \lambda), X_{14}(x, \lambda))$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} L_\lambda^0 (X_{13}, X_{14}) &= 0, \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} (X_{13}, X_{14})|_{x=0} &= 0, \quad j = 0, \dots, 5, \quad \frac{\partial^6}{\partial x^6} (X_{13}, X_{14})|_{x=0} = E_2, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} g_0(x, t, \lambda) &= (X_{13}(x - t, \lambda), X_{14}(x - t, \lambda)) && \text{при } x \geq t, \\ g_0(x, t, \lambda) &= 0 && \text{при } x < t. \end{aligned} \quad (30)$$

ЛЕММА 8. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, где $f_1(x), f_2(x) \in L_{\text{loc}}(0, \infty)$. Если имеет место равенство

$$Y(x) = \int_0^x g_0(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

то

$$L_\lambda^0 Y(x) = f(x), \quad Y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, 6. \quad (31)$$

Справедливо и обратное утверждение. Для решения задачи (31) имеет место указанное выше представление.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 8 в точности повторяет доказательство леммы 2.

В силу леммы 8 матрица-функция $g_0(x, t, \lambda)$ является функцией Грина задачи Коши (31).

Определим матрицу-функцию

$$G_0(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^4 X_{k+10}(x, \lambda) A_k(t, \lambda) + g_0(x, t, \lambda). \quad (32)$$

При этом вектор-функции $A_k(t, \lambda) = (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda))$, $k = 1, \dots, 4$, определим ниже. Подставляя (26), (30) в (32), при $x \geq t$ вычисляем

$$\begin{aligned} G_0(x, t, \lambda) &= \sum_{\nu=7}^{14} \begin{pmatrix} N_{\nu 1}(x, \lambda) \\ N_{\nu 2}(x, \lambda) \end{pmatrix} \left(\sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)) e^{-\rho \omega_{\nu-6} t} \right) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^6 \begin{pmatrix} N_{\nu 1}(x, \lambda) \\ N_{\nu 2}(x, \lambda) \end{pmatrix} \sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^6 \begin{pmatrix} N_{\nu 1}(x - t, \lambda) \\ N_{\nu 2}(x - t, \lambda) \end{pmatrix} (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)). \end{aligned}$$

Замечая, что первая сумма в этом представлении при $\nu = 11, \dots, 14$ содержит растущие по x экспоненты, определим вектор-функции

$$A_k(t, \lambda) = (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)), \quad k = 1, \dots, 4,$$

из условия исчезновения этих экспонент, т.е. потребуем, чтобы при $\nu = 11, \dots, 14$

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) + (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)) e^{-\rho \omega_{\nu-6} t} = 0. \quad (33)$$

С учетом (28) последнее условие принимает вид

$$\begin{pmatrix} \rho \alpha_{11,11}^0 & \rho \alpha_{11,12}^0 & \alpha_{11,13}^0 & \alpha_{11,14}^0 \\ \rho \alpha_{12,11}^0 & \rho \alpha_{12,12}^0 & \alpha_{12,13}^0 & \alpha_{12,14}^0 \\ \rho \alpha_{13,11}^0 & \rho \alpha_{13,12}^0 & \alpha_{13,13}^0 & \alpha_{13,14}^0 \\ \rho \alpha_{14,11}^0 & \rho \alpha_{14,12}^0 & \alpha_{14,13}^0 & \alpha_{14,14}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1j}(t, \lambda) \\ A_{2j}(t, \lambda) \\ A_{3j}(t, \lambda) \\ A_{4j}(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\rho \omega_5 t} \alpha_{11,12+j}^0 \\ e^{-\rho \omega_6 t} \alpha_{12,12+j}^0 \\ e^{-\rho \omega_7 t} \alpha_{13,12+j}^0 \\ e^{-\rho \omega_8 t} \alpha_{14,12+j}^0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (34)$$

