Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Бутковский, Предельное поведение критического ветвящегося процесса с иммиграцией, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 670–677

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:05:03

Предельное поведение критического ветвящегося процесса с иммиграцией

О. А. Бутковский

Исследуется обобщение Севастьяновского ветвящегося процесса с иммиграцией, составляющей процесс Кокса. Получена производящая функция числа частиц процесса. Для критических процессов установлено предельное поведение числа частиц на бесконечности.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В статье [1] было введено одно обобщение Севастьяновского ветвящегося процесса (см., например, [2]) с иммиграцией. Для пуассоновской иммиграции были подсчитаны производящая функция числа частиц и асимптотика его математического ожидания. В данной работе эти результаты расширены на случай иммиграции, составляющей обобщенный пуассоновский поток. Также для критического случая исследуется предельное поведение числа частиц ветвящегося процесса.

Опираясь на идеи [3] (см. также [4]), обратимся к следующей модели: в ходе эволюции каждая клетка с вероятностью $1 - p$ погибает через случайное время η , а с вероятностью p через случайное время ξ она дает ν потомков. Пусть η и ξ — это случайные величины с функциями распределения $L(x)$ и $G(x)$ соответственно. Обозначим также $p_k(u) = P(\nu = k \mid \xi = u)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $u > 0$. При этом предполагается, что различные клетки эволюционируют не зависимо друг от друга. Положим $Z(t)$ равным числу клеток в момент времени t , и пусть $Z(0)=1$. Производящую функцию для $Z(t)$ обозначим $F(t, s) = E s^{Z(t)}$, где $0 \leq s \leq 1$, $t \geq 0$.

В [1] для этой модели было найдено $E Z(t)$ и изучена его асимптотика при $t \rightarrow \infty$.

Введем теперь ветвящийся процесс с иммиграцией $Y(t)$, образованный от процесса $Z(t)$. Пусть $0 = S_0 < S_1 < S_2 < \dots$ — последовательность случайных величин, являющихся моментами прироста популяции. Сопоставим каждой точке S_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, целочисленную неотрицательную случайную величину I_k — размер прироста популяции. Будем предполагать, что $I_1, I_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с производящей функцией $g(s)$. Определим независимые ветвящиеся процессы $Z_k(t)$ с такой же эволюцией, как у $Z(t)$, но для которых $Z_k(0) = I_k$. Тогда производящая функция $Z_k(t)$ есть $F^*(t, s) = g(F(t, s))$. Теперь положим

$$Y(t) = \sum_{k: S_k \leq t} Z_k(t - S_k).$$

Таким образом, процесс $Y(t)$ можно интерпретировать как общее число клеток в момент времени t . При этом новые клетки возникают как в результате деления клеток популяции, так и вследствие притока новых клеток извне.

В данной работе для процесса $Y(t)$ будет вычислена производящая функция $\Phi(t, s)$, а затем в критическом случае установлена его асимптотика поведения при $t \rightarrow \infty$. При этом на процесс эволюции клетки налагаются относительно слабые ограничения. А именно, требуется лишь конечность первого момента времени жизни клетки и конечность второго момента числа клеток, получающихся при делении одной клетки.

Отметим, что в работе Нагаева [5] рассматривался процесс иммиграции более общего вида, однако при этом на процесс без иммиграции $Z(t)$ накладывалось дополнительное ограничение, следующее (как показано в [6]) из условия $t^2(1 - G(t)) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$. Это же условие накладывалось и в теореме, доказанной Рахимовым [7; теорема 2.2, с. 72]. Кроме того, следует отметить статью Бадалбаева и Зубкова [8], в которой, при дополнительных ограничениях на процесс $Z(t)$ доказывается предельная теорема для числа частиц в последовательности ветвящихся процессов с иммиграцией.

Таким образом, результаты данной статьи обобщают [1], так как моменты притока популяции составляют процесс более общего вида, и частично обобщают результаты работ [5], [7], [8], так как на процесс эволюции частиц налагаются более слабые ограничения.

