Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Насибов, О самоканализации решений нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 789–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 02:24:30

О самоканализации решений нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера

Ш. М. Насибов

1. Введение и результаты. Пусть для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера поставлена задача Коши:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(|u|^2)u \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Здесь $f(s)$ – заданная функция на $[0, \infty)$, u_0 – заданная функция в $\mathbb{R}^n$.

Будем принимать стандартные обозначения из монографии Лионса [1]: $H(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n) = W_2^1(\mathbb{R}^n)$ – комплексные гильбертовы пространства Соболева; $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\mathbb{R}^n)$, $\|\cdot\|_p$ – норма в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$.

ЛЕММА 1 (О ЛОКАЛЬНОМ СУЩЕСТВОВАНИИ). Пусть $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $f(s) \in C^1([0; \infty))$. Тогда найдется такое $t_0 > 0$, что задача (1), (2) имеет единственное локальное решение в классе функций

$$C^0([0, t_0]; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_0]; H^{-1}(\mathbb{R}^n))$$

с альтернативой: или это решение по времени продолжается на $[0, \infty)$, или это решение продолжается на максимальный интервал существования $[0, t_{\max})$, где $t_{\max} \geq t_0$, причем $\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_{\max}^-$.

Лемма 1 доказывается методом сжимающих отображений, после сведения задачи (1), (2) к соответствующему интегральному уравнению (см. [2]).

Для дальнейшего изложения примем следующие обозначения.

Пусть $u(x, t)$ – максимальное решение задачи (1), (2). Положим

$$A(t) = A(u(t)) = \|\nabla u(\cdot, t)\|^2,$$

$$E(t) = E(u(t)) = A(t) - B(t), \quad \text{где } B(t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(|u(x, t)|^2) dx,$$

где $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$; $a(t) = a(u(t)) = \|u(\cdot, t)\|^2$,

$$P_k(t) = P_k(u(t)) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть $u(x, t)$ – максимальное решение задачи (1), (2) из класса

$$C^0([0, t_{\max}); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_{\max}); H^{-1}(\mathbb{R}^n)).$$

Тогда задача (1), (2) имеет следующие законы сохранения, т.е. при $\forall t \in [0, t_{\max})$ справедливы следующие интегральные соотношения:

$$a(u(t)) = a(u_0), \quad (3)$$

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad (4)$$

$$P_k(u(t)) = P_k(u_0), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Доказательства инвариантов (3)–(5) относительно нелинейной шредингеровской динамики (1) несложны, и могут быть найдены в [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что глобальное решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) из класса

$$C^0([0, +\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, +\infty); H^{-1}(\mathbb{R}^n))$$

самоканализируется, если при $\forall t \in [0, +\infty)$ для него выполнена следующая двусторонняя оценка: $\text{const} \leq \|u(\cdot, t)\|_4 \leq \text{const}$, где через const обозначены различные положительные постоянные, не зависящие от t и $u(x, t)$.

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (О ГЛОБАЛЬНОМ СУЩЕСТВОВАНИИ). Пусть $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $f(s) \in C^2([0, \infty))$ на интервале $[0, +\infty)$ положительная, возрастающая, выпуклая вниз функция, т.е. $f(s) \geq 0$, $f'(s) > 0$, $f''(s) < 0 \quad \forall s \in [0, +\infty)$. Тогда при $n = 1$ задача (1), (2) имеет глобальное решение из класса

$$C^0([0, +\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, +\infty); H^{-1}(\mathbb{R}^n)).$$

При $n = 2$ сказанное остается в силе при выполнении условия

$$\|u_0\|^2 < \frac{27\pi}{16f'(0)}.$$

ТЕОРЕМА 2 (О САМОКАНАЛИЗАЦИИ). Пусть выполнены все условия теоремы 1. Далее пусть начальная функция u_0 такая, что выполняется неравенство

$$E(u_0) < \frac{P^2(u_0)}{a(u_0)}, \quad (6)$$

где $P^2(u_0) = \sum_{k=1}^n P_k^2(u_0)$. Тогда решение задачи (1), (2) самоканализируется.

2. Доказательство теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1 вытекает из следующего предложения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда при $\forall t \in [0, t_{\max})$ справедлива следующая априорная оценка:

$$A(u(t)) \leq \text{const}. \quad (7)$$

Доказательству утверждения 1 предположим следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\rho \in (0, +\infty)$ при $n = 1, 2$; $\rho \in (0, 4/(n-2))$ при $n \geq 3$. Пусть $v(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство Гальярдо–Ниренберга–Соболева:

$$\|v\|_{\rho+2} \leq k_0 \|\nabla v\|^\alpha \|v\|^{1-\alpha}, \quad (8)$$

где $\alpha = \rho n / [2(\rho + 2)]$, k_0 определяется следующим образом:

$$k_0 = k k_B \left(\frac{\rho + 2}{\rho + 1} \right), \quad \text{где} \quad k = \frac{1}{\sqrt{\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha}}} \left(\frac{\sigma_n B}{2} \right)^{\alpha/n}, \quad \sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

$B = B(n/2, n(1 - \alpha)/2n)$ – бета-функция Эйлера;

$$k_B(p) = \left[\frac{(p/2\pi)^{1/p}}{(p'/2\pi)^{1/p'}} \right]^{n/2}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Доказательство этого интегрального неравенства может быть найдено в [4], [5], а также в [6]–[8]. Значение k_0 приведено в [8].