Тот факт, что $A_k(t, \lambda)$ определяются однозначно, вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 9. При $\rho \neq 0$ определитель системы (34) отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (27) матрица $[\alpha_{\nu k}(\lambda)]_{\nu, k=1, \dots, 14}$ – обратная к матрице, записанной в левой части (27), и при этом выполняется равенство

$$[((\rho \omega_k)^{j+2}, (\rho \omega_k)^{j+2} \beta_k)^T]_{j=1, \dots, 4, k=1, \dots, 8} [\alpha_{i,p}(\lambda)]_{i,p=7, \dots, 14} = E_8. \quad (35)$$

Определим матрицу $[\gamma_{i,p}]_{i,p=1, \dots, 8}$ из следующего равенства:

$$[(\omega_k^{j-1}, \omega_k^{j-1} \beta_k)^T]_{j=1, \dots, 4, k=1, \dots, 8} [\gamma_{i,p}]_{i,p=1, \dots, 8} = E_8. \quad (36)$$

Используя введенную ранее нумерацию корней ω_k и применяя теорему Виета, вычисляем

$$[\gamma_{i,p}]_{i,p=1, \dots, 8} = \frac{1}{16} \left[\begin{pmatrix} \omega_1^\nu & \omega_2^\nu & \frac{1}{2} \omega_3^\nu & \frac{1}{2} \omega_4^\nu & \omega_5^\nu & \omega_6^\nu & \frac{1}{2} \omega_7^\nu & \frac{1}{2} \omega_8^\nu \\ \frac{1}{2} \omega_1^\nu & \frac{1}{2} \omega_2^\nu & \frac{1}{8} \omega_3^\nu & \frac{1}{8} \omega_4^\nu & \frac{1}{2} \omega_5^\nu & \frac{1}{2} \omega_6^\nu & \frac{1}{8} \omega_7^\nu & \frac{1}{8} \omega_8^\nu \end{pmatrix}^T \right]_{k=1, \dots, 4},$$

$$\nu = 4 - k + 1.$$

Откуда, вводя обозначение $\Gamma_0 = \det[\gamma_{i,p}]_{i,p=5, \dots, 8}$, заключаем

$$\Gamma_0 = \det \left[\begin{pmatrix} \omega_5^\nu & \omega_6^\nu & \frac{1}{2} \omega_7^\nu & \frac{1}{2} \omega_8^\nu \\ \frac{1}{2} \omega_5^\nu & \frac{1}{2} \omega_6^\nu & \frac{1}{8} \omega_7^\nu & \frac{1}{8} \omega_8^\nu \end{pmatrix}^T \right]_{k=1, \dots, 2}, \quad \nu = 2 - k + 1.$$

Снова применяя теорему Виета, находим

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{64} \omega_6^2 \omega_8^2 (\omega_5 + \omega_6) (\omega_7 + \omega_8).$$

Последнее выражение в силу введенной нумерации корней ω_k отлично от нуля в каждом секторе S , т.е. определитель $\Gamma_0 \neq 0$.

Далее, обозначив через $D_{kj}(\lambda)$ и D_{kj}^0 , $k, j = 1, \dots, 8$, алгебраические дополнения элементов матрицы

$$[((\rho\omega_k)^{j+2}, (\rho\omega_k)^{j+2}\beta_k)^T]_{j=1,\dots,4, k=1,\dots,8} \quad \text{и} \quad [(\omega_k^{j-1}, \omega_k^{j-1}\beta_k)^T]_{j=1,\dots,4, k=1,\dots,8}$$

соответственно, из (35) и (36) находим

$$\alpha_{k,j}(\lambda) = \frac{D_{j-6,k-6}(\lambda)}{D_0\rho^{36}\prod_{i=1}^8\omega_i^3}, \quad k, j = 11, \dots, 14,$$

$$\gamma_{k,j} = \frac{D_{j,k}^0}{D_0}, \quad k, j = 5, \dots, 8,$$

где определитель D_0 был введен в доказательстве леммы 7. Откуда, используя очевидные соотношения

$$D_{j,k}(\lambda) = D_{j,k}^0\rho^\nu \prod_{i=1, i \neq k}^8 \omega_i^3, \quad j, k = 5, \dots, 8,$$

