Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Игнатъев, Ортогональные подмножества классических систем корней и коприсоединенные орбиты унипотентных групп, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 65–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:35:29

Ортогональные подмножества классических систем корней и коприсоединенные орбиты унипотентных групп

М. В. Игнатьев

Рассмотрен специальный класс коприсоединенных орбит максимальных унипотентных подгрупп в классических группах над конечным полем – орбиты, ассоциированные с ортогональными подмножествами в системах корней. Получена формула для размерности этих орбит в терминах группы Вейля, построены поляризации для канонических форм на орбитах. В качестве следствия описаны все возможные размерности неприводимых представлений таких унипотентных групп.

Библиография: 9 названий.

1. Введение и основные результаты. Пусть Φ – классическая система корней, p – достаточно большое простое число, k – алгебраическое расширение конечного поля из p элементов. Пусть G – классическая матричная группа над k с системой корней Φ , U – подгруппа, состоящая из всех унипотентных нижнетреугольных матриц из G , $\Phi^+ \subset \Phi$ – соответствующее множество положительных корней и $\mathfrak{u} = \text{Lie}(U)$.

Основным инструментом при описании неприводимых комплексных характеров группы U (над конечным полем $k = \mathbb{F}_q$) служит метод орбит (см. [1], [2]): характеры находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами коприсоединенного представления U в пространстве $\mathfrak{u}^*$, причем ряд задач теории представлений допускает трактовку в терминах орбит. Отметим, что задача полного описания орбит не решена до сих пор и представляется чрезвычайно сложной.

Пусть $D \subset \Phi^+$ – произвольное подмножество, состоящее из попарно ортогональных корней. Для произвольного набора ненулевых констант $\xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$ определим следующий элемент $\mathfrak{u}^*$:

$$f = f_{D,\xi} = \sum_{\beta \in D} \xi_\beta e_\beta^*$$

(здесь $e_\beta \in \mathfrak{u}$ – корневые векторы, а $e_\beta^* \in \mathfrak{u}^*$ – двойственные к ним). Через $\Omega = \Omega_{D,\xi}$ обозначим орбиту f относительно коприсоединенного представления группы U . Мы будем называть Ω орбитой, ассоциированной с подмножеством D , а f – канонической формой на ней.

Цель настоящей работы – вычислить размерность орбиты Ω , а также построить поляризацию для f . (Напомним, что *поляризацией* для произвольной линейной формы $\lambda \in \mathfrak{u}^*$ называется любая подалгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{u}$, удовлетворяющая условию $\lambda([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) = 0$ и максимальная среди таких подпространств. Поляризации играют ключевую роль в явной конструкции неприводимого представления, связанного с данной орбитой, см. [2; с. 274] для случая $k = \mathbb{F}_q$.) В качестве следствия мы определяем все возможные размерности неприводимых представлений группы U . Везде далее предполагается, что Φ имеет тип B_n , C_n или D_n (случай A_n был рассмотрен Пановым в статье [3]). Данная работа представляет собой обобщение результатов [4], где эти задачи были решены автором для случая $\Phi = B_n$ или D_n и ортогональных подмножеств специального вида.

Более подробно, в п. 2 мы вводим основные обозначения и предъявляем процедуру, которая по ортогональному подмножеству D строит некоторое подпространство $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}$ (см. (4) и (5)).

ТЕОРЕМА 1.1. *Подпространство $\mathfrak{p}$ является поляризацией для f .*

Используя связь между размерностью орбиты и коразмерностью поляризации [5; с. 117], а также индукцию по рангу Φ , мы доказываем в п. 3 формулу для размерности Ω (в случае алгебраически замкнутого поля). Точнее говоря, пусть $W = W(\Phi)$ – группа Вейля системы корней Φ и $\sigma \in W$ – инволюция вида

$$\sigma = \prod_{\beta \in D} r_\beta,$$

где r_β – отражение относительно гиперплоскости, ортогональной корню β . Пусть $l(\sigma)$ – длина σ в группе Вейля, т.е. длина редуцированного (самого короткого) разложения σ в произведение простых отражений, $s(\sigma) = |D|$ и ϑ – некоторый “дефект” (см. (9)).

ТЕОРЕМА 1.2. *Размерность орбиты Ω равна $\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta$.*

С помощью этой теоремы мы в п. 4 вычисляем все возможные размерности неприводимых представлений группы U в случае конечного поля. А именно, пусть $k = \mathbb{F}_q$, 2μ – максимально возможная размерность коприсоединенной орбиты группы U (размерность орбиты всегда четна). Она была вычислена Андре и Нето (см. [6; предложения 6.3, 6.6] и (10)).

