Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, Я. С. Наседкина, Условия принадлежности двумерной поверхности из E^5 гипертворе или гипертворости, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 163–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:34:55

Условия принадлежности двумерной поверхности из E^5 гиперсфере или гиперплоскости

Ю. А. Аминов, Я. С. Наседкина

В статье доказываются две теоремы о принадлежности двумерной поверхности в пятимерном евклидовом пространстве гиперсфере и одна теорема о принадлежности поверхности гиперплоскости. Введены понятия гиперболических и эллиптических областей на поверхности. Условия теорем выражены в терминах поведения плоскости эллипса нормальной кривизны поверхности и некоторых краевых условий. Построен пример, показывающий существенность краевых условий.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm6347

Хорошо известны условия сферичности кривой в трехмерном пространстве в терминах кривизны и кручения, заданных как функции длины дуги [1].

Условие принадлежности кривой в E^n гиперсфере сформулировано в задаче в [1] и подробно рассмотрено в [2; глава 1]. Условие сферичности сводится к одному дифференциальному уравнению на кривизны кривой.

Условие принадлежности двумерной поверхности F^2 сфере в четырехмерном евклидовом пространстве сформулировано в виде теоремы в [2; с. 159]. Формулировка дана в терминах эллипса нормальной кривизны: для того чтобы поверхность была сферической, необходимо, чтобы эллипс нормальной кривизны в каждой точке x поверхности вырождался в отрезок прямой, находящейся на постоянном расстоянии β от этой точки. Если гауссова кривизна $K \neq \beta^2$, то это условие является и достаточным.

В [3] показано, что требование $K \neq \beta^2$ существенно. А именно, в [3] построен пример поверхности (не замкнутой), у которой эллипс нормальной кривизны вырожден в отрезок прямой, находящейся на постоянном расстоянии β от точки, а $K = \beta^2$, и показано, что такая поверхность не принадлежит сфере.

Вопрос сферичности для n -мерных поверхностей рассматривался и в работах [4], [5] с дополнительными условиями на замкнутость поверхности, на вектор средней кривизны, ν -омбиличность и с ограничениями на нормальное поле.

Работа выполнена при поддержке НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований 2012 г.

В этой статье мы даем условия принадлежности поверхности F^2 в пространстве E^5 сфере $S^4 \subset E^5$, а также гиперплоскости E^4 , используя понятие эллипса нормальной кривизны.

Напомним его определение для $F^2 \subset E^n$. В точке $x \in F^2$ каждому касательному направлению e соответствует вектор нормальной кривизны $k_N(e)$, расположенный в нормальном пространстве N . Пусть начало его помещено в точку x . Конец этого вектора задает точку M . При вращении направления e в касательной плоскости точка M опишет некоторую замкнутую кривую – индикатрису нормальной кривизны. Нетрудно показать, что эта кривая плоская и является эллипсом, может быть, вырожденным в отрезок прямой (это свойство имеет место для всех поверхностей в E^3) или в точку. Напомним, что эта кривая лежит в нормальном пространстве.

Следующий рисунок (рис. 1) относится к теореме 1.

Рис. 1

Пусть нормали выбраны таким образом, что n_1 и n_2 параллельны осям эллипса нормальной кривизны, а n_3 перпендикулярна плоскости этого эллипса. Введем в нормальном пространстве N^3 координаты с началом в точке x поверхности и с так выбранными ортами n_1, n_2, n_3 . Пусть α, β, γ – координаты центра эллипса, a и b – его полуоси. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Если поверхность F^2 принадлежит сфере $S^4 \subset E^5$ радиуса R , то в каждой ее точке x плоскость эллипса нормальной кривизны находится на постоянном расстоянии от точки x , равном $1/R$.*