где $\nu = 31$ при $j = 5, 6$ и $\nu = 30$ при $j = 7, 8$, получаем

$$\begin{aligned} \det[\alpha_{j,k}(\lambda)]_{j,k=11,\dots,14} &= \frac{\det[D_{j,k}(\lambda)]_{j,k=5,\dots,8}^T}{D_0\rho^{36}\prod_{i=1}^8\omega_i^3} \\ &= \rho^{122} \prod_{i_1=1, i_1 \neq 5}^8 \omega_{i_1}^3 \prod_{i_2=1, i_2 \neq 6}^8 \omega_{i_2}^3 \prod_{i_3=1, i_3 \neq 7}^8 \omega_{i_3}^3 \prod_{i_4=1, i_4 \neq 8}^8 \omega_{i_4}^3 \frac{\det[D_{j,k}^0(\lambda)]_{j,k=5,\dots,8}^T}{D_0\rho^{36}\prod_{i_5=1}^8\omega_{i_5}^3} \\ &= \rho^{86} \prod_{i_1=1}^4 \omega_{i_1}^9 \prod_{i_2=5}^8 \omega_{i_2}^6 \Gamma_0. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\rho \neq 0$ определитель матрицы $[\alpha_{k,j}(\lambda)]_{k,j=11,\dots,14}$ отличен от нуля. Из того, что в силу (28) имеет место равенство

$$\det[\alpha_{k,j}^0(\lambda)]_{k,j=11,\dots,14} = \rho^{22} \det[\alpha_{k,j}(\lambda)]_{k,j=11,\dots,14},$$

с учетом последнего следует утверждение леммы. Лемма 9 доказана.

В силу леммы 9 вектор-функции $A_k(t, \lambda) = (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda))$, $k = 1, \dots, 4$, определяются однозначно по формулам Крамера. Так при $j = 1, 2$ имеем

$$A_{1j}(t, \lambda) = \begin{vmatrix} e^{-\rho\omega_5 t} \alpha_{11,12+j}^0 & \rho\alpha_{11,12}^0 & \alpha_{11,13}^0 & \alpha_{11,14}^0 \\ e^{-\rho\omega_6 t} \alpha_{12,12+j}^0 & \rho\alpha_{12,12}^0 & \alpha_{12,13}^0 & \alpha_{12,14}^0 \\ e^{-\rho\omega_7 t} \alpha_{13,12+j}^0 & \rho\alpha_{13,12}^0 & \alpha_{13,13}^0 & \alpha_{13,14}^0 \\ e^{-\rho\omega_8 t} \alpha_{14,12+j}^0 & \rho\alpha_{14,12}^0 & \alpha_{14,13}^0 & \alpha_{14,14}^0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \rho\alpha_{11,11}^0 & \rho\alpha_{11,12}^0 & \alpha_{11,13}^0 & \alpha_{11,14}^0 \\ \rho\alpha_{12,11}^0 & \rho\alpha_{12,12}^0 & \alpha_{12,13}^0 & \alpha_{12,14}^0 \\ \rho\alpha_{13,11}^0 & \rho\alpha_{13,12}^0 & \alpha_{13,13}^0 & \alpha_{13,14}^0 \\ \rho\alpha_{14,11}^0 & \rho\alpha_{14,12}^0 & \alpha_{14,13}^0 & \alpha_{14,14}^0 \end{vmatrix}^{-1}.$$

Разлагая определители в этом представлении по первому столбцу и учитывая (25), получаем оценочные неравенства для $A_{1j}(t, \lambda)$

$$|A_{1j}(t, \lambda)| \leq \frac{C}{|\rho|} (|e^{-\rho\omega_5 t}| + |e^{-\rho\omega_7 t}|), \quad j = 1, 2, \quad \rho \in S.$$

Аналогично получаются оценки и для $A_{kj}(t, \lambda)$ при $k = 2, \dots, 4$. Точнее, при $\rho \in S$

$$|A_{kj}(t, \lambda)| \leq C|\rho|^\nu (|e^{-\rho\omega_5 t}| + |e^{-\rho\omega_7 t}|), \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, 2, \quad (37)$$

где $\nu = -1$ при $k = 1, 2$ и $\nu = 0$ при $k = 3, 4$. То есть при фиксированном λ , $\text{Im } \lambda \neq 0$, вектор-функции $A_k(t, \lambda)$, $k = 1, \dots, 4$, экспоненциально убывают при $t \rightarrow \infty$.

