Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Мамадалиев, Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями при наличии запаздывания, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 750–760

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 04:37:55

Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями при наличии запаздывания

Н. Мамадалиев

Задачи линейных дифференциальных игр преследования изучались многими авторами, которые послужили основой для исследования задачи преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. В настоящей работе получены достаточные условия для разрешимости линейной задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания.

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задачи. В n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ движется точка z согласно следующей системе линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^q$, h – фиксированное действительное число, A, B, C, D – постоянные матрицы, размерности которых $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$, соответственно, $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ – n, p, q -мерные векторные евклидовы пространства, соответственно. Функции $u(t), v(t)$ называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Управления $u(t), v(t)$, $0 \leq t < \infty$, выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих интегральным ограничениям

$$\|u(\cdot)\|_{L_2} \leq \rho, \quad \|v(\cdot)\|_{L_2} \leq \sigma, \quad (1.2)$$

где ρ, σ – неотрицательные константы.

В дальнейшем измеримые функции $u = u(t), v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие ограничениям (1.2), назовем *допустимыми* управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M в виде $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L , где L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$.) Начальным состоянием для системы (1.1) является n -мерная абсолютно непрерывная функция $z_0(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$. Преследование начинается в момент $t = 0$ из начального положения $z_0(\cdot) \in X$, где

$$X = \{z_0(t) : t \in [-h, 0], z_0(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M\}, \quad (1.3)$$

и считается законченным в момент $t = t(z_0(\cdot))$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M . Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы оттянуть окончание игры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что преследование может быть закончено из начального состояния $z_0(\cdot) \in X$, если существует положительное число $t = t(z_0(\cdot))$ такое, что при произвольном допустимом управлении $v(s)$, $0 \leq s \leq t$, убегающего можно выбрать такое допустимое управление $u(s)$, $0 \leq s \leq t$, преследователя, что решения уравнения (1.1) $z(t)$, $0 \leq t < \infty$, попадает на множество M за время, не превосходящее число t . При этом для построения управляющего вектора $u(t)$ в каждый момент времени t разрешается использовать значения $v(t)$ и $z(s)$, $t - h \leq s \leq t$.

Пусть τ – положительное число, $t \in [0, \tau]$, и $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, – допустимые управления. Тогда для решения уравнения (1.1) при начальном условии (1.3) по формуле Коши имеется следующее представление (см. [1]):

$$z(t) = K(t)z_0(0) + \int_{-h}^0 K(t-s-h)Bz_0(s)ds - \int_0^t K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)]ds, \quad (1.4)$$

где $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, – матричная функция, обладающая следующими свойствами:

- а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ;
- б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ;
- в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C[0, \tau]$;
- г) $K(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h) \quad (1.5)$$

при $0 < t \leq \tau$.

Существование и единственность матричной функции $K(\tau)$, удовлетворяющей условиям а)–г), могут быть доказаны обычным методом последовательного интегрирования уравнения (1.5).

2. Формулировка и доказательство основных результатов. Пусть $\alpha \in [0, \rho/\sigma)$ – произвольная константа, $\mu(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, – суммируемая с квадратом неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\tau \mu^2(t)dt \leq (\rho - \alpha\sigma)^2. \quad (2.1)$$

Через π обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L .

Пусть $F(t): L \rightarrow L$, $t \in [0, \tau]$, – матричная функция, полунепрерывно сверху зависящая от t , и M_2 выпуклое компактное множество такое, что $M_1 \ast M_2 \neq \emptyset$, $G(\tau) \overset{\ast}{\subset} M_2$ (для $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ считается $X \overset{\ast}{\subset} Y$, если $Y \ast X \neq \emptyset$).

Через $M^*(t) \subset L$, $0 \leq t \leq \tau$, обозначим произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию

$$\int_0^\tau M^*(t)dt \subset M_2 \ast G(\tau),$$

где множество $G(\tau)$ определяется следующим образом:

$$G(\tau) = \left\{ \int_0^\tau [E - F(\tau-t)]\pi K(\tau-t)Dv(t)dt : \|v(\cdot)\|_{L_2} \leq \sigma \right\},$$

$\ast$ означает геометрическую разность (см. [2]).