2. Вычисление производящей функции процесса с иммиграцией. В [1] был рассмотрен случай, когда $0 = S_0 < S_1 < S_2 < \dots$ – это последовательность моментов скачков неоднородного пуассоновского процесса, т.е. процесса вида $N(l(t), \omega)$, где $N(t, \omega)$ – пуассоновский процесс интенсивности 1, а $l(t)$ – возрастающая неслучайная функция. Найдем производящую функцию числа частиц ветвящегося процесса с иммиграцией более общего вида.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены три условия:

- 1) $0 = S_0 < S_1 < S_2 < \dots$ – это моменты скачков процесса Кокса $\zeta(t, \omega) = N(\Lambda(t, \omega), \omega)$, где $N(t, \omega)$ – пуассоновский процесс интенсивности 1;
- 2) для почти всех ω функция $\Lambda(\cdot, \omega)$ возрастающая, абсолютно непрерывная с производной $r(\cdot, \omega)$;
- 3) процессы $\{N(t), t \geq 0\}$ и $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ независимы.

Тогда производящая функция $Y(t)$ дается формулой

$$\Phi(t, s) = \mathbb{E} e^{-\Lambda(t) + \int_0^t g(F(t-u, s)) r(u, \omega) du}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фиксировано некоторое $t > 0$. Заметим, что

$$\Phi(t, s) = \mathbb{E} s^{Y(t)} = \mathbb{E} s^{\sum_{i=1}^{\zeta(t)} Z_i(t-S_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\zeta(t) = n) \mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^n Z_i(t-S_i)} \mid \zeta(t) = n]. \quad (2.2)$$

Легко видеть, что

$$\mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^n Z_i(t-S_i)} \mid \zeta(t) = n] = \int_0^t \int_{u_1}^t \dots \int_{u_{n-1}}^t \prod_{i=1}^n F^*(t - u_i, s) d\mathbb{P}_{S_1 \dots S_n}(u_1, \dots, u_n), \quad (2.3)$$

$\mathbb{P}_{S_1 \dots S_n}(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{P}(S_1 \leq u_1, \dots, S_n \leq u_n \mid \zeta(t) = n)$. Вычислим эту вероятность.

Сначала заметим, что если $S_i(\omega)$ – это момент i -го скачка процесса $\zeta(t)$, то $M_i(\omega) := \Lambda(S_i(\omega), \omega)$ – это момент i -го скачка процесса $N(t, \omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} P_{S_1, \dots, S_n}(u_1, \dots, u_n) &= P(M_1(\omega) \leq \Lambda(u_1), \dots, M_n(\omega) \leq \Lambda(u_n) \mid \zeta(t) = n) \\ &= \frac{1}{P(\zeta(t) = n)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} P(M_1 \leq t_1, \dots, M_n \leq t_n, N(s) = n) \\ &\quad \times dP_{\Lambda(u_1), \dots, \Lambda(u_n), \Lambda(t)}(t_1, \dots, t_n, s). \end{aligned}$$

Подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\begin{aligned} &P(N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2, \dots, N(t_n) \geq n, N(s) = n) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n: \\ i_1 + \dots + i_j \geq j \\ i_1 + \dots + i_n = N}} P(N(t_1) = i_1, N(t_2) - N(t_1) = i_2, \dots, \\ &\quad N(t_n) - N(t_{n-1}) = i_n, N(s) - N(t_n) = 0) \\ &= e^{-s} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n: \\ i_1 + \dots + i_j \geq j \\ i_1 + \dots + i_n = N}} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2} \dots (t_n - t_{n-1})^{i_n}}{i_1! i_2! \dots i_n!}. \end{aligned}$$

