Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Злотник, Сун Цзян, Корректность задачи Коши для 1D уравнений вязкого теплопроводного газа с начальными данными из пространств Лебега, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 779–783

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:12:10

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ 1D УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

А. А. Злотник, Сун Цзян

1. Изучается задача Коши для системы квазилинейных уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа [1]

$$\eta_t = v_x, \quad v_t = \sigma_x, \quad c_V \theta_t = (\kappa \rho \theta_x)_x + \sigma v_x \quad \text{в } Q, \quad (1)$$

$$\sigma = \mu \rho v_x - R \rho \theta, \quad \rho = 1/\eta \quad \text{в } Q, \quad (2)$$

$$\eta(x, t) \rightarrow \eta_{\pm}, \quad v(x, t) \rightarrow v_{\pm}, \quad \theta(x, t) \rightarrow \theta_{\pm} \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$\eta(x, 0) = \eta^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta^0(x) \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (4)$$

где $Q \equiv Q_T := \mathbb{R} \times (0, T)$. Искомые функции η, v, θ – удельный объем, скорость, температура – зависят от лагранжевых массовых координат (x, t) . Функции σ и ρ – плотность и напряжение. Величины μ, R, c_V, κ – положительные физические константы, величины $\eta_{\pm} > 0, v_{\pm}, \theta_{\pm}$ – также константы.

Глобальные сильные решения задачи (1)–(4) были изучены в работах [1]–[3] для случая начальных данных η^0, v^0, θ^0 из пространства Соболева H^1 .

Глобальные слабые решения соответствующих начально–краевых задач для случая η^0, v^0, θ^0 из пространств Лебега были исследованы в [4]–[9]. В настоящей работе мы переносим на задачу Коши результаты о единственности слабых решений и их непрерывной по Липшицу зависимости от начальных данных из [9] и о их существовании из [4]. Другие результаты о существовании слабых решений даны в [10], [11]; см. также [12] для малых данных.

Пусть начальные данные удовлетворяют условиям

$$\eta^0 > 0, \quad \eta^0, (\eta^0)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \eta^0 - \eta_{\pm}, v^0 - v_{\pm}, \theta^0 - \theta_{\pm} \in L^2(\mathbb{R}^{\pm}), \quad (5)$$

где $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$. Пусть $L^{q,r}(Q^{\pm}), V_2(Q^{\pm})$ – пространства с нормами [13] $\|w\|_{L^{q,r}(Q^{\pm})} := \|\|w\|_{L^q(\mathbb{R}^{\pm})}\|_{L^r(0,T)}, q, r \in [1, \infty], \|w\|_{V_2(Q^{\pm})} := \|w\|_{L^{2,\infty}(Q^{\pm})} + \|w_x\|_{L^2(Q^{\pm})}$, где $Q^{\pm} := \mathbb{R}^{\pm} \times (0, T)$.

Для задачи (1)–(4) введем *слабые решения* (η, v, θ) из класса $\mathcal{A}$:

$$\eta > 0, \quad \eta, \eta^{-1} \in L^\infty(Q), \quad \eta - \eta_{\pm} \in L^{2,\infty}(Q^{\pm}), \quad \eta_t \in L^2(Q), \quad v - v_{\pm}, \theta - \theta_{\pm} \in V_2(Q^{\pm}).$$

Они удовлетворяют уравнениям $\eta_t = v_x$ и (2), интегральным тождествам

$$\int_Q (-v \varphi_t + \sigma \varphi_x) dx dt = \int_{\mathbb{R}} v^0 \varphi|_{t=0} dx \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{Q}), \quad (6)$$

$$\int_Q (-c_V \theta \varphi_t + \kappa \rho \theta_x \varphi_x - \sigma v_x \varphi) dx dt = \int_{\mathbb{R}} c_V \theta^0 \varphi|_{t=0} dx \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{Q}), \quad (7)$$

где $\text{supp } \varphi$ компактен в $\mathbb{R} \times [0, T)$, и начальному условию $\eta|_{t=0} = \eta^0$.