Пусть $M_3(\subset M_1 * M_2)$ – выпуклое замкнутое множество и $m \in M_3$. Введем следующие множества:

$$\widehat{w}(t, M^*(t)) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^q} \{[M^*(t) + \pi K(t)CS_{\alpha|v|+\mu(t)}] - F(t)\pi K(t)Dv\},$$

где пересечение берется по всем векторам $v \in \mathbb{R}^q$, $S_{\alpha|v|+\mu(t)}$ – p -мерный замкнутый шар радиуса $\alpha|v| + \mu(t)$ с центром в начале координат,

$$\widehat{W}(\tau) = \int_0^\tau \widehat{w}(t, M^*(t)) dt, \quad \widehat{W}(0) = M_1. \quad (2.2)$$

Зафиксируем начальное положение $z_0(\cdot) \in X$. Далее, введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t) dt - g(\tau),$$

где $g(\tau) \in \widehat{W}(\tau)$. В силу (2.2) существует измеримая по Борелю ветвь $w(t) \in \widehat{w}(t, M^*(t))$, $0 \leq t \leq \tau$ (см. [3]), такая, что имеет место равенство $g(\tau) = \int_0^\tau w(\tau - t) dt$. Зафиксируем его. Тогда функция $\xi[\tau, z_0(\cdot)]$ имеет вид

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t) dt - \int_0^\tau w(\tau - t) dt.$$

Используя результаты работы [4], легко показать, что если для некоторого положительного τ $\xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, то разрешима задача преследования к моменту τ . Поэтому в дальнейшем предполагается, что $\xi[\tau, z_0(\cdot)] \neq 0$ для всех $\tau \geq 0$.

Определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot), \tau, t, v)$ следующим образом:

$$\lambda(z_0(\cdot), \tau, t, v) = \begin{cases} \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda[\xi[\tau, z_0(\cdot)] - m] \in M^*(\tau - t) + \pi K(\tau - t)CS_{\alpha|v|+\mu(\tau-t)} - F(\tau - t)\pi K(\tau - t)Dv + w(\tau - t)\} \\ \tau^{-1} \end{cases} \begin{matrix} \text{при } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \neq 0, \\ \text{при } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0. \end{matrix}$$

Будем считать, что для игры (1.1) выполнено следующее предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ существуют число $T = T(z_0(\cdot)) > 0$, матричная функция $F(t)$, $0 \leq t \leq T$, функция $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, отображение $M^*(t)$, $0 \leq t \leq T$, такие, что

- а) множество $\widehat{w}(t, M^*(t))$ непусто для всех $t \in [0, T]$;
- б) справедливо неравенство

$$1 - \inf_{\|v(\cdot)\| \leq \sigma} \int_0^T \lambda(z_0(\cdot), T, t, v(t)) dt < 0. \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия предположения 1, то в игре (1.1), (1.2) из заданного начального положения $z_0(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $\tau = T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \leq t < \infty$, рассмотрим функцию $\rho(t; v(s), 0 \leq s \leq t)$, $0 \leq t \leq T$, определенную следующим образом:

$$\rho(t; v(s), 0 \leq s \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) ds.$$

Утверждается, что существует момент времени $t = t' \in [0, T]$ такой, что $\rho(t'; v(s), 0 \leq s \leq t') = 0$. Действительно, в противном случае

$$\begin{aligned} 0 < \rho(T; v(s), 0 \leq s \leq T) &= 1 - \int_0^T \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) ds \\ &\leq 1 - \inf \int_0^T \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) ds, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (2.3). Таким образом, пусть $\rho(t'; v(s), 0 \leq s \leq t') = 0$. С учетом этого факта выберем функции $u(s) \in S_{\alpha|v|+\mu(T-s)}$, отображение $m^*(s) \in M^*(s)$, которое в момент времени $s \in [0, t']$ определяется как решение уравнения

$$\begin{aligned} m^*(T-s) + \pi K(T-s)Cu(s) - F(T-s)\pi K(T-s)Dv(s) \\ = w(T-s) + \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s))(\xi[T, z_0(\cdot)] - m), \end{aligned} \quad (2.4)$$