Определив вектор-функции $A_k(t, \lambda)$, учитывая (26), (30) и (33), из (32) получаем следующее представление:

$$G_0(x, t, \lambda) = \begin{cases} \sum_{\nu=7}^{10} \left(\frac{N_{\nu 1}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}(x, \lambda)} \right) \left(\sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \right. \\ \quad \left. + (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)) e^{-\rho\omega_{\nu-6} t} \right) \\ + \sum_{\nu=1}^6 \left(\frac{N_{\nu 1}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}(x, \lambda)} \right) \sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \\ + \sum_{\nu=1}^6 \left(\frac{N_{\nu 1}(x-t, \lambda)}{N_{\nu 2}(x-t, \lambda)} \right) (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)), \quad x \geq t, \\ \sum_{\nu=1}^{10} \left(\frac{N_{\nu 1}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}(x, \lambda)} \right) \sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \\ - \sum_{\nu=11}^{14} \left(\frac{N_{\nu 1}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}(x, \lambda)} \right) (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)) e^{-\rho\omega_{\nu-6} t}, \quad x \leq t. \end{cases} \quad (38)$$

Используя определение решений $N_k(x, \lambda)$, вычислим производные $G_0(x, t, \lambda)$ по x до пятого порядка включительно. Имеем при $j = 1, 2$:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} G_0(x, t, \lambda) = \begin{cases} \sum_{\nu=7}^{10} (\rho\omega_{\nu-6})^j \left(\frac{N_{\nu 1}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}(x, \lambda)} \right) \left(\sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \right. \\ \quad \left. + (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)) e^{-\rho\omega_{\nu-6} t} \right) \\ + \sum_{\nu=2j+1}^6 \left(\frac{N_{\nu 1}^{(j)}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}^{(j)}(x, \lambda)} \right) \sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \\ + \sum_{\nu=2j+1}^6 \left(\frac{N_{\nu 1}^{(j)}(x-t, \lambda)}{N_{\nu 2}^{(j)}(x-t, \lambda)} \right) (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)), \quad x \geq t, \\ \sum_{\nu=2j+1}^6 \left(\frac{N_{\nu 1}^{(j)}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}^{(j)}(x, \lambda)} \right) \sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \\ + \sum_{\nu=7}^{10} (\rho\omega_{\nu-6})^j \left(\frac{N_{\nu 1}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}(x, \lambda)} \right) \sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \\ - \sum_{\nu=11}^{14} (\rho\omega_{\nu-6})^j \left(\frac{N_{\nu 1}(x, \lambda)}{N_{\nu 2}(x, \lambda)} \right) (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)) e^{-\rho\omega_{\nu-6} t}, \quad x \leq t, \end{cases}$$

и при $j = 3, \dots, 5$:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} G_0(x, t, \lambda) = \begin{cases} \sum_{\nu=7}^{10} (\rho\omega_{\nu-6})^j \begin{pmatrix} N_{\nu 1}(x, \lambda) \\ N_{\nu 2}(x, \lambda) \end{pmatrix} \left(\sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \right. \\ \left. + (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)) e^{-\rho\omega_{\nu-6}t} \right), & x \geq t, \\ \sum_{\nu=7}^{10} (\rho\omega_{\nu-6})^j \begin{pmatrix} N_{\nu 1}(x, \lambda) \\ N_{\nu 2}(x, \lambda) \end{pmatrix} \sum_{k=1}^4 \alpha_{\nu, k+10}(\lambda) (A_{k1}(t, \lambda), A_{k2}(t, \lambda)) \\ - \sum_{\nu=11}^{14} (\rho\omega_{\nu-6})^j \begin{pmatrix} N_{\nu 1}(x, \lambda) \\ N_{\nu 2}(x, \lambda) \end{pmatrix} (\alpha_{\nu, 13}(\lambda), \alpha_{\nu, 14}(\lambda)) e^{-\rho\omega_{\nu-6}t}, & x \leq t. \end{cases} \quad (39)$$