Сформулируем основные результаты работы. Ниже $N > 1, \bar{N} > 1$ – параметры, а величины $K(N), K(\bar{N})$ не зависят от η^0, v^0, θ^0 .

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00207, работа второго автора выполнена при поддержке the Special Funds for MSBRP, № G1999032801, the NNSF и the CAEP Китая.

ТЕОРЕМА 1. Слабые решения из класса $\mathcal{A}$ задачи Коши (1)–(4) единственны.

Более того, пусть $\ell = 1, 2$ и $(\eta^{(\ell)}, v^{(\ell)}, \theta^{(\ell)})$ – решение, отвечающее начальным данным $(\eta^{0,(\ell)}, v^{0,(\ell)}, \theta^{0,(\ell)})$, удовлетворяющим условиям (5), причем

$$\overline{N}^{-1} \leq \eta^{(\ell)} \leq \overline{N} \quad \text{в } Q, \quad \|v^{(\ell)} - v_{\pm}\|_{V_2(Q^{\pm})} + \|\theta^{(\ell)} - \theta_{\pm}\|_{V_2(Q^{\pm})} \leq \overline{N}$$

с каким-либо $\overline{N} > 1$. Тогда справедлива оценка разности решений

$$\begin{aligned} & \|\Delta\eta\|_{L^\infty(Q) \cap L^{2,\infty}(Q)} + \|\Delta v\|_{V_2(Q)} + \|\Delta\theta\|_{L^{q_0,r_0}(Q)} + \|\Delta\theta_x\|_{L^{2,r_1}(Q)} \\ & \leq K(\overline{N})(\|\Delta\eta^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})} + \|\Delta v^0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\Delta\theta^0\|_{L^2(\mathbb{R})}) \end{aligned}$$

с любыми

$$q_0 \in [2, \infty], \quad r_0 \in [1, \infty], \quad \frac{1}{2q_0} + \frac{1}{r_0} = \frac{1+\varepsilon_0}{2}, \quad r_1 = \frac{4}{3+\varepsilon_0} \quad \text{для } \varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \quad (8)$$

Здесь и ниже $\Delta\eta = \eta^{(1)} - \eta^{(2)}$, $\Delta\eta^0 = \eta^{0,(1)} - \eta^{0,(2)}$ и т.д.

Отметим, что в силу условий теоремы $\Delta\eta^0, \Delta v^0, \Delta\theta^0 \in L^2(\mathbb{R})$ и $\Delta\eta \in L^{2,\infty}(Q)$, $\Delta v, \Delta\theta \in V_2(Q)$; как следствие, $\Delta\theta \in L^{q_0,r_0}(Q)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\eta_{\pm} > 0$, $v_- \leq v_+$, $\theta_{\pm} = \theta_{\infty} > 0$. Пусть выполнены условия (5), а также $N^{-1} \leq \eta^0 \leq N$, $N^{-1} \leq \theta^0$ и

$$\|\eta^0 - \eta_{\pm}\|_{L^2(\mathbb{R}^{\pm})} + \|v^0 - v_{\pm}\|_{L^2(\mathbb{R}^{\pm}) \cap L^4(\mathbb{R}^{\pm})} + \|\theta^0 - \theta_{\infty}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq N$$

с каким-либо $N > 1$. Тогда существует слабое решение (η, v, θ) из класса $\mathcal{A}$ задачи Коши (1)–(4), удовлетворяющее оценкам

$$\begin{aligned} & K(N)^{-1} \leq \eta \leq K(N), \quad K(N)^{-1} \leq \theta \quad \text{в } Q, \\ & \|\eta - \eta_{\pm}\|_{L^{2,\infty}(Q^{\pm})} + \|\eta_t\|_{L^2(Q)} + \|v - v_{\pm}\|_{V_2(Q^{\pm})} + \|\theta - \theta_{\infty}\|_{V_2(Q)} \leq K(N), \\ & \|v - v_{\pm}\|_{L^{4,\infty}(Q^{\pm})} + \|vv_x\|_{L^2(Q)} \leq K(N). \end{aligned}$$

2. Доказательство теоремы 1 опирается на результаты о свойствах слабых решений задачи Коши для линейных параболических уравнений с негладкими данными. Эти решения можно понимать аналогично (6), (7).