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Группа U обладает неприводимым представлением размерности N тогда и только тогда, когда $N = q^l$, $0 \leq l \leq \mu$.*

Аналогичный результат для случая A_n доказан в работе [7].

Чтобы не загромождать изложение, мы также перенесли в п. 4 доказательства используемых в пп. 2 и 3 технических утверждений, связанных с детальным (но элементарным) перебором вариантов расположения корней из D .

Эти вопросы можно рассматривать и в более общем контексте. В произвольной (не обязательно классической; быть может, приводимой) системе корней Ψ выберем любое ортогональное подмножество $D \subset \Psi^+$. Пусть $\mathcal{U}$ – максимальная унитарная подгруппа в группе Шевалле с системой корней Ψ над полем k . Как и выше,

выбрав произвольный набор ненулевых констант ξ , мы можем определить коприсоединенную орбиту $\Omega = \Omega_{D,\xi}$ группы $\mathcal{U}$. Естественно сформулировать следующую гипотезу о размерности такой орбиты:

ГИПОТЕЗА 1.4. *Размерность орбиты Ω не зависит от набора ξ и не превосходит числа $l(\sigma) - s(\sigma)$, где $\sigma = \prod_{\beta \in D} r_\beta$ – инволюция в группе Вейля $W(\Psi)$.*

Таким образом, в данной работе гипотеза доказана для классических систем корней. Интересно было бы также определить, на сколько могут отличаться $\dim \Omega$ и $l(\sigma) - s(\sigma)$ для произвольной системы корней Ψ , а также выписать явные уравнения, которыми орбита Ω задается как алгебраическое многообразие (эта задача пока решена только для A_n в работе [3]).

2. Поляризация для формы f . Нам будет удобно представить Φ как подмножество в $\mathbb{R}^n$ (см. [8]): $\Phi = \pm\Phi^+$, где множество положительных корней Φ^+ имеет вид $\Phi^+ = \Phi_0^+ \cup \Phi_1^+$. Здесь $\Phi_0^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}$ и

$$\Phi_1^+ = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \Phi = D_n, \\ \{\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n\}, & \text{если } \Phi = B_n, \\ \{2\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n\}, & \text{если } \Phi = C_n \end{cases}$$

($\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$).

Пусть $m = 2n + 1$ для $\Phi = B_n$ и $m = 2n$ для $\Phi = C_n$ и D_n . Будем нумеровать строки и столбцы матрицы размера $m \times m$ индексами $1, 2, \dots, n, 0, -n, \dots, -2, -1$, пропуская индекс 0 в случае четного m , и через $e_{a,b}$ обозначать обычную матричную единицу. Алгебра $\mathfrak{u}$ может быть реализована как подалгебра в $\mathfrak{gl}_m(k)$, натянутая на векторы e_α , $\alpha \in \Phi^+$, где

$$\begin{aligned} e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} &= e_{j,i} - e_{-i,-j}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ e_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} &= e_{-j,i} - e_{-i,j}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ e_{\varepsilon_i} &= e_{0,i} - e_{-i,0}, & e_{2\varepsilon_i} = e_{-i,i}, & 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (1)$$

Везде далее мы предполагаем, что $\text{char } k = p$ не меньше, чем m . В этом случае экспоненциальное отображение $\exp(x) = \sum_{i=0}^n x^i/i!$, $x \in \mathfrak{u}$, корректно определено и взаимно однозначно, причем $U = \exp(\mathfrak{u})$ – максимальная унитарная подгруппа в G и $\mathfrak{u} = \text{Lie}(U)$. Группа U действует на $\mathfrak{u}$ с помощью присоединенного представления; сопряженное представление называется *коприсоединенным*. Мы будем обозначать результат коприсоединенного действия через $x.\lambda$, $x \in U$, $\lambda \in \mathfrak{u}^*$.

Пусть теперь $D \subset \Phi$ – произвольное ортогональное (т.е. состоящее из попарно ортогональных корней) подмножество, $\Omega = \Omega_{D,\xi} \subset \mathfrak{u}^*$ – ассоциированная с ним коприсоединенная орбита (для какого-то набора ненулевых констант $\xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$), $f = f_{D,\xi}$ – каноническая форма на этой орбите.