а в момент времени $s \in (t', T]$ – как решение уравнения

$$m^*(T-s) + \pi K(T-s)Cu(s) - F(T-s)\pi K(T-s)Dv(s) = w(T-s). \quad (2.5)$$

В силу предположения 1 существует одно или много решений уравнения (2.4), (2.5). Согласно утверждению п. 2 [4] функция $\lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s))$ является измеримой функцией по s при фиксированных $T, z_0(\cdot) \in X$. Следовательно, в силу теоремы Филиппова (см. п. 7 [4]) уравнения (2.4), (2.5) разрешимы в классе измеримых функций. Покажем, что при таком способе управления параметром $u(s)$ преследователь может гарантировать окончание преследования к моменту T .

Используя формулу Коши (см. (1.4)) для решения $z(t)$ (после его проектирования на L), приходим к следующему соотношению:

$$\pi z(t) = \pi K(t)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(t-s-h)Bz_0(s) ds - \int_0^t \pi K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)] ds. \quad (2.6)$$

Прибавляя и вычитая величину $\int_0^T w(T-s) ds$, и учитывая закон выбора управлений (2.4), (2.5), из формулы (2.6) при $t = T$ получаем

$$\begin{aligned} \pi z(T) &= \pi K(T)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(T-s-h)Bz_0(s) ds \\ &\quad - \int_0^T [\pi K(T-s)Cu(s) - F(T-s)\pi K(T-s)Dv(s)] ds + \int_0^T w(T-s) ds \\ &\quad + \int_0^T [E - F(T-s)]\pi K(T-s)Dv(s) ds - \int_0^T w(T-s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \xi[T, z_0(\cdot)] + \int_0^T w(T-s) ds \\
&\quad - \int_0^{t'} [w(T-s) - m^*(T-s) + \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s))(\xi[T, z_0(\cdot)] - m)] ds \\
&\quad - \int_{t'}^T [w(T-s) - m^*(T-s)] ds + \int_0^T [E - F(T-s)] \pi K(T-s) Dv(s) ds \\
&= \xi[T, z_0(\cdot)] + \int_0^T w(T-s) ds - \int_0^{t'} w(T-s) ds \\
&\quad - \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) \xi[T, z_0(\cdot)] ds + \int_0^{t'} m^*(T-s) ds \\
&\quad + \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) m ds - \int_{t'}^T w(T-s) ds + \int_{t'}^T m^*(T-s) ds \\
&\quad + \int_0^T [E - F(T-s)] \pi K(T-s) Dv(s) ds \\
&= \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) m ds + \int_0^T m^*(T-s) ds \\
&\quad + \int_0^T [E - F(T-s)] \pi K(T-s) Dv(s) ds, \tag{2.7}
\end{aligned}$$

ибо, как установлено выше,

$$\begin{aligned}
&\xi[T, z_0(\cdot)] - \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) \xi[T, z_0(\cdot)] ds \\
&= \left[1 - \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) ds \right] \xi[T, z_0(\cdot)] = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, из (2.7) имеем

$$\begin{aligned}
\pi z(T) &= \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) m ds + \int_0^T m^*(T-s) ds \\
&\quad + \int_0^T [E - F(T-s)] \pi K(T-s) Dv(s) ds \\
&\in \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), T, s, v(s)) M_3 ds + \int_0^T M^*(T-s) ds \\
&\quad + G(T) \subset M_3 + [M_2 * G(T)] + G(T) \subset [M_1 * M_2] + M_2 \subset M_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ имеет место включение $\pi z(T) \in M_1$; это эквивалентно тому, что $z(T) \in M$, т.е. преследование заканчивается за время T . Для полного доказательства теоремы осталось показать, что управление $u(s)$, $0 \leq s < \infty$, является допустимым (см. [5]). Действительно, в силу (2.1) и неравенства Коши–Буняковского, справедлива следующая оценка:

$$\int_0^\infty |u(s)|^2 dt \leq \alpha^2 \int_0^T |v(s)|^2 ds + 2\alpha \int_0^T \mu(T-s) |v(s)| ds$$

$$+ \int_0^T \mu^2(s) ds \leq \left(\alpha\sigma + \sqrt{\int_0^T \mu^2(s) ds} \right)^2 \leq \rho^2,$$

что и означает допустимость управления $u(s)$, $0 \leq s < \infty$. Теорема 1 доказана полностью.