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$(\alpha u)_t = (\beta u_x - \psi)_x + f \quad \text{в } Q, \quad u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad 0 < t < T, \quad u|_{t=0} = u^0 \quad (9)$$

с коэффициентами α и β такими, что $\alpha, \beta \in L^\infty(Q)$, $N^{-1} \leq \alpha \leq N$, $N^{-1} \leq \beta \leq N$, $\|\alpha_t\|_{L^{2,4/3}(Q)} \leq N$. Пусть для краткости $\|\cdot\|_{L^p} := \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$, $1 \leq p \leq \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $u^0 \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi \in L^2(Q)$, $f \in L^{q,r}(Q)$ с некоторыми $q \in [1, 2]$, $r \in [1, 4/3]$, $1/(2q) + 1/r = 5/4$. Тогда существует единственное слабое решение u из класса $V_2(Q)$ задачи (9), причем

$$\|u\|_{V_2(Q)} \leq K(N)(\|u^0\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2(Q)} + \|f\|_{L^{q,r}(Q)}).$$

Наряду с (9) рассмотрим также несколько иную задачу:

$$\bar{\alpha} w_t = (\bar{\beta} w_x - \bar{\psi})_x + \bar{f} \quad \text{в } Q, \quad w(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad 0 < t < T, \quad w|_{t=0} = w^0 \quad (10)$$

с коэффициентами $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ такими, что $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in L^\infty(Q)$, $N^{-1} \leq \bar{\alpha} \leq N$, $N^{-1} \leq \bar{\beta} \leq N$, $\|\bar{\beta}_t\|_{L^{2,4/3}(Q)} \leq N$. Введем пространство $W(Q)$ с нормой $\|w\|_{W(Q)} := \|w\|_{L^2(Q)} + \|w_x\|_{L^{2,\infty}(Q)} + \|w_t\|_{L^2(Q)}$.

Положим также $(I_0 y)(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$.

Между задачами (9) и (10) существует тесная связь.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1. Пусть выполнены условия предложения 1 и $I_0 f \in L^{2,\infty}(Q)$. Тогда функция $w = w^0 + I_0(\beta u_x - \psi)$ с $w^0 \in H^1(\mathbb{R})$ является слабым решением из класса $W(Q)$ задачи (10) с данными

$$\bar{\alpha} = \beta^{-1}, \quad \bar{\beta} = \alpha^{-1}, \quad \bar{\psi} = -\alpha^{-1}(\alpha|_{t=0}u^0 - w_x^0 + I_0 f), \quad \bar{f} = -\beta^{-1}\psi.$$

2. Пусть выполнены условия $w^0 \in H^1(\mathbb{R})$, $\bar{\psi}, \bar{f} \in L^2(Q)$, $(\bar{\beta}^{-1}\bar{\psi})_t \in L^{2,1}(Q)$ и w является слабым решением из класса $W(Q)$ задачи (10). Тогда функция $u = \bar{\beta}w_x - \bar{\psi}$ является слабым решением из класса $V_2(Q)$ задачи (9) с данными

$$\alpha = \bar{\beta}^{-1}, \quad \beta = \bar{\alpha}^{-1}, \quad \psi = -\bar{\alpha}^{-1}\bar{f}, \quad f = -(\bar{\beta}^{-1}\bar{\psi})_t, \quad u^0 = \bar{\beta}|_{t=0}w_x^0 - \bar{\psi}|_{t=0}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях на данные из предложения 2, п. 2 существует единственное слабое решение из класса $W(Q)$ задачи (10), причем

$$\|w\|_{W(Q)} \leq K(N)(\|w^0\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|\bar{\psi}|_{t=0}\|_{L^2} + \|(\bar{\beta}^{-1}\bar{\psi})_t\|_{L^{2,1}(Q)} + \|\bar{f}\|_{L^2(Q)}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть выполнены условия предложения 2, п. 2 и

$$\|\bar{\alpha}_t\|_{L^{2,r_\alpha}(Q)} \leq N \quad \text{с} \quad r_\alpha = \frac{4}{3} \left[\left(1 - \frac{2\varepsilon_\alpha}{3} \right) \right]^{-1} \quad \text{для некоторого} \quad \varepsilon_\alpha \in \left(0, \frac{1}{2} \right]. \quad (11)$$