В силу определения решений $N_k(x, \lambda)$, равенств (28) и оценок (37) из (38) и (39) вытекает следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j}{\partial x^j} G_0(x, t, \lambda) &= O\left(\frac{1+x^{2-j}}{\rho^4}\right), & j &= 0, 1, \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} G_0(x, t, \lambda) &= O(\rho^{j-6}), & j &= 2, \dots, 6. \end{aligned} \quad (40)$$

Кроме этого, из (32), (30) и условий на решения $X_k(x, \lambda)$ в точке $x = 0$ заключаем

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} G_0(0, t, \lambda) = 0, \quad j = 0, \dots, 4. \quad (41)$$

ЛЕММА 10. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, где $f_1(x), f_2(x) \in L(0, \infty)$. Если имеет место равенство

$$Y(x) = \int_0^\infty G_0(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (42)$$

то

$$\begin{aligned} L_\lambda^0 Y(x) &= f(x), \\ Y^{(j)}(0) &= 0, \quad j = 0, \dots, 4, \\ Y^{(j)}(x) &= O(1+x^{2-j}), \quad j = 0, 1, \\ Y^{(j)}(x) &= O(1), \quad j = 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad x \rightarrow \infty. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место представление (42). Тогда, используя (40) и (41), находим

$$\begin{aligned} Y^{(j)}(0) &= 0, \quad j = 0, \dots, 4, \\ Y^{(j)}(x) &= O(1+x^{2-j}), \quad j = 0, 1, \\ Y^{(j)}(x) &= O(1), \quad j = 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad x \rightarrow \infty.$$

Подставив (32) в (42), получаем

$$Y(x) = \sum_{k=1}^4 X_{k+10}(x, \lambda) \int_0^\infty A_k(t, \lambda) f(t) dt + \int_0^x g_0(x, t, \lambda) f(t) dt.$$

Применяя оператор L_λ^0 к обеим частям этого равенства и используя лемму 8, вычисляем

$$L_\lambda^0 Y(x) = \sum_{k=1}^4 L_\lambda^0 X_{k+10}(x, \lambda) \int_0^\infty A_k(t, \lambda) f(t) dt + L_\lambda^0 \left(\int_0^x g_0(x, t, \lambda) f(t) dt \right) = f(x).$$

Лемма 10 доказана.

Таким образом, матрица-функция $G_0(x, t, \lambda)$ является функцией Грина краевой задачи (43).

4. Теперь поставим целью построить функцию Грина $G(x, t, \lambda)$ соответствующей сингулярной краевой задачи для неоднородного уравнения (2). Для этого будем использовать метод возмущения простейшего уравнения (24). Точнее, при фиксированных t и λ определим совокупность матричных функций $G(x, t, \lambda)$ и $G_k(x, t, \lambda)$, $k = 1, \dots, 5$, как решение следующей системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} G(x, t, \lambda) = G_0(x, t, \lambda) - \int_0^\infty G_0(x, s, \lambda) J(s, t, \lambda) ds, \\ G_k(x, t, \lambda) = G_0^{(k)}(x, t, \lambda) - \int_0^\infty G_0^{(k)}(x, s, \lambda) J(s, t, \lambda) ds, \quad k = 1, \dots, 5, \end{cases} \quad (44)$$

где

$$J(s, t, \lambda) = \sum_{i=1}^5 P_i(s) G_i(s, t, \lambda) + P_0(s) G(s, t, \lambda) - \lambda (R_1(s) G_1(s, t, \lambda) + R_0(s) G(s, t, \lambda)).$$

Основанием для такого определения служит следующая

ЛЕММА 11. Система интегральных уравнений (44) при фиксированных $t \geq 0$ и λ , $|\lambda| > \lambda^*$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, имеет единственное решение $G(x, t, \lambda)$ и $G_k(x, t, \lambda)$, $k = 1, \dots, 5$. При этом имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |G(x, t, \lambda)| &\leq C \frac{1+x^2}{|\rho|^4}, \quad |G_1(x, t, \lambda)| \leq C \frac{1+x}{|\rho|^4}, \\ |G_j(x, t, \lambda)| &\leq C |\rho|^{j-6}, \quad j = 2, \dots, 5, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x} G_5(x, t, \lambda) \right| &\leq C. \end{aligned} \quad (45)$$

Полное доказательство леммы 11 приведено в [9; гл. 1, § 3, с. 54–71].