Заметим, что в отличие от поверхностей, лежащих в $S^3 \subset E^4$, у поверхностей, лежащих в $S^4 \subset E^5$, эллипс нормальной кривизны не обязан вырождаться в отрезок прямой. Например, известная поверхность Веронезе, лежащая в $S^4 \subset E^5$, имеет в каждой точке в качестве эллипса нормальной кривизны окружность постоянного радиуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть F^2 принадлежит сфере $S^4 \subset E^5$ и $r = r(u_1, u_2)$ – ее радиус-вектор. Выберем систему координат в E^5 так, чтобы центр сферы находился в точке O . Тогда $r^2 = R^2$. Дифференцируя это уравнение по u_i , получим $(r, r_{u_i}) = 0$, $(r_{u_j}, r_{u_i}) + (r, r_{u_i u_j}) = 0$; заметим, что $(r_{u_i}, r_{u_j}) = g_{ij}$ – коэффициенты первой квадратичной формы. Из уравнения $(r, r_{u_i}) = 0$ следует, что

r является одной из нормалей поверхности F^2 . Пусть $n_3 = r/R$. Выберем n_1, n_2 ортогонально n_3 . Из второго уравнения получим коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\Pi^3 = (d^2 r, n^3) = L_{ij}^3 du^i du^j,$$

по отношению к нормали n_3 . Тогда $L_{ij}^3 = -g_{ij}/R$.

Следовательно, величина проекции векторов нормальной кривизны k_n поверхности F^2 на n_3

$$(k_n, n_3) = \frac{L_{ij}^3 du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j} = -\frac{1}{R}$$

постоянна.

Таким образом, плоскость индикатрисы нормальной кривизны находится на постоянном расстоянии $1/R$ от соответствующей точки x поверхности. Теорема доказана.

Обозначим через $\bar{x}$ проекцию точки x на плоскость эллипса нормальной кривизны. Обратную теорему сформулируем и докажем при дополнительных условиях. В дальнейшем будем различать три типа поверхностей:

- 1) точка $\bar{x}$ лежит внутри этого эллипса; назовем этот тип *эллиптическим* ($\Delta = a^2\beta^2 + \alpha^2b^2 - a^2b^2 < 0$);
- 2) точка $\bar{x}$ лежит на эллипсе (*параболический* тип $\Delta = 0$);
- 3) точка $\bar{x}$ лежит вне эллипса (*гиперболический* тип $\Delta > 0$).

Рассмотрим поверхность гиперболического типа.

Определим на поверхности инвариантно-геометрическим образом некоторую сеть кривых. Так как в этом случае точка x проектируется на плоскость эллипса нормальной кривизны вне эллипса, то через точку $\bar{x}$ можно провести две касательные прямые к эллипсу. Точки касания обозначим через P и Q . Каждой из этих точек будет соответствовать свой вектор нормальной кривизны.

Рассмотрим вектор нормальной кривизны с началом в точке x и концом в точке P . Обозначим его через k_{nP} . В касательной плоскости к поверхности этому вектору соответствует некоторое направление такое, что вектор нормальной кривизны для этого направления совпадает с k_{nP} . Рассмотрим такое направление в каждой точке на поверхности (в окрестности точки x); получим поле направлений. Это поле порождает некоторое семейство интегральных кривых. Аналогично, с помощью вектора нормальной кривизны с концом в точке Q получим другое семейство кривых. Эти два семейства образуют на поверхности сеть кривых. Назовем эту сеть *специальной гиперболической сетью*. В следующей теореме наложено условие на область на поверхности и на часть края (рис. 2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть поверхность $F^2 \subset E^5$ с невырожденными эллипсами нормальной кривизны класса C^4 принадлежит гиперболическому типу. Пусть D – треугольная область на F^2 , ограниченная двумя кривыми η_1 и η_2 из разных семейств специальной гиперболической сети, выходящими из одной точки, и некоторой кривой τ класса C^2 , пересекающей трансверсально кривые обоих семейств специальной гиперболической сети.

Пусть для каждой точки x области D плоскость эллипса нормальной кривизны находится на постоянном расстоянии γ от точки x .

Пусть выполняются следующие краевые условия на τ :

Рис. 2

- а) нормальные к поверхности прямые, взятые во всех точках кривой τ и ортогональные к плоскостям эллипсов нормальной кривизны, пересекаются в одной точке;
- б) если n_3 – единичное поле нормалей к F^2 , ортогональных к плоскостям эллипсов нормальной кривизны, то для любого нормального к F^2 поля n на τ имеем равенство $(n_{3s}, n)|_\tau = 0$, где $\partial/\partial s$ – дифференцирование по направлению, ортогональному к τ .

Тогда область D поверхности F^2 принадлежит сфере S^4 радиуса $1/\gamma$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, покажем, что если F^2 лежит в сфере $S^4 \subset E^5$ и эллипс нормальной кривизны не вырожден, то условия а) и б) выполнены во всех точках любой кривой $\tau \subset F^2$.