Тогда

$$\sup_Q |w| \leq K(N)(\|w^0\|_{L^\infty \cap L^2} + \|\bar{\psi}\|_{L^{2,r'_1}(Q)} + \|\bar{f}\|_{L^{q'_0,r'_0}(Q)})$$

для всех q_0, r_0, r_1 , удовлетворяющих (8) с $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть выполнены условия (11) с $\bar{\alpha} = \alpha$ и $\beta_t \in L^{2,4/3}(Q)$. Пусть также $u^0 \in L^1(\mathbb{R})$, $\psi = 0$, $f \in L^1(Q)$. Тогда существует единственное слабое решение из класса $u \in L^2(Q)$, $u_x \in L^{2,1}(Q)$ задачи (9), причем

$$\|u\|_{L^{q_0,r_0}(Q)} + \|u_x\|_{L^{2,r_1}(Q)} \leq K(N)(\|u^0\|_{L^1} + \|f\|_{L^1(Q)})$$

для всех q_0, r_0, r_1 , удовлетворяющих (8) с $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_\alpha$.

Перечисленные результаты выводятся последовательно по аналогии с соответствующими результатами для начально-краевых задач из [13], [14], [8].

3. Ниже в разделах 3, 4 $I = (x_0, x_1)$ – любой конечный интервал, $|I|$ – его длина. Для обоснования теоремы 1 используется схема рассуждений из [9].

ЛЕММА 1. Справедливы формулы

$$\begin{aligned} \eta &= a(\eta^0 + \mu^{-1} R I_0(a^{-1}\theta)) & \text{с} \quad a &:= \exp(\mu^{-1} I_0 \sigma), \\ I_0 \sigma &= A_I(v - v^0) + I_0 \langle \sigma \rangle_I & \text{на} \quad I_T &:= I \times (0, T), \end{aligned}$$

где $A_I w(x) := \int_{x_0}^x w(\xi) d\xi - \langle \int_{x_0}^x w(\xi) d\xi \rangle_I$, $\langle w \rangle_I := \frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx$.

Кроме того, $I_0 \sigma \in C(\overline{Q})$ и верны оценки

$$\|\theta\|_{L^\infty,4(Q)} \leq K(\overline{N}), \quad \sup_Q |I_0 \sigma| \leq K(\overline{N}).$$

При помощи леммы 1 и предложений 1, 4 последовательно выводятся следующие равномерные относительно $0 < t \leq T$ оценки:

$$\begin{aligned} \|\Delta \eta\|_{L^\infty(I_t)} &\leq K(\overline{N})(\|\Delta \eta^0\|_{L^\infty(I)} + \|A_I \Delta v^0\|_{L^\infty(I)} + \|A_I \Delta v\|_{L^\infty(I_t)} \\ &\quad + \|\Delta v_x\|_{L^1(I_t)} + \|\Delta \theta\|_{L^\infty,1(I_t)}), \end{aligned}$$

где $K(\overline{N})$ зависит от $|I|$, но не от I ;

$$\begin{aligned}\|\Delta\eta\|_{L^\infty(Q_t)} &\leq K(\overline{N})(\|\Delta\eta^0\|_{L^\infty} + \|\Delta v^0\|_{L^2} + \|\Delta v\|_{V_2(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L^\infty,1(Q_t)}), \\ \|\Delta v\|_{V_2(Q_t)} &\leq K(\overline{N})(\|\Delta v^0\|_{L^2} + \|d\|\Delta\eta\|_{L^\infty \cap L^2} \|_{L^2(0,t)} + \|\Delta\theta\|_{L^2(Q_t)}),\end{aligned}$$