Как легко видеть, если мы рассмотрим слагаемое этой суммы в котором хотя бы одно i_j равно 0, то это слагаемое есть сумма многочленов, каждый из которых зависит не от всех переменных t_i . Интегрируя по этому слагаемому в формуле (2.3), получим 0. Следовательно, это слагаемое можно не учитывать. В итоге имеем

$$P_{S_1, \dots, S_n}(u_1, \dots, u_n) = n! \frac{\mathbb{E} \Lambda(u_1) \dots \Lambda(u_n) e^{-\Lambda(t)}}{\mathbb{E} \Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}} + \varphi, \quad (2.4)$$

где φ – это сумма функций, каждая из которых не имеет в качестве аргумента хотя бы один t_i . Подставляя (2.4) в (2.3), получим

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(s^{\sum_{i=1}^n Z_i(t-s_i)} \mid \zeta(t) = n) \\ &= \frac{n!}{\mathbb{E} \Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}} \int_0^t \int_{u_1}^t \dots \int_{u_{n-1}}^t \prod_{i=1}^n F^*(t - u_i, s) d\mathbb{E} \Lambda(u_1) \dots \Lambda(u_n) e^{-\Lambda(t)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E} \Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}} \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \prod_{i=1}^n F^*(t - u_i, s) \mathbb{E}(r(u_1) \dots r(u_n) e^{-\Lambda(t)}) du_1 \dots du_n \\ &= \frac{1}{\mathbb{E} \Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}} \mathbb{E} \left[e^{-\Lambda(t)} \left(\int_0^t F^*(t - u, s) r(u) du \right)^n \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь во втором равенстве мы вначале воспользовались симметричностью функции $\prod_{i=1}^n F^*(t - u_i, s)$, а затем продифференцировали функцию $\mathbb{E} \Lambda(u_1) \dots \Lambda(u_n) e^{-\Lambda(t)}$ последовательно по всем переменным. В третьем равенстве согласно теореме Фубини изменен порядок интегрирования по мере Лебега и мере P .

Поскольку $P(\zeta(t) = n) = (1/n!) \mathbb{E} \Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}$, подставляя (2.5) в (2.2), получим

$$\Phi(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbb{E} \left[e^{-\Lambda(t)} \left(\int_0^t F^*(t - u, s) r(u) du \right)^n \right] = \mathbb{E} e^{-\Lambda(t) + \int_0^t F^*(t - u, s) r(u, \omega) du},$$

из чего следует (2.1).

Обозначим $a = \mathbb{E} I_1$, $M(t) = \mathbb{E} Z_t$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Из теоремы 1 вытекает следующая формула для вычисления математического ожидания процесса Y_t :

$$\mathbb{E} Y_t = \left. \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial s} \right|_{s=1} = a \int_0^t M(t-u) \mathbb{E} r(u) du.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathbb{E} r(u) \rightarrow r$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда в критическом случае (т.е. при $p \mathbb{E} \nu = 1$) верно соотношение $\mathbb{E} Y_t \sim arWt$ при $t \rightarrow \infty$, где

$$W = \frac{p \mathbb{E} \xi + (1-p) \mathbb{E} \eta}{p \mathbb{E} \nu \xi}.$$

Доказательство следует из формулы (4.13) статьи [1]: $M(t) \rightarrow W$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом теорема 1 и приведенные следствия обобщают результаты [1].

3. Асимптотика преобразования Лапласа нормированного числа частиц в критическом случае. Обратимся к исследованию критического случая, т.е. ситуации, когда $p \mathbb{E} \nu = 1$. В [9] был найден предел преобразования Лапласа для функции $Y(t)/t$ при $t \rightarrow \infty$ для $p = 1$ и равномерно распределенных времен миграции. Применяя похожую технику, перенесем этот результат на произвольное p и времена миграции, составляющие процесс Кокса.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,

- 1) $p \mathbb{E} \nu = 1$;
- 2) $r(u, \omega) \rightarrow r(\omega)$ для почти всех ω при $u \rightarrow \infty$;
- 3) конечны математические ожидания

$$a := \mathbb{E} I_1, \mathbb{E} \xi, \mathbb{E} \eta, \mathbb{E} \nu^2, \mathbb{E} \xi \nu.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{-\lambda(Y(t)/t)} = \mathbb{E} \left(1 + \frac{\lambda BW}{2} \right)^{-(2ar(\omega))/B}, \quad (3.1)$$

где

$$B = \frac{\mathbb{E} \nu(\nu-1)}{\mathbb{E} \xi \nu}, \quad W = \frac{p \mathbb{E} \xi + (1-p) \mathbb{E} \eta}{p \mathbb{E} \xi \nu}. \quad (3.2)$$

Для доказательства теоремы воспользуемся следующей леммой из [10].