Пусть начало координат расположено в центре сферы $S^4 \subset E^5$ радиуса R и τ – любая кривая на F^2 . Тогда вектор $n_3 = r/R$ является нормалью к F^2 . Из доказательства теоремы 1 следует, что n_3 ортогонально плоскости эллипса нормальной кривизны, т.е. прямая, идущая из центра сферы в направлении n_3 , ортогональна плоскости этого эллипса (условие а) выполнено). Для производной $\partial/\partial s$ в любом касательном к F^2 направлении имеем $(n_{3s}, n) = (r_s, n)/R = 0$ в силу постоянства R (условие б) выполнено.)

ЗАМЕЧАНИЕ. Из условия а) следует, что кривая τ лежит на сфере и касательная полоса вдоль τ касается этой сферы.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Сначала докажем две леммы.

ЛЕММА 1. Если плоскость эллипса находится на постоянном расстоянии γ от точки поверхности x и коэффициенты кручения $\mu_{\alpha 3/i}$ в области D равны нулю, то поверхность принадлежит сфере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию леммы $\mu_{13/1} \equiv 0$, $\mu_{23/1} \equiv 0$, $\mu_{13/2} \equiv 0$, $\mu_{23/2} \equiv 0$, то разложение Вейнгартена примет вид

$$n_{3u_i} = -L_{ij}^3 g^{jk} r_{u_k} = \gamma r_{u_i},$$

следовательно, $n_3 = c + \gamma r$, где c – постоянный вектор. Радиус-вектор поверхности удовлетворяет уравнению сферы

$$\left(r + \frac{c}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Из условий а) и б) теоремы 2 следует, что на кривой τ коэффициенты кручения $\mu_{\alpha 3/i}$ равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим радиус-вектор кривой τ : $r = r_0 + \rho$, где r_0 – некоторый постоянный вектор, идущий из начала координат в точку пересечения нормальных прямых в условии а), и ρ – вектор, исходящий из этой точки в точку кривой τ . Введем координаты (u^1, u^2) на F^2 так, что u^1 – параметр на τ , а u^2 изменяется в направлении, трансверсальном к τ . Вектор ρ коллинеарен n_3 , т.е. $\rho = \lambda n_3$. Учитывая, что $(n_3, \rho_{u^1}) = 0$, получим

$$(n_3, (\lambda n_3)_{u^1}) = \lambda_{u^1} + \lambda(n_3, n_{3u^1}) = 0.$$

Из последнего равенства следует $\lambda_{u^1} = 0$, или $\rho^2 = \lambda^2 = \text{const}$. Таким образом получили, что кривая τ сферическая. Можем записать, что $n_3 = \rho/\lambda$, и коэффициенты кручения поверхности на кривой имеют вид

$$\begin{aligned}\mu_{13/1} &= \left(\left(\frac{\rho}{\lambda} \right)_{u^1}, n_1 \right) = \frac{1}{\lambda} (\rho_{u^1}, n_1) = 0, \\ \mu_{23/1} &= \left(\left(\frac{\rho}{\lambda} \right)_{u^1}, n_2 \right) = \frac{1}{\lambda} (\rho_{u^1}, n_2) = 0.\end{aligned}$$

Из условия б) следует, что

$$(n_{3u^2}, n_1) = \mu_{13/2} = 0, \quad (n_{3u^2}, n_2) = \mu_{23/2} = 0.$$

Таким образом, на кривой τ все коэффициенты $\mu_{\alpha 3/i} = 0$. Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Покажем, что из условий теоремы 2 следует равенство нулю коэффициентов кручения $\mu_{\alpha 3/i}$ во всей области D . Тогда из леммы 1 будет следовать утверждение теоремы 2.

Для этого установим, что $\mu_{\alpha 3/i}$ удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, тип которого в каждой точке $x \in F^2$ определяется знаком Δ .