где функция $d = d(t)$ такова, что $\|d\|_{L^2(0,T)} \leq K(\overline{N})$;

$$\begin{aligned}&\|\Delta\eta\|_{L^\infty(Q_t) \cap L^{2,\infty}(Q_t)} + \|\Delta v\|_{V_2(Q_t)} \\ &\leq K(\overline{N})(\|\Delta\eta^0\|_{L^\infty \cap L^2} + \|\Delta v^0\|_{L^2} + \|\Delta\theta\|_{L^\infty,1(Q_t) \cap L^2(Q_t)}), \\ &\|\Delta\theta\|_{L^{q_0,r_0}(Q_t)} + \|\Delta\theta_x\|_{L^{2,r_1}(Q_t)} \\ &\leq K(\overline{N})(\|\Delta\theta^0\|_{L^2} + \|\Delta\eta\|_{L^\infty(Q_t) \cap L^{2,\infty}(Q_t)} + \|\Delta v_x\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L^2(Q_t)}),\end{aligned}$$

для любых q_0, r_0, r_1 , удовлетворяющих (8).

Теорему 1 нетрудно вывести из последних двух оценок по аналогии с [9].

4. Для доказательства теоремы 2 введем семейство усредненных начальных данных $\eta_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0$ с параметром усреднения $\varepsilon \rightarrow 0$ и соответствующее семейство глобальных сильных решений $(\eta^\varepsilon, v^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ со свойствами [1]–[3]

$$\begin{aligned}\eta^\varepsilon - \eta_\pm, v^\varepsilon - v_\pm, \theta^\varepsilon - \theta_\infty, \eta_x^\varepsilon &\in L^{2,\infty}(Q^\pm), \quad v_x^\varepsilon, \theta_x^\varepsilon \in V_2(Q), \\ \eta_t^\varepsilon, \eta_{xt}^\varepsilon, v_t^\varepsilon, \theta_t^\varepsilon &\in L^2(Q), \quad \inf_Q \eta^\varepsilon > 0, \quad \inf_Q \theta^\varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Эти решения удовлетворяют равномерным по ε оценкам [1]–[3], [11]

$$K^{-1} \leq \eta^\varepsilon \leq K, \quad K^{-1} \leq \theta^\varepsilon, \quad \|\eta^\varepsilon - \eta_\pm\|_{L^{2,\infty}(Q^\pm)} + \|\eta_t^\varepsilon\|_{L^2(Q)} + \|v^\varepsilon - v_\pm\|_{V_2(Q^\pm)} \leq K$$

(здесь и ниже K не зависит от ε). Пусть $\sigma^\varepsilon = \mu\rho^\varepsilon v_x^\varepsilon - R\rho^\varepsilon \theta^\varepsilon$, $\rho^\varepsilon = 1/\eta^\varepsilon$.

Следующие два результата имеют аналоги в [1] и [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Справедлива оценка*

$$\|v^\varepsilon - v_\pm\|_{L^{4,\infty}(Q_T^\pm)} + \|v^\varepsilon v_x^\varepsilon\|_{L^2(Q)} + \|\theta^\varepsilon - \theta_\infty\|_{V_2(Q)} \leq K.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Справедлива оценка*

$$\|\Delta_h \eta^\varepsilon\|_{L^{p,\infty}(I_T)} \leq K(\|\Delta_h \eta^0\|_{L^p(I)} + |h|^{1/2+1/p}), \quad 2 \leq p \leq \infty,$$

при всех h , причем K не зависит от I, h . В ней $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$, а I – произвольный (возможно, бесконечный) интервал.