Пусть $\delta \in [0, 1)$ – некоторая константа. Через $M(t) \subset L$, $0 \leq t \leq \tau$, обозначим произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию

$$\int_0^\tau M(t) dt \subset \delta M_1.$$

Введем следующие множества:

$$\widehat{w}(t, M(t)) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^q} \{ [M(t) + \pi K(t) C S_{\alpha|v| + \mu(t)}] - F(t) \pi K(t) D v \},$$

где $S_{\alpha|v| + \mu(t)}$ – p -мерный замкнутый шар радиуса $\alpha|v| + \mu(t)$ с центром в начале координат,

$$\widehat{W}(\tau) = \int_0^\tau \widehat{w}(t, M(t)) dt, \quad \widehat{W}(0) = \delta M_1.$$

Зафиксируем начальное положение $z_0(\cdot) \in X$. Положим

$$\zeta[\tau, \eta, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau) z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h) B z_0(t) dt + \eta - f(\tau),$$

где $f(\tau) \in \widehat{W}(\tau)$. Далее, в соответствии с определением интеграла $\int_0^\tau \widehat{w}(t, M(t)) dt$ существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $w(t) \in \widehat{w}(t, M(t))$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что выполнено равенство $f(\tau) = \int_0^\tau w(\tau - t) dt$; зафиксируем его. Тогда функция $\zeta[\tau, \eta, z_0(\cdot)]$ имеет вид

$$\zeta[\tau, \eta, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau) z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h) B z_0(t) dt + \eta - \int_0^\tau w(\tau - t) dt.$$

Для произвольных векторов $\eta \in L$, $v \in \mathbb{R}^q$ при $0 \leq t \leq \tau$ определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau, t, v)$ следующим образом:

$$\lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau, t, v) = \begin{cases} \sup \{ \lambda \geq 0 : \lambda \zeta[\tau, \eta, z_0(\cdot)] \in [M(\tau - t) + \pi K(\tau - t) C S_{\alpha|v| + \mu(\tau - t)}] - F(\tau - t) \pi K(\tau - t) D v - w(\tau - t) \} \\ \tau^{-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{при } \zeta[\tau, \eta, z_0(\cdot)] \neq 0, \\ \text{при } \zeta[\tau, \eta, z_0(\cdot)] = 0. \end{matrix} \quad (2.8)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ существуют число $T = T(z_0(\cdot)) > 0$, матричная функция $F(t)$, $0 \leq t \leq 0$, отображение $M(t)$, $0 \leq t \leq 0$, такие, что

а) множество $\widehat{w}(t, M(t))$ непусто для всех $t \in [0, T]$;

б) справедливо неравенство

$$\inf_{\|v(\cdot)\| \leq \sigma} \int_0^T \lambda(z_0(\cdot), \eta, T, t, v(t)) dt > 1;$$

в) для допустимого управления $v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, убегающего игрока существует вектор $\eta \in L$ такой, что выполнено включение

$$\int_0^T [E - F(T-t)] \pi K(T-t) Dv(t) dt \in \eta + (1-\delta)M_1.$$

ТЕОРЕМА 2. Если для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ выполнены условия предположения 2, то в игре (1.1), (1.2) из заданного начального положения $z_0(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $\tau = T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для игры (1.1) для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ выполнены условия предположения 2. Согласно утверждению п. 2. (см. [4]) можно показать, что функция $\lambda(z_0(\cdot), \eta, T, t, v)$, определенная соотношением (2.8), является полунепрерывной сверху по v при фиксированном t и измеримой по Борелю по t при фиксированном v (см. [4]). Теперь для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \leq t < \infty$, определим функцию $\rho(t; v(s), 0 \leq s \leq t)$, $0 \leq t \leq T$, следующим образом:

$$\rho(t; v(s), 0 \leq s \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_0(\cdot), \eta, T, s, v(s)) ds.$$

Далее, пусть t_1 первый момент времени, когда выполняется равенство $\rho(t_1; v(s), 0 \leq s \leq t_1) = 0$. (В силу п. а) предположения 2 такой момент существует для любого начального положения $z_0(\cdot) \in X$.)