Пусть плоскость индикатрисы нормальной кривизны в каждой точке x поверхности находится на постоянном расстоянии γ от точки x (рис. 2). Пусть n_3 перпендикулярен плоскости эллипса нормальной кривизны, а n_1 и n_2 определяют плоскость эллипса. Проведем через точку $\bar{x}$ прямую на этой плоскости так, чтобы она не пересекала эллипс. Нормаль n_1 направим ортогонально к построенной прямой, причем в ту полуплоскость, где лежит эллипс. Нормаль n_2 направим по прямой так, чтобы система координат была правой. Проекция вектора нормальной кривизны на n_1 есть $X = L_{ij}^1 du^i du^j / ds^2$, а на n_2 – это $Y = L_{ij}^2 du^i du^j / ds^2$. В силу выбора нормали n_1 форма $\Pi^1 = L_{ij}^1 du^i du^j > 0$, если $(du^1)^2 + (du^2)^2 \neq 0$. Поэтому $L_{ii}^1 \neq 0$,

$i = 1, 2$. Так как эллипс нормальной кривизны не вырожден, то $L_{ij}^1 du^i du^j / ds^2$ не имеет омбилических точек, т.е. в каждой точке есть два главных направления, ортогональных друг другу. Следовательно, во всей области определена сеть линий кривизны формы Π^1 по отношению к ds^2 , которую примем за координатную. Координаты на поверхности по прежнему будем обозначать u^1, u^2 . В этих координатах матрицы коэффициентов обеих форм Π^1 и ds^2 имеют диагональный вид. Поэтому можно положить $L_{12}^1 = 0$. Так как эллипс нормальной кривизны не вырожден, то $L_{12}^2 \neq 0$.

Поведение поверхности F^2 в E^5 описывается коэффициентами первой квадратичной формы, тремя видами коэффициентов вторых квадратичных форм L_{ij}^σ и коэффициентами кручения $\mu_{\alpha\beta/i}$. Они связаны между собой системой уравнений Гаусса–Кодацци–Риччи [2; глава 4, с. 99]. По условию теоремы $\gamma = \text{const}$. Запишем уравнение Кодацци

$$L_{ij,k}^\sigma - L_{ik,j}^\sigma = \mu_{\tau\sigma/k} L_{ij}^\tau - \mu_{\tau\sigma/j} L_{ik}^\tau.$$

Здесь запятая обозначает ковариантную производную. Так как L_{ij}^3 пропорциональны метрическому тензору g_{ij} и коэффициент пропорциональности γ постоянен, то ковариантная производная от L_{ij}^3 будет равна нулю. Таким образом, уравнения Кодацци для $\sigma = 3$ запишутся в виде

$$0 = \mu_{\tau 3/k} L_{ij}^\tau - \mu_{\tau 3/j} L_{ik}^\tau,$$

где $i, j, k = 1, 2$. Следовательно, получаем два уравнения – при $k = 1, i, j = 2$, и при $k = 2, i, j = 1$:

$$\begin{aligned} \mu_{13/1} L_{22}^1 + \mu_{23/1} L_{22}^2 - \mu_{13/2} L_{21}^1 - \mu_{23/2} L_{21}^2 &= 0, \\ \mu_{13/2} L_{11}^1 + \mu_{23/2} L_{11}^2 - \mu_{13/1} L_{12}^1 - \mu_{23/1} L_{12}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Используем также уравнения Риччи, которые имеют вид

$$\mu_{\rho\sigma/i,k} - \mu_{\rho\sigma/k,i} + \sum_{\alpha} (\mu_{\sigma\alpha/i} \mu_{\alpha\rho/k} - \mu_{\sigma\alpha/k} \mu_{\alpha\rho/i}) + (L_{kl}^\sigma L_{ij}^\rho - L_{il}^\sigma L_{jk}^\rho) g^{lj} = 0.$$

Пусть $\sigma = 3$, тогда последний член этого уравнения обращается в нуль. Действительно,

$$(L_{kl}^3 L_{ij}^\rho - L_{il}^3 L_{jk}^\rho) g^{lj} = L_{kl}^3 L_{ij}^\rho g^{lj} - L_{il}^3 L_{jk}^\rho g^{lj} = -\gamma(\delta_k^j L_{ij}^\rho - \delta_i^j L_{jk}^\rho) = 0.$$