Для доказательства утверждения 1 воспользуемся неравенством Иенсена [9] и законами сохранения (3), (4). Сначала заметим, что $F(s) \leq f(s)s \quad \forall s \in [0, +\infty)$ в силу условия $f'(s) > 0 \quad \forall s \in [0, \infty)$. Далее справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} A(t) &\leq |E(u_0)| + \int_{\mathbb{R}^n} F(|u|^2)|u|^2 dx \leq |E(u_0)| + \int_{\mathbb{R}^n} f(|u|^2)|u|^2 dx \\ &\leq |E(u_0)| + \int |u|^2 dx f\left(\frac{\int |u|^4 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx}\right) \end{aligned}$$

(в силу неравенства Иенсена)

$$\begin{aligned} &= |E(u_0)| + \int |u_0|^2 dx f\left(\frac{\int |u|^4 dx}{\int |u_0|^2 dx}\right) \\ &= |E(u_0)| + \int |u_0|^2 dx f\left(\frac{k_0^4 \|u_0\|^{4-n} A^{n/2}(t)}{\|u_0\|^2}\right) \end{aligned}$$

(в силу неравенства (8) при $n \leq 3$), т.е. получаем следующее неравенство:

$$A(t) \leq |E(u_0)| + \|u_0\|^2 f(k_0^4 \|u_0\|^{2-n} A^{n/2}(t)). \quad (9_1)$$

По формуле Маклорена для $f(s)$ имеем

$$f(s) = f(0) + f'(0)s + \frac{f''(\theta s)}{2} s^2,$$

где $0 < \theta < 1$. Отсюда в силу условий на $f(s)$ получаем $f(s) < f'(0)s$. Благодаря этой оценке из (9₁) имеем

$$A(t) \leq |E(u_0)| + f'(0)k_0^4 \|u_0\|^{2-n} A^{n/2}(t). \quad (9_2)$$

При $n = 1$ из (9₂) вытекает априорная оценка (7).

Пусть $n = 2$. Тогда при $\rho = 2$ выполнено $k_0 = 2/\sqrt[4]{27\pi}$. Если $f'(0)k_0^4 \|u_0\|^2 < 1$, то из (9₂) следует априорная оценка (7). Доказательство теоремы 1 завершено.

Доказательство теоремы 2. Легко убедиться в том, что справедливо следующее интегральное соотношение:

$$A(e^{iqx}u) = A(u) - 2qP(u) + q^2a(u), \quad (10)$$

где $qx = \sum_{k=1}^n q_k x_k$, $qP(u) = \sum_{k=1}^n q_k P_k$, $q^2 = \sum_{k=1}^n q_k^2$. В соотношении (10), полагая $q_k = P_k/a$, получаем

$$A(e^{iqx}u) = A(u) - \frac{P^2(u)}{a(u)}, \quad (11)$$

где $P^2(u) = \sum_{k=1}^n P_k^2(u)$.

Из (11), используя законы сохранения (3)–(5), имеем

$$A(e^{iqx}u) - B(u) = E(u_0) - \frac{P^2(u_0)}{a(u_0)},$$

откуда в силу условия

$$E(u_0) < \frac{P^2(u_0)}{a(u_0)}$$

получаем

$$\frac{P^2(u_0)}{a(u_0)} - E(u_0) < B(u). \quad (12)$$

Но

$$B(u) < a(u_0) f\left(\frac{k_0^4}{\|u_0\|^2} \|u(\cdot, t)\|^4\right),$$

отсюда и из (12) заключаем, что

$$\frac{\|u_0\|^2}{k_0^4} f^{-1}\left(\frac{P^2(u_0)}{a^2(u_0)} - \frac{E(u_0)}{a(u_0)}\right) \leq \|u(\cdot, t)\|^4. \quad (13)$$

Далее из оценки $A(u(t)) \leq \text{const}$ в силу неравенства (8) и закона сохранения (3) имеем

$$\|u(\cdot, t)\|_4 \leq \text{const}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что

$$c_1 \leq \|u(\cdot, t)\|_4 \leq c_2,$$

где c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от t , $u(x, t)$, а зависящие от u_0 .

Теорема 2 доказана (см. также [10]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972. [2] J. Ginibre, G. Velo, *J. Funct. Anal.*, **32**:1 (1979), 1–32. [3] Ш. М. Насибов, *Дифференц. уравнения*, **16**:4 (1980), 660–670. [4] E. Gagliardo, *Ricerche Mat.*, **7** (1958), 102–137. [5] L. Nirenberg, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **13** (1959), 115–162. [6] H. A. Levine, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **124** (1980), 181–197. [7] E. J. M. Veling, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **3**:4 (2002), Article 63. [8] Ш. М. Насибов, *Докл. АН СССР*, **307**:3 (1989), 538–542. [9] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948. [10] Ш. М. Насибов, *Докл. АН СССР*, **285**:4 (1985), 807–811.

Ш. М. Насибов

Институт прикладной математики
Бакинского государственного университета
E-mail: nasibov_sharif@hotmail.com

Поступило

21.10.2008

Исправленный вариант

17.06.2010