Если

$$\rho(t; v(s), 0 \leq s \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_0(\cdot), \eta, T, s, v(s)) ds > 0$$

для всех $0 \leq t \leq T$, то полагаем $t_1 = T$. Тогда функции $u(s) \in S_{\alpha|v|+\mu(T-t)}$, $m(s) \in M(s)$ определяются в момент времени $s \in [0, t_1]$ как решение уравнения

$$\begin{aligned} m(T-s) + \pi K(T-s)Cu(s) - F(T-s)\pi K(T-s)Dv(s) \\ = w(T-s) + \lambda(z_0(\cdot), T, \eta, s, v(s))\zeta[T, \eta, z_0(\cdot)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

а в момент времени $s \in (t_1, T]$ функции $u(s) \in S_{\alpha|v|+\mu(T-t)}$, $m(s) \in M(s)$ определяются как решение уравнения

$$m(T-s) + \pi K(T-s)Cu(s) - F(T-s)\pi K(T-s)Dv(s) = w(T-s). \quad (2.10)$$

Далее, в силу предположения 2 существует одно или много решений уравнений (2.9), (2.10). Через $\Omega_1(s, v)$, $\Omega_2(s, v)$ обозначим множества решений уравнений (2.9), (2.10), соответственно. В силу (2.8) и из $w(t) \in \widehat{w}(t, M(t))$, $0 \leq t \leq T$, следует, что множества $\Omega_1(s, v)$, $\Omega_2(s, v)$ непусты и являются компактами. Через

$$q^1(s, v) = \text{col}[m(s, v), U_1(s, v)], \quad q^2(s, v) = \text{col}[m(s, v), U_2(s, v)]$$

обозначим решения уравнений (2.9), (2.10) с наименьшими в лексикографическом смысле компонентами $U_1(s, v)$, $U_2(s, v)$, $m(s, v)$, $s \in [0, T]$. По свойству числовой

функции $\lambda(z_0(\cdot), \eta, T, s, v)$ и С-свойству многозначных отображений (см. [3]) можно показать (см. [4]), что функции $U_1(s, v(s))$, $U_2(s, v(s))$, $m(s, v(s))$, $s \in [0, T]$, являются B -измеримыми. Значит, для произвольной измеримой функции $v(s)$, $0 \leq s < \infty$, $\|v(\cdot)\|_{L_2} \leq \sigma$, функции $U_1(s, v)$, $U_2(s, v)$, $m(s, v)$, $s \in [0, T]$, измеримы. Из уравнений (2.9), (2.10) видно, что такие решения единственны.

Таким образом, управление преследователя на отрезке $[0, T]$ определяется следующим образом. Если $\rho(t; v(s), 0 \leq s \leq t)$, $0 \leq t \leq T$, положительно в момент времени $t \in [0, T]$, то $u(t) = U_1(t, v(t))$. При $t \in (t_1, T]$ положим $u(t) = U_2(t, v(t))$. Далее, при $t > T$ положим $u(t) = 0$. Теперь покажем, что при таком способе управления параметром $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, преследователь гарантирует завершение преследования за время $T = T(z_0(\cdot))$.

Пусть игроками выбраны допустимые управления $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t \leq T$. Тогда, подставив эти управления в правую часть уравнения (1.1), из формулы Коши для решения $z(t)$, $0 \leq t < \infty$, после его проектирования на L (см. (1.4)) получаем

$$\pi z(t) = \pi K(t)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(t-s-h)Bz_0(s)ds - \int_0^t \pi K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)]ds. \quad (2.11)$$