ЛЕММА 1 [10]. Пусть F_n – это последовательность вероятностных функций распределения на $[0, \infty)$, а φ_n обозначает их преобразование Лапласа. Предположим, что существует $\beta > 0$ такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = \varphi(s)$ существует при $0 < s < \beta$. Тогда функцию $\varphi(s)$ можно определить при всех комплексных s таких, что $\operatorname{Re} s > 0$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = \varphi(s)$, $\varphi(s)$ является преобразованием Лапласа некоторой обобщенной функции распределения F и $F_n \xrightarrow{d} F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{-\lambda(Y(t)/t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(1 - \frac{\lambda}{t} \right)^{Y(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi \left(t, 1 - \frac{\lambda}{t} \right). \quad (3.3)$$

Поэтому из леммы 1 следует, что для доказательства (3.1) достаточно будет установить сходимость к этому пределу $\Phi(t, 1 - \lambda/t)$ при действительных λ меньших некоторого λ_0 .

Введем $h(s) = E(1 - s)^{I_1}$, $R(t, \lambda) = 1 - E(1 - \lambda)^{Z(t)}$. Тогда по теореме 1

$$\Phi\left(t, 1 - \frac{\lambda}{t}\right) = E \exp\left\{-\Lambda(t) + \int_0^t h\left(R\left(t - u, \frac{\lambda}{t}\right)\right) r(u, \omega) du\right\}.$$

Так как $E I_1$ конечно, то

$$h(s) = 1 - as + \varepsilon(s)s,$$

где $\varepsilon(s) \leq a$, $\varepsilon(s)$ не убывает по s и $\varepsilon(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$.

Основная идея нашего доказательства состоит в следующем. Вначале мы покажем правомерность замены в пределе (3.3) $h(s)$ на $1 - as$ и $R(s)$ на некоторое ее приближение $R_0(s)$, а затем подсчитаем новый предел.

Заметим, что функция $R(t, \lambda)$ удовлетворяет следующему уравнению (см. [11]):

$$R(t, \lambda) = \lambda[1 - pG(t) - (1 - p)L(t)] + p \int_0^t g_u(R(t - u, \lambda)) dG(u),$$

где $g_u(z) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (1 - z)^k p_k(u)$.

Вслед за [9], (4) введем функцию $R_0(t, \lambda)$ – решение уравнения

$$\begin{aligned} R_0(t, \lambda) &= \lambda[1 - pG(t) - (1 - p)L(t)] + \int_0^t p E(\nu | \xi = u) R_0(t - u, \lambda) dG(u) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t p E(\nu(\nu - 1) | \xi = u) (R_0(t - u, \lambda))^2 dG(u). \end{aligned}$$

Положим

$$x(t) = -\Lambda(t) + \int_0^t h\left(R\left(t - u, \frac{\lambda}{t}\right)\right) r(u, \omega) du,$$

а также определим

$$y(t) = -\Lambda(t) + \int_0^t h\left(R_0\left(t - u, \frac{\lambda}{t}\right)\right) r(u, \omega) du.$$

Тогда по теореме Лебега

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E[e^{-\Lambda(t) + \int_0^t h(R(t - u, \lambda/t)) r(u, \omega) du} - e^{-\Lambda(t) + \int_0^t h(R_0(t - u, \lambda/t)) r(u, \omega) du}] \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} E(e^{x(t)} - e^{y(t)}) = E \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{x(t)} - e^{y(t)}). \end{aligned}$$