Следовательно, рассмотренные уравнения Риччи примут вид

$$\begin{aligned} \mu_{13/1,2} - \mu_{13/2,1} + \mu_{32/1} \mu_{21/2} - \mu_{32/2} \mu_{21/1} &= 0, \\ \mu_{23/1,2} - \mu_{23/2,1} + \mu_{31/1} \mu_{12/2} - \mu_{31/2} \mu_{12/1} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая равенства (1), (2) и равенство $L_{12}^1 = 0$, получаем следующую систему уравнений на коэффициенты кручения $\mu_{\alpha 3/i}$:

$$\begin{aligned} \mu_{13/1} L_{22}^1 + \mu_{23/1} L_{22}^2 - \mu_{23/2} L_{21}^2 &= 0, \\ \mu_{13/2} L_{11}^1 + \mu_{23/2} L_{11}^2 - \mu_{23/1} L_{12}^2 &= 0, \\ \mu_{13/1,2} - \mu_{13/2,1} + \mu_{32/1} \mu_{21/2} - \mu_{32/2} \mu_{21/1} &= 0, \\ \mu_{23/1,2} - \mu_{23/2,1} + \mu_{31/1} \mu_{12/2} - \mu_{31/2} \mu_{12/1} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Легко проверить, что ковариантные производные в последних двух уравнениях системы можно заменить на обыкновенные, так как дополнительные члены, отличающие ковариантную производную от обычной, взаимно уничтожаются.

Полученная система уравнений для $\mu_{\alpha 3/i}$ однородна. Частным решением является $\mu_{\alpha 3/i} \equiv 0$.

В дальнейшем перейдем к рассмотрению коэффициентов кручения $\mu_{\alpha 3/i}$, которые фигурируют в лемме 1, и покажем, что они равны нулю в силу наложенных условий.

Введем замену обозначений для упрощения дальнейших выкладок:

$$L_{11}^1 = A, \quad L_{22}^1 = B, \quad L_{11}^2 = C, \quad L_{12}^2 = D, \quad L_{22}^2 = E, \quad \mu_{21/2} = F, \quad \mu_{21/1} = K,$$

которые будем считать заданными функциями от u^1, u^2 . Искомыми функциями являются

$$\mu_{13/1} = x, \quad \mu_{23/1} = y, \quad \mu_{13/2} = t, \quad \mu_{23/2} = z.$$

Тогда система уравнений (3) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} Bx + Ey - Dz &= 0, \\ At + Cz - Dy &= 0, \\ x_2 - t_1 - Fy + Kz &= 0, \\ y_2 - z_1 + Fx - Kt &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где нижний индекс i у искомых функций обозначает производную по u_i .

Так как $B \neq 0$ и $A \neq 0$, выразим из первых двух уравнений системы две искомые функции x, t через z и y ; подставим результат в следующие два уравнения. Так как мы предположили $L_{12}^1 = 0$, то $D \neq 0$. В противном случае эллипс будет вырожден в отрезок прямой.

Получим линейную систему из двух дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} y_2 - z_1 + M_2 z - M_1 y &= 0, \\ z_2 + z_1 H - y_1 G + z M_4 - y M_3 &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $H = CB/(AD) - E/D$, $G = B/A$, $M_l, l = 1, \dots, 4$, – некоторые функции, зависящие от A, B, C, D, E, F, K . Пусть

$$\xi = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -G & H \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (5) записывается в матричном виде:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_2} + P \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + Q \xi = 0. \tag{6}$$

Согласно теории систем дифференциальных уравнений первого порядка [6], их тип определяется в зависимости от существования действительных корней характеристического уравнения.

Для решения системы и определения типа системы найдем собственные значения матрицы P , т.е. корни уравнения

$$\det(P - \lambda I) = 0,$$

где I – единичная матрица. По определению [7], если $\lambda(u_1, u_2)$ – действительное решение алгебраического уравнения $\det(P - \lambda I) = 0$ относительно λ , то кривые C_i , определенные обыкновенным дифференциальным уравнением $du_1/du_2 = \lambda$, называются *характеристическими кривыми*

$$\frac{du_1}{du_2} = \lambda.$$

Имеем при $AD \neq 0$

$$\lambda^2 AD - \lambda(CB - AE) - BD = 0.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, запишем последнее равенство через коэффициенты вторых квадратичных форм

$$L_{11}^1 L_{12}^2 \lambda^2 - \lambda(L_{11}^2 L_{22}^1 - L_{11}^1 L_{22}^2) - L_{22}^1 L_{12}^2 = 0. \quad (7)$$

Тогда дискриминант

$$\Delta = (L_{11}^2 L_{22}^1 - L_{11}^1 L_{22}^2)^2 + 4L_{11}^1 L_{22}^1 (L_{12}^2)^2.$$

В зависимости от величины Δ система может быть трех типов:

- 1) если $\Delta > 0$ – гиперболический тип;
- 2) если $\Delta < 0$ – эллиптический тип;
- 3) если $\Delta = 0$ – параболический тип.