Указанные оценки позволяют извлечь из $(\eta^\varepsilon, v^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ последовательность (за которой мы сохраняем прежнее обозначение) такую, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\eta^\varepsilon &\rightarrow \eta \quad \text{*слабо в } L^\infty(Q), \quad v^\varepsilon - v_\pm \rightarrow v - v_\pm \quad \text{*слабо в } L^\infty(0,T; L^4(\mathbb{R}^\pm)), \\ (\eta^\varepsilon - \eta_\pm, v^\varepsilon - v_\pm, \theta^\varepsilon - \theta_\infty) &\rightarrow (\eta - \eta_\pm, v - v_\pm, \theta - \theta_\infty) \quad \text{*слабо в} \\ &\quad L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^\pm)), \\ (\eta_t^\varepsilon, v_x^\varepsilon, \theta_x^\varepsilon) &\rightarrow (\eta_t, v_x, \theta_x) \quad \text{и} \quad v^\varepsilon v_x^\varepsilon \rightarrow w \quad \text{слабо в } L^2(Q), \\ \eta^\varepsilon &\rightarrow \eta \quad \text{и} \quad \rho^\varepsilon \rightarrow \rho \quad \text{сильно в } L^p(I_T), \quad 1 \leq p < \infty.\end{aligned}$$

Функция (η, v, θ) удовлетворяет оценкам теоремы 2 (но с w в роли vv_x).

Как следствие, $\rho^\varepsilon v^\varepsilon \rightarrow \rho v$ слабо в $L^p(I_T)$, $1 \leq p < 4$, а $\sigma^\varepsilon \rightarrow \sigma$ и $\rho^\varepsilon \theta_x^\varepsilon \rightarrow \rho \theta_x$ слабо в $L^p(I_T)$, $1 \leq p < 2$. С учетом уравнений задачи верны также оценки

$$\|v_t^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(I))} \leq K, \quad \|\theta_t^\varepsilon\|_{L^1(0,T;H^{-1}(I))} \leq K, \quad \|(\eta^\varepsilon \sigma^\varepsilon) t\|_{L^1(0,T;H^{-2}(I))} \leq K.$$

Поскольку и $\|\Delta_h v^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq K|h|$, $\|\Delta_h(\rho^\varepsilon v^\varepsilon)\|_{L^2(Q)} \leq K(\|\Delta_h \eta^0\|_{L^2} + |h|)$, $\sigma^\varepsilon v^\varepsilon = \eta^\varepsilon \sigma^\varepsilon \cdot \rho^\varepsilon v^\varepsilon$, в силу леммы 5.1 из [15] для квадратичных членов имеем

$$(v^\varepsilon)^2 \rightarrow v^2 \quad \text{и} \quad v^\varepsilon v_x^\varepsilon \rightarrow v v_x = w \quad \text{слабо в } L^2(I_T), \quad \sigma^\varepsilon v^\varepsilon \rightarrow \sigma v \quad \text{слабо в } L^p(I_T),$$

где $1 \leq p < 4/3$. Полученные предельные соотношения позволяют обосновать то, что (η, v, θ) – слабое решение из класса $\mathcal{A}$ задачи (1)–(4) (при этом, как и в [5], в дополнение к (7) надо использовать слабую форму уравнения энергии).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородной жидкости. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Кажихов А. В. // Сиб. матем. ж. 1982. Т. 23. № 1. С. 44–49.
3. Смагулов Ш. С., Дурмагамбетов А. А., Искендерова Д. А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 337–348.
4. Амосов А. А., Злотник А. А. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 1. С. 11–15.
5. Амосов А. А., Злотник А. А. // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 1. С. 3–16.
6. Fujita-Yashima H., Padula M., Novotný A. // Ricerche di Matematica. 1993. V. 42. № 2. P. 199–248.
7. Амосов А. А., Злотник А. А. // Изв. вузов. Матем. 1997. Т. 41. № 4. С. 3–19.
8. Злотник А. А., Амосов А. А. // Сиб. матем. ж. 1997. Т. 38. № 4. С. 767–789.
9. Злотник А. А., Амосов А. А. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 6. С. 835–846.
10. Serre D. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1986. V. 303. № 14. P. 703–706.
11. Jiang S., Zhang P. // Quart. Appl. Math. (to appear).
12. Hoff D. // J. Diff. Equations. 1992. V. 95. № 1. P. 33–74.
13. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
14. Амосов А. А., Злотник А. А. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 83–95.
15. Lions P. L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. V. 2. Compressible Models. Oxford: Clarendon Press, 1998.