ЛЕММА 12. При фиксированных $t \geq 0$ и λ , $|\lambda| > \lambda^*$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, матрицы-функции $G(x, t, \lambda)$ и $G_k(x, t, \lambda)$, $k = 1, \dots, 5$, имеют следующие свойства:

- 1) $G_k(x, t, \lambda) = \partial^k / \partial x^k G(x, t, \lambda)$, $k = 1, \dots, 5$;
- 2) $\partial^6 / \partial x^6 G(x, t, \lambda)$ – непрерывная по $x \in [0, t) \cup (t, \infty)$ и

$$\frac{\partial^6}{\partial x^6} G(t+0, t, \lambda) - \frac{\partial^6}{\partial x^6} G(t-0, t, \lambda) = E_2;$$

- 3) $G(0, t, \lambda) = \partial^k / \partial x^k G(0, t, \lambda) = 0$, $k = 1, \dots, 4$;
- 4) $L_\lambda G(x, t, \lambda) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу леммы 11 на (44) можно смотреть как на верные равенства. Дифференцируя первое из этих равенств по переменной x до пятого порядка включительно и сравнивая результаты с соответствующими равенствами в (44), в силу единственности решения системы получаем свойство 1).

2) Из того, что при фиксированных $t \geq 0$ и λ , $|\lambda| > \lambda^*$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, матрица-функция $\partial^6/\partial x^6 G(x, t, \lambda) - \partial^6/\partial x^6 G_0(x, t, \lambda)$ непрерывна по $x \in [0, t) \cup (t, \infty)$ и

$$\frac{\partial^6}{\partial x^6} G_0(t+0, t, \lambda) - \frac{\partial^6}{\partial x^6} G_0(t-0, t, \lambda) = E_2$$

следует свойство 2).

3) Так как $\partial^j/\partial x^j G_0(0, t, \lambda) = 0$, $j = 0, \dots, 4$, из (44) вытекает свойство 3).

4) Применяя лемму 10 к первому равенству в (44) и используя доказанное свойство 1), находим

$$L_\lambda^0(G(x, t, \lambda) - G_0(x, t, \lambda)) = - \sum_{k=0}^5 P_k(s) G^{(k)}(x, t, \lambda) + \lambda \sum_{k=0}^1 R_k(x) G^{(k)}(x, t, \lambda).$$

Откуда с учетом того, что $L_\lambda^0 G_0(x, t, \lambda) = 0$, получаем свойство 4). Лемма 12 доказана.

ЛЕММА 13. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, где $f_1(x), f_2(x) \in L(0, \infty)$. Если при $|\lambda| > \lambda^*$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, имеет место равенство

$$Y(x) = \int_0^\infty G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (46)$$

то

$$\begin{aligned} L_\lambda Y(x) &= f(x), \\ Y^{(j)}(0) &= 0, \quad j = 0, \dots, 4, \\ Y^{(j)}(x) &= O(1 + x^{2-j}), \quad j = 0, 1, \\ Y^{(j)}(x) &= O(1), \quad j = 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad x \rightarrow \infty. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (46) и применяя лемму 12, вычисляем

$$Y^{(\nu)}(x) = \tau f(x) + \int_0^\infty G^{(\nu)}(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad \nu = 0, \dots, 7,$$

где $\tau = 0$ при $\nu = 0, \dots, 6$ и $\tau = 1$ при $\nu = 7$. Теперь, применяя свойство 4) леммы 12, находим

$$L_\lambda Y(x) = \int_0^\infty (L_\lambda G(x, t, \lambda)) f(t) dt + f(x) = f(x).$$

Из свойства 3) той же леммы вытекает $Y^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \dots, 4$. В свою очередь, из оценок (45) следует

$$\begin{aligned} Y^{(j)}(x) &= O(1 + x^{2-j}), \quad j = 0, 1, \\ Y^{(j)}(x) &= O(1), \quad j = 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad x \rightarrow \infty.$$

Лемма 13 доказана.