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\lambda_i = \frac{(L_{11}^2 L_{22}^1 - L_{11}^1 L_{22}^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2L_{11}^1 L_{12}^2}, \quad i = 1, 2.$$

Напомним, мы рассматриваем гиперболический тип, поэтому будем считать, что выражение $\Delta > 0$.

ЛЕММА 3. *Специально гиперболическая сеть на поверхности и сеть характеристик системы (6) совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – угол между проекцией вектора нормальной кривизны на плоскость эллипса и осью n_1 , тогда проекция вектора нормальной кривизны на n_1 есть $X = L_{ij}^1 du^i du^j / ds^2$, а проекция на n_2 есть $Y = L_{ij}^2 du^i du^j / ds^2$. Тогда имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X} = \mu.$$

В силу выбора базиса нормалей при ненулевом смещении $\{du^1, du^2\}$ значение $X > 0$. Экстремальные значения угла φ будут достигаться на касательных прямых к эллипсу, которые как раз и участвуют в определении специальной гиперболической сети. Таким образом, для нахождения интересующих нас направлений в касательной плоскости поверхности надо сначала решить уравнение

$$|L_{ij}^2 - \mu L_{ij}^1| = 0.$$

Тогда получим характеристическое уравнение

$$\mu^2 (L_{11}^1 L_{22}^1) - \mu (L_{11}^1 L_{22}^2 + L_{11}^2 L_{22}^1) + (L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2) = 0.$$

Найдем дискриминант этого уравнения:

$$\Lambda = (L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1)^2 + 4L_{22}^1 L_{11}^1 (L_{12}^2)^2.$$

Хорошо видно, что $\Lambda = \Delta$. Таким образом, условие гиперболичности системы дифференциальных уравнений (6) и условие гиперболичности типа поверхности совпадают. Имеем

$$\mu = \frac{(L_{11}^1 L_{22}^2 + L_{11}^2 L_{22}^1) \pm \sqrt{\Lambda}}{2L_{11}^1 L_{22}^1}.$$

Имеем систему уравнений для определения направлений линий специальной гиперболической сети:

$$\begin{aligned} (L_{11}^2 - \mu_i L_{11}^1) du^1 + (L_{12}^2 - \mu_i L_{12}^1) du^2 &= 0, \\ (L_{12}^2 - \mu_i L_{12}^1) du^1 + (L_{22}^2 - \mu_i L_{22}^1) du^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

С другой стороны, для характеристик системы дифференциальных уравнений (6) имеем $du^1/du^2 = \lambda_j$. Проверим, что при определенном выборе знаков в μ_i , λ_j эти направления совпадают. Рассмотрим, например, первое уравнение системы (8). Подставим в это уравнение $du^1 = \lambda_j du^2$. Тогда первое уравнение системы (8) примет вид

$$(L_{11}^2 - \mu_i L_{11}^1) \lambda_j + L_{12}^2 = 0.$$

Подставляя выражения для μ_i , λ_j через коэффициенты вторых квадратичных форм, имеем

$$\begin{aligned} \left[L_{11}^2 - \frac{(L_{11}^1 L_{22}^2 + L_{11}^2 L_{22}^1) \pm \sqrt{\Lambda}}{2L_{22}^1} \right] \left[\frac{-(L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1) \pm \sqrt{\Lambda}}{2L_{11}^1 L_{12}^2} \right] + L_{12}^2 &= 0, \\ \left[\frac{(L_{11}^2 L_{22}^1 - L_{11}^1 L_{22}^2) \pm \sqrt{\Lambda}}{2L_{22}^1} \right] \left[\frac{(L_{11}^2 L_{12}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2) \pm \sqrt{\Lambda}}{2L_{11}^1 L_{12}^2} \right] + L_{12}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Это тождество выполняется при соответствующем выборе знаков при дискриминанте $\sqrt{\Lambda}$. Например, если в первых квадратных скобках мы берем знак $+$, то во вторых берем $-$, или наоборот.