Учитывая уравнения (2.9), (2.10) и считая $t = T$, преобразуем (2.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi z(T) &= \pi K(T)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(T-s-h)Bz_0(s)ds \\ &\quad + \int_0^T w(T-s)ds - \int_0^T w(T-s)ds \\ &\quad - \int_0^T [\pi K(T-s)Cu(s) - F(T-s)\pi K(T-s)Dv(s)]ds \\ &\quad + \int_0^T [E - F(T-s)]\pi K(T-s)Dv(s)ds \\ &= \pi K(T)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(T-s-h)Bz_0(s)ds \\ &\quad - \int_0^{t_1} [w(T-s) - m(T-s) + \lambda(z_0(\cdot), \eta, T, s, v(s))\zeta[T, \eta, z_0(\cdot)]]ds \\ &\quad - \int_{t_1}^T [w(T-s) - m(T-s)]ds + \int_0^T [E - F(T-s)]\pi K(T-s)Dv(s)ds \\ &\quad + \int_0^T w(T-s)ds - \int_0^T w(T-s)ds \\ &= \left(\pi K(T)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(T-s-h)Bz_0(s)ds - \int_0^T w(T-s)ds \right) \\ &\quad \times \left(1 - \int_0^{t_1} \lambda(z_0(\cdot), \eta, T, s, v(s))ds \right) \\ &\quad - \int_0^{t_1} \lambda(z_0(\cdot), \eta, T, s, v(s))\eta ds + \int_0^T m(T-s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T [E - F(T-s)]\pi K(T-s)Dv(s) ds \\
& = -\eta \int_0^{t_1} \lambda(z_0(\cdot), \eta, T, s, v(s)) ds + \int_0^T m(T-s) ds \\
& \quad + \int_0^T [E - F(T-s)]\pi K(T-s)Dv(s) ds \\
& = -\eta + \int_0^T [E - F(T-s)]\pi K(T-s)Dv(s) ds + \int_0^T m(T-s) ds.
\end{aligned}$$

В силу п. б) предположения 2 выполнено включение

$$-\eta + \int_0^T [E - F(T-s)]\pi K(T-s)Dv(s) ds \in (1 - \delta)M_1. \quad (2.12)$$

Кроме того, имеет место включение

$$\int_0^T m(T-s) ds \in \int_0^T M(T-s) ds \subset \delta M_1. \quad (2.13)$$

Отсюда и из (2.12), (2.13) получаем, что $\pi z(T) \in M_1$. Последнее включение эквивалентно включению $z(T) \in M$. Следовательно, преследование заканчивается за время T . Теорема 2 доказана.

Для иллюстрации условия теорем 1–2 рассмотрим пример простого преследования.

3. Пример. Пусть уравнения движения преследователя и убегающего имеют вид [6], [7]

$$\dot{z}(t) = z(t-h) - u(t) + v(t), \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

Здесь $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$; h ($\text{const} \geq 0$) – величина запаздывания; $u(t)$ – управление преследователя, $v(t)$ – управление убегающего, $\|u(\cdot)\|_{L_2} \leq \rho$, $\|v(\cdot)\|_{L_2} \leq \sigma$. Начальным состоянием для системы (3.1) является $X = \{z_0(t) : t \in [-h, 0]\}$. Терминальное множество M имеет вид: $M = M_0 + M_1$, где $M_0 = \{z : z = 0\}$, $M_1 = \{z : |z| \leq l\}$. Преследование считается завершённым, если в некоторый конечный момент времени t , $\|z(t)\| \leq l$; ρ , σ , l – положительные константы. Пусть T – произвольное положительное число, $\alpha \in [0, \rho/\sigma]$ – некоторая константа. Далее, решением уравнения (3.1) при начальном условии $z_0(t) \in X$, $-h \leq t \leq 0$, и заданных управлениях $u(s)$, $v(s)$, $0 \leq s \leq t$, является функция

$$z(t) = \pi K(t)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(t-s-h)z_0(s) ds - \int_0^t \pi K(t-s)(u(s) - v(s)) ds.$$