Таким образом, $G(x, t, \lambda)$ является функцией Грина краевой задачи (47).

ЛЕММА 14. При $x \geq 0$, $t \geq 0$ и $|\lambda| > \lambda^*$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, имеет место следующее соотношение:

$$G^+(x, t, \lambda) = G(t, x, \lambda). \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T, \quad f^+(x) = (f_1^+(x), f_2^+(x)),$$

где $f_1(x), f_2(x) \in L(0, \infty)$ и $f_1^+(x), f_2^+(x)$ – финитные суммируемые функции. Обозначим

$$Y(x) = \int_0^\infty G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad Z(x) = \int_0^\infty f^+(t) G^+(x, t, \lambda) dt.$$

Подставляя $Y(x)$ и $Z(x)$ в (4) и применяя леммы 6 и 13, находим

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f^+(t) G^+(x, t, \lambda) dt \right) f(x) dx = \int_0^\infty f^+(x) \left(\int_0^\infty G(x, t, \lambda) f(t) dt \right) dx.$$

Откуда в силу произвольного выбора $f(x)$ и $f^+(x)$ получаем (48). Лемма 14 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $x \geq 0$, $t \geq 0$ и $|\lambda| > \lambda^*$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, имеет место следующее представление:

$$G(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^4 B_k(x, \lambda) \Psi_k(t, \lambda) + g(x, t, \lambda). \quad (49)$$

Утверждение следствия 2 вытекает из (18), (20) и (48).

5. Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – произвольные функции из $L(0, \infty)$ такие, что выполняется условие (10). Положив

$$Y(x, \lambda) = \int_0^\infty G(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

в силу леммы 13 при $|\lambda| > \lambda^*$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, имеем

$$L_\lambda Y(x, \lambda) = f(x). \quad (50)$$

Кроме этого, с помощью (49) и (10) вычисляем

$$Y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^4 B_k(x, \lambda) \int_0^\infty \Psi_k(t, \lambda) f(t) dt + \int_0^x g(x, t, \lambda) f(t) dt = \int_0^x g(x, t, \lambda) f(t) dt. \quad (51)$$

Так как при фиксированных x и t матрица-функция $g(x, t, \lambda)$ является целой по λ , то из (51) следует, что $Y(x, \lambda)$ целая по λ . С другой стороны, в силу (45) она убывает при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Следовательно, применяя теорему Лиувилля, имеем $Y(x, \lambda) \equiv 0$. Учитывая последнее, из равенства (50) находим, что $f(x) = 0$ п.в. на $[0, \infty)$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Borg, “Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte”, *Acta Math.*, **78**:1 (1946), 1–96.
- [2] М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, “О разложении по произведениям некоторых решений двух уравнений Штурма–Лиувилля”, *Докл. АН СССР*, **310**:4 (1990), 781–784.
- [3] Е. Х. Христов, “О разложениях по произведениям решений двух задач Штурма–Лиувилля на полуоси”, *Дифференц. уравнения*, **16**:11 (1980), 2023–2029.
- [4] E. Kh. Khristov, “On the Λ -operators associated with two Sturm–Liouville problems on the semi-axis”, *Inverse Problems*, **14** (1998), 647–660.
- [5] G. Freiling, V. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications*, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2001.
- [6] V. A. Jurko, “Solution of the Boussinesq equation on the half-line by the inverse problem method”, *Inverse Problems*, **7**:5 (1991), 727–738.
- [7] Д. В. Поплавский, “О разрешимости начально-краевой задачи для системы Богоявленского”, *Математика. Механика. Сб. науч. тр.*, **7**, Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 2005, 98–101.
- [8] В. А. Юрко, *Обратные спектральные задачи и их приложения*, Изд-во Саратовского пед. ин-та, Саратов, 2001.
- [9] Д. В. Поплавский, *Прямые и обратные задачи спектрального анализа и их приложения к нелинейным эволюционным операторам*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Саратов. гос. ун-т, Саратов, 2006.

Д. В. Поплавский

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: poplavskydv@mail.ru

Поступило

01.09.2008

Исправленный вариант

14.06.2010