Подставляя значения Λ , получим

$$\frac{(L_{11}^2 L_{22}^1 - L_{11}^1 L_{22}^2)^2 - (L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1)^2 - 4L_{22}^1 L_{11}^1 (L_{12}^2)^2}{4L_{22}^1 L_{11}^1 L_{12}^2} + L_{12}^2 = 0.$$

Легко видеть, что тождество выполняется. Аналогично проверяется, что второе уравнение системы (8) тоже выполнено.

Таким образом, касательные направления для кривых специальной гиперболической сети и направления характеристик системы (6) совпадают при соответствующем выборе. Следовательно, эти две сетки совпадают. Лемма 3 доказана.

Из теоремы о единственности решений систем дифференциальных уравнений гиперболического типа [7; с. 422] и нулевых граничных условий на кривой τ пересекающей характеристики, сформулированных в теореме 2 в пунктах а), б) и показанных в лемме 2, следует, что коэффициенты кручения $\mu_{\alpha 3/i} = 0$ во всей области D . Учитывая результаты из леммы 1, имеем, что область D на поверхности F^2 принадлежит сфере $S^4 \subset E^5$. Теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим эллиптический тип.

ТЕОРЕМА 3. Пусть на поверхности $F^2 \subset E^5$ класса регулярности $C^{4,\alpha}$ с невырожденным эллипсом нормальной кривизны точка x проектируется внутрь эллипса нормальной кривизны (эллиптический тип). Пусть D – область на F^2 , ограниченная замкнутой кривой τ класса C^1 .

Пусть для каждой точки x области D плоскость эллипса нормальной кривизны находится на постоянном расстоянии γ от точки x .

Пусть условия а) и б) из теоремы 2 выполняются на замкнутой кривой τ .

Тогда область D поверхности F^2 принадлежит сфере $S^4 \subset E^5$ радиуса $1/\gamma$.

Рассмотрим систему (5). Эта система будет эллиптической при $\Delta < 0$, она имеет вид системы (17.1) из [8; с. 213], которая преобразуется к однородной системе (17.21) [8; с. 215]. Для этой системы в [8; теорема 3.31, с. 219] получено общее представление решения (теорема доказана в работе [9]). А именно, теорема 3.31 сформулирована в следующем виде.

ТЕОРЕМА 4. Всякое решение уравнения (17.21) из [8; с. 215] представимо в виде

$$w(z) = f(W(z))e^{\varphi(z)},$$

где $f(W)$ – функция, аналитическая в $W(G)$, $W(z)$ – основной гомеоморфизм уравнения $\partial_{\bar{z}}w - q(z)\partial_z w = 0$, a $\varphi(z) \in D_{1,p}(E)$, $p > 2$, голоморфна вне G и обращается в нуль на бесконечности.

Также в [8] доказывается, что для систем вида (17.21) справедлив принцип максимума, из которого следует, что решение этой системы является единственным при заданных граничных условиях. Так как на границе функции $\mu_{13/1}$ и $\mu_{13/2}$ равны нулю, то внутри области они тождественно равны нулю. Следовательно, по лемме 1 поверхность F^2 принадлежит сфере $S^4 \subset E^5$.

Заметим также, что можно воспользоваться теорией квазиконформных отображений и теоремой Лаврентьева [10].

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 2 и 3 можно сформулировать аналогичным образом и для принадлежности поверхности F^2 гиперплоскости E^4 .

ТЕОРЕМА 5. Пусть плоскость эллипса нормальной кривизны для каждой точки $x \in F^2$ проходит через эту же точку, и пусть выполнены условия

а) $n_3|_{\tau} = \text{const}$,

б) как в теоремах 2 и 3.

Тогда поверхность F^2 принадлежит гиперплоскости E^4 .

Краевые условия а) и б) можно переформулировать в наглядном геометрическом виде: существует E^4 такое, что $\tau \subset E^4$, касательная полоса к поверхности, плоскость эллипса нормальной кривизны вдоль τ и производные любого нормального вектора n в любом направлении на τ принадлежат E^4 .

Существование условий а) и б) покажем на примере.

Построим поверхность в E^5 следующим образом: возьмем некоторую кривую $\Gamma \subset E^5$ с нормальными $\xi_1, \dots, \xi_5$ и кривизнами $k_1, \dots, k_4$, причем для простоты будем

считать, что $k_4 = \text{const} \neq 0$. Построим линейчатую поверхность с образующими, направленными вдоль нормали ξ_5 . Запишем радиус-вектор такой поверхности:

$$r(u, v) = \rho(u) + v\xi_5,$$

где $\rho(u)$ – радиус-вектор кривой Γ .