Убедимся, что этот предел равен 0. Для этого, так как $x(t) \leq 0$ и $y(t) \leq 0$ достаточно проверить, что $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0$. Выберем $T(\omega)$ такое, что $r(u, \omega) < 2r$ при $u > T$. Тогда

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_0^t \left| h\left(R\left(t - u, \frac{\lambda}{t}\right)\right) - h\left(R_0\left(t - u, \frac{\lambda}{t}\right)\right) \right| r(u, \omega) du.$$

Последний интеграл представим в виде суммы интегралов по промежуткам $[0; T]$ и $[T; t]$. Первый из них стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$ по теореме Лебега, поскольку

$R(t-u, \lambda/t)$ и $R_0(t-u, \lambda/t)$ стремятся к 0 в силу (1) из [9]. Во втором интеграле сделаем замену переменных и по теореме Лагранжа получим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{t-T} \left| 2rh'(\xi_u) \left(R\left(u, \frac{\lambda}{t}\right) - R_0\left(u, \frac{\lambda}{t}\right) \right) \right| du \\ & \leq \int_0^{t-T} 2ra\rho\left(\frac{\lambda}{t}\right) \frac{K\lambda^2}{t} du = 2raK\lambda^2\rho\left(\frac{\lambda}{t}\right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

при $t \rightarrow \infty$; здесь $0 \leq \xi_u \leq 1$, а в неравенстве мы воспользовались формулой (16) из [9], а именно:

$$\left| R\left(u, \frac{\lambda}{t}\right) - R_0\left(u, \frac{\lambda}{t}\right) \right| \leq \rho\left(\frac{\lambda}{t}\right) \frac{K\lambda^2}{t},$$

где K – некоторая константа, $\rho(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Это неравенство верно для достаточно малых $\lambda < \lambda_0$ (см. (13) из [9]).

Аналогично для доказательства соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[e^{-\Lambda(t) + \int_0^t h(R_0(t-u, \lambda/t))r(u, \omega) du} - e^{-\Lambda(t) + \int_0^t [1 - aR_0(t-u, \lambda/t)]r(u, \omega) du} \right] = 0$$

в силу теоремы Лебега достаточно показать, что модуль разности показателей экспонент стремиться к 0. Снова выбираем $T(\omega)$ такое, что $r(u, \omega) < 2r$ при $u > T$, и имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left| h\left(R_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t}\right)\right) - 1 + aR_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t}\right) \right| r(u, \omega) du \\ & = \int_0^t \varepsilon\left(R_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t}\right)\right) \left| R_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t}\right) \right| r(u, \omega) du. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как, при $\mu < \lambda_0/t$ согласно (13) и (15) в [9] $|R_0(t, \mu)| \leq 2c\mu$ для некоторого c , применяя это неравенство и пользуясь монотонностью функции $\varepsilon(x)$, продолжаем (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \varepsilon\left(R_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t}\right)\right) \left| R_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t}\right) \right| r(u, \omega) du \leq \int_0^t \varepsilon\left(\frac{2c\lambda}{t}\right) \frac{2c\lambda}{t} r(u) du \\ & = \varepsilon\left(2c\frac{\lambda}{t}\right) \frac{2c\lambda}{t} \left[\int_0^T r(u) du + 2r(t-T) \right] \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Теперь из (3.4) и (3.6) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{-\Lambda(t) + \int_0^t h(R(t-u, \lambda/t))r(u, \omega) du} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\Lambda(t) + \int_0^t [1 - aR_0(t-u, \lambda/t)]r(u, \omega) du}. \quad (3.7)$$

Переходим ко второй части доказательства – вычислим этот предел. Для этого будем использовать следующее разложение из [9]:

$$R_0(u, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(u) \frac{\lambda^n}{n!},$$

причем

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(u)}{u^{n-1}} = (-1)^{n-1} n! \frac{B^{n-1}}{2^{n-1}} W^n =: A_n,$$