Матричная функция $K(t)$ имеет вид $K(t) = \eta(t)E$, где

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -h, \\ \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(t+h-j)^j}{j!} & \text{при } \nu-1 \leq t \leq \nu, \nu = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Матрицу $F(t)$ и множества M_2 , M_3 , $M^*(t)$, $G(T)$, $t \in [0, T]$, определим следующим образом: $F(t) = \alpha^2 E$, $M_2 = l_1 S$, $M_3 = \{0\}$, $M^*(t) = a(t)M_2$, $t \in [0, T]$, $a(t)$ – суммируемая на $[0, T]$ неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию $\int_0^T a(t) dt = 1$ (например, $a(t) = 1/T$),

$$G(T) = (1 - \alpha^2) \sqrt{\int_0^T \eta^2(t) dt} \sigma S,$$

E – единичная матрица порядка n , S – единичный n -мерный замкнутый шар радиуса l_1 с центром в начале координат. Будем предполагать, что выполнены неравенства

$$l > l_1, \quad (1 - \alpha^2) \sqrt{\int_0^T \eta^2(t) dt} \sigma < l_1. \quad (3.2)$$

Положим

$$\mu(t) = (\rho - \alpha\sigma)\eta(t) \left(\sqrt{\int_0^T \eta^2(T-t) dt} \right)^{-1}.$$

Далее, положим $m = 0$, $w(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Тогда для вектора $\xi[T, z_0(\cdot)]$ справедливо равенство

$$\xi[T, z_0(\cdot)] = \pi\eta(T)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi\eta(T-t-h)Bz_0(t) dt.$$

Проводя вычисления для игры (3.1), получаем

$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\xi[T, z_0(\cdot)] \in a(T-t)l_1S + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))S - \eta(T-t)v$$

или

$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\xi[T, z_0(\cdot)] + \eta(T-t)v \in a(T-t)l_1S + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))S.$$

После элементарных вычислений приходим к следующему уравнению относительно $\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)$:

$$\begin{aligned} \lambda^2(z_0(\cdot), T, t, v)|\xi[T, z_0(\cdot)]|^2 + 2\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\eta(T-t)(\xi[T, z_0(\cdot)], v) + \eta^2(T-t)|v|^2 \\ = [a(T-t)l_1 + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))]^2. \end{aligned}$$

Следовательно, если $\xi[T, z_0(\cdot)] \neq 0$, то для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ функция $\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)$ имеет следующий вид:

$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v) = \frac{1}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|} \left[-\eta(T-t) \left(\frac{\xi[T, z_0(\cdot)]}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}, v \right) \sqrt{A^2 + B^2|\xi[T, z_0(\cdot)]|^2} \right],$$

где

$$\begin{aligned} A^2 &= \eta^2(T-t) \left(\frac{\xi[T, z_0(\cdot)]}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}, v \right)^2, \\ B^2 &= [a(T-t)l_1 + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))]^2 - \eta^2(T-t)|v|^2. \end{aligned}$$

Отсюда для любых $v \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v) \geq \frac{\eta(T-t)\mu(T-t)}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}.$$

Следовательно, если $\rho > \alpha\sigma$, то условия предположения 1 выполнены для начального положения $z_0(\cdot) \in X$, а число $T > 0$ определяется как первый момент времени, когда выполняется следующее равенство:

$$\left| \pi\eta(T)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi\eta(T-t-h)z_0(t) dt \right| = (\rho - \alpha\sigma) \sqrt{\int_0^T \eta^2(t) dt}.$$

Таким образом, если выполнены неравенства $\rho > \alpha\sigma$ и (3.2) то выполнены условия теорем 1 и 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Беллман, К. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Наука, М., 1967.
- [2] Л. С. Понтрягин, *Избранные научные труды. Т. 2. Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры*, Наука, М., 1988.
- [3] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977.
- [4] Н. Л. Григоренко, *Математические методы управления несколькими динамическими процессами*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1990.
- [5] Н. В. Цветкова, *Линейная игра преследования с геометрическими и интегральными ограничениями*, Деп. в ВИНТИ № 51-60, 1981.
- [6] А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий, “Групповое преследование в дифференциально-разностных играх”, *Дифференц. уравнения*, **20:5** (1984), 802–810.
- [7] М. С. Никольский, “Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний”, *Дифференц. уравнения*, **8:2** (1972), 260–267.
- [8] Е. С. Половинкин, “Структура дифференциальных игр, описываемых уравнениями с запаздывающим аргументом”, *Кибернетика*, **6** (1981), 87–89.

Н. Мамадалиев

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
г. Ташкент
E-mail: M_numana59@mail.ru

Поступило

08.10.2008

Исправленный вариант

12.04.2011