Далее покажем, что плоскость эллипса нормальной кривизны проходит через точку поверхности и эллипс нормальной кривизны не вырождается в отрезок прямой. Найдем касательные вектора:

$$r_u = \xi_1 + v(-k_4\xi_4), \quad r_v = \xi_5.$$

Теперь запишем нормали к этой поверхности:

$$n_1 = \xi_2, \quad n_2 = \xi_3, \quad n_3 = \frac{vk_4\xi_1 + \xi_4}{\sqrt{1 + v^2k_4^2}}.$$

Таким образом, легко посчитать вторые квадратичные формы и записать вектор нормальной кривизны

$$k_n(\tau) = \sum_{\alpha} \frac{\Pi^{\alpha} n_{\alpha}}{I} = \frac{k_1 du^2}{ds^2} n_1 + \frac{vk_3 k_4 du^2}{ds^2} n_2 - \frac{2k_4 dudv}{\sqrt{1 + v^2k_4^2} ds^2} n_3.$$

В нормальном пространстве введем координаты X, Y, Z с началом в точке x и запишем вектор нормальной кривизны в этих координатах:

$$X = \frac{k_1 du^2}{ds^2}, \quad Y = \frac{vk_3 k_4 du^2}{ds^2}, \quad Z = -\frac{2k_4 du dv}{\sqrt{1 + v^2k_4^2} ds^2}.$$

Из первых двух равенств следует соотношение

$$vk_3 k_4 X - k_1 Y = 0.$$

Отсюда следует, что плоскость эллипса нормальной кривизны проходит через ось Z . Найдем ds^2 :

$$ds^2 = (1 + v^2k_4^2) du^2 + dv^2.$$

Обозначим

$$\sqrt{1 + v^2k_4^2} du = d\bar{u}, \quad \frac{d\bar{u}^2}{d\bar{u}^2 + dv^2} = \cos^2 \theta, \quad \frac{dv^2}{d\bar{u}^2 + dv^2} = \sin^2 \theta,$$

где угол θ образован направлением Γ и координатной линией u . Для координат точки эллипса можем записать

$$Z = -\frac{k_4}{1 + v^2k_4^2} \sin 2\theta, \quad Y = \frac{1}{2} vk_3 k_4 (1 + \cos 2\theta).$$

Выражая из этих равенств $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ и складывая квадраты получившихся выражений, имеем

$$\left(\frac{2Y}{vk_3 k_4} - 1 \right)^2 + \left(\frac{Z(1 + v^2k_4^2)}{k_4} \right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса.

Таким образом, построен пример поверхности $F^2 \subset E^5$, у которой плоскость эллипса нормальной кривизны для каждой точки $x \in F^2$ проходит через эту точку, но поверхность не лежит ни в какой гиперплоскости E^4 , т.е. краевое условие на τ в формулировке теоремы 5 существенно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Аминов, *Дифференциальная геометрия и топология кривых*, Наука, М., 1987.
- [2] Ю. А. Аминов, *Геометрия подмногообразий*, Наукова думка, Киев, 2002.
- [3] Я. С. Наседкина (Я. С. Тандура), “Об условиях принадлежности поверхности трехмерной сфере”, *Вестн. ХНУ. Сер. матем., прикл. метем. и мех.*, **790(57)** (2007), 140–145.
- [4] B.-y. Chen, K. Yano, “Integral formulas for submanifolds and their applications”, *J. Differential Geometry*, **5** (1971), 467–477.
- [5] S. M. Moraes, M. C. Romero-Fuster, F. Sánchez-Bringas, “Principal configuration and umbilicity of submanifolds in R^n ”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **11:2** (2003), 227–245.
- [6] А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский, *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления*, Наука, М., 1976.
- [7] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
- [8] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, М., 1959.
- [9] Б. В. Боярский, “Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **43:4** (1957), 451–503.
- [10] М. А. Лаврентьев, “Основная теорема теории квази-конформных отображений плоских областей”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **12:6** (1948), 513–554.

Ю. А. Аминов

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков
E-mail: aminov@ilt.kharkov.ua

Поступило

12.10.2008

Исправленный вариант

25.04.2012

Я. С. Наседкина

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков
E-mail: yanki.28.04@gmail.com