где B и W определены в (3.2). Так как по теореме Лебега

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{-\Lambda(t) + \int_0^t [1 - a R_0(t-u, \lambda/t)] r(u, \omega) du} = \mathbb{E} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-a \int_0^t R_0(t-u, \lambda/t) r(u) du}, \quad (3.8)$$

вначале найдем предел показателя экспоненты:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t}\right) r(u) du &= \lim_{t \rightarrow \infty} r \int_T^t R_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t}\right) du = \lim_{t \rightarrow \infty} r \int_0^{t-T} R_0\left(u, \frac{\lambda}{t}\right) du \\ &= r \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{t-T} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(u) \frac{\lambda^n}{t^n n!} du = r \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{t-T} \varphi_n(u) \frac{\lambda^n}{t^n n!} du. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь мы дважды воспользовались абсолютной сходимостью ряда при перестановке суммирования, интегрирования и взятия предела по t . С другой стороны,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^n} \int_0^{t-T} \varphi_n(u) du = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(t)}{n t^{n-1}} = \frac{A_n}{n}. \quad (3.10)$$

В итоге, подставляя (3.10) и (3.9) в (3.8) и пользуясь (3.7), окончательно получим, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{-\lambda(Y(t)/t)} &= \mathbb{E} \exp\left(-ar(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B^{n-1} \lambda^n W^n}{n 2^{n-1}}\right) \\ &= \mathbb{E} \exp\left(-ar(\omega) \frac{2}{B} \ln\left(1 + \frac{\lambda B W}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Это доказывает (3.1) при $\lambda < \lambda_0$, а, значит, и при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частном случае, когда $p = 1$, а времена миграции составляют однородный пуассоновский процесс с показателем μ , из теоремы 2 получаем равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{-\lambda(Y(t)/t)} = \left(1 + \lambda \frac{\mathbb{E} \nu(\nu-1) \mathbb{E} \xi}{(\mathbb{E} \xi \nu)^2}\right)^{-2(\mathbb{E} I \mathbb{E} \xi \nu)/(\mathbb{E} \nu(\nu-1))},$$

что совпадает с результатами, установленными в [9].

В заключение автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору А. В. Булинскому. Кроме того, автор признателен рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Yakovlev, N. Yanev, “Age and residual lifetime distributions for branching processes”, *Statist. Probab. Lett.*, **77**:5 (2007), 503–513.
- [2] Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.
- [3] L. Hanin, O. Hyrien, J. Bedford, A. Yakovlev, “A comprehensive stochastic model of irradiated cell populations in culture”, *J. Theoret. Biol.*, **239**:4 (2006), 401–416.
- [4] P. Naccou, P. Jagers, V. A. Vatutin, *Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations*, Camb. Stud. Adapt. Dyn., **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [5] С. В. Нагаев, “Предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией”, *ТВП*, **20**:1 (1975), 178–180.

- [6] M. I. Goldstein, “Critical age-dependent branching processes: Single and multitype”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **17** (1971), 74–88.
- [7] I. Rahimov, *Random Sums and Branching Stochastic Processes*, Lecture Notes in Statist., **96**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [8] И. С. Бадалбаев, А. М. Зубков, “Предельные теоремы для последовательности ветвящихся процессов с иммиграцией”, *ТВП*, **28**:2 (1983), 382–388.
- [9] В. М. Шуренков, “Две предельные теоремы для критических ветвящихся процессов”, *ТВП*, **21**:3 (1976), 548–558.
- [10] K. B. Athreya, P. R. Parthasarathy, G. Sankaranarayanan, “Supercritical age-dependent branching processes with immigration”, *J. Appl. Probab.*, **11**:4 (1974), 695–702.
- [11] T. E. Harris, *The Theory of Branching Processes*, Dover Phoenix Ed., Dover Publ., Mineola, NY, 2002.

О. А. Бутковский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: oglb@yandex.ru

Поступило

15.06.2011