Везде далее мы без ограничения общности будем считать, что если $i \neq j$ и $\Phi = B_n$, то D не содержит корни ε_i и ε_j одновременно, а если $\Phi = C_n$, то D не содержит корни $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ и $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ одновременно. Действительно, имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. а) Пусть $\Phi = B_n$, $i < j$, $D \subset \Phi$ – ортогональное подмножество, содержащее корни $\varepsilon_i, \varepsilon_j$, $\xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$ – набор ненулевых констант и D', ξ' получаются из D, ξ удалением $\varepsilon_j, \xi_{\varepsilon_j}$ соответственно. Тогда $\Omega_{D, \xi} = \Omega_{D', \xi'}$.

б) Пусть $\Phi = C_n$, $D \subset \Phi$ – ортогональное подмножество, содержащее корни $\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j$, $\xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$ – набор ненулевых констант и D', ξ' получаются из D, ξ удалением $\varepsilon_i - \varepsilon_j, \xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ соответственно. Тогда $\Omega_{D, \xi} = \Omega_{D', \xi'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $f_{D', \xi'}$ – каноническая форма на орбите $\Omega_{D', \xi'}$ и $f' = \exp(c\varepsilon_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}) \cdot f_{D', \xi'}$ для некоторого $c \in k^*$. Тогда для любого $\alpha \in \Phi^+$ по определению

$$\begin{aligned} f'(e_\alpha) &= f_{D', \xi'}(\exp \operatorname{ad}_{-c\varepsilon_i - \varepsilon_j}(e_\alpha)) \\ &= f_{D', \xi'}(e_\alpha) - c \cdot f_{D', \xi'}(\operatorname{ad}_{e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}} e_\alpha) + \frac{1}{2} c^2 \cdot f_{D', \xi'}(\operatorname{ad}_{e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}}^2 e_\alpha) - \dots \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $[e_\alpha, e_\beta] = c_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in \Phi^+$, причем $c_{\alpha\beta} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta \in \Phi^+$. Поскольку $[e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}, e_{\varepsilon_j}] = c_0 e_{\varepsilon_i}$, $c_0 \in k^*$, то $f'(e_{\varepsilon_j}) = -\xi_{\varepsilon_j} \cdot c \cdot c_0$. В то же время, для любого $\alpha \neq \varepsilon_j$ из $f'(e_\alpha) \neq 0$ сразу следует, что существует такое $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, что $\alpha + N(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \in D \setminus \{\varepsilon_i, \varepsilon_j\}$. Если $N = 0$, то $\alpha \in D'$. Если $N > 0$, то скалярные произведения (α, ε_i) и (α, ε_j) равны $-N$ и N соответственно, что возможно лишь при $N = 1$ и $\alpha = -\varepsilon_i + \varepsilon_j \notin \Phi^+$.

Следовательно, если $c = -\xi_{\varepsilon_j} / (c_0 \cdot \xi_{\varepsilon_i})$, то $f' = f$, т.е. $\Omega_{D, \xi} = \Omega_{D', \xi'}$.

б) Пусть $f_{D', \xi'}$ – каноническая форма на орбите $\Omega_{D', \xi'}$ и $f' = \exp(c\varepsilon_{2\varepsilon_j}) \cdot f_{D', \xi'}$ для некоторого $c \in k^*$. Поскольку $[e_{2\varepsilon_j}, e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}] = c_0 e_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}$, $c_0 \in k^*$, то $f'(e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}) = -\xi_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \cdot c \cdot c_0$. В то же время, для любого $\alpha \neq \varepsilon_i - \varepsilon_j$ из $f'(e_\alpha) \neq 0$ сразу следует, что существует такое $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, что $\alpha + N \cdot 2\varepsilon_j \in D \setminus \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}$. Если $N = 0$, то $\alpha \in D'$. Если $N > 0$, то скалярные произведения $(\alpha, \varepsilon_i - \varepsilon_j)$ и $(\alpha, \varepsilon_i + \varepsilon_j)$ равны $2N$ и $-2N$ соответственно, что возможно лишь при $N = 1$ и $\alpha = -2\varepsilon_j \notin \Phi^+$.

Следовательно, если $c = -\xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} / (c_0 \cdot \xi_{\varepsilon_i + \varepsilon_j})$, то $f' = f$, т.е. $\Omega_{D, \xi} = \Omega_{D', \xi'}$.

Основная цель этого пункта – предъявить поляризацию для f , т.е. подалгебру в $\mathfrak{u}$, одновременно являющуюся максимальным f -изотропным подпространством. Для этого понадобятся еще несколько вспомогательных понятий.

Имея в виду (1), определим функции

$$\begin{aligned} \operatorname{col}: \Phi^+ &\rightarrow \{1, \dots, n\}: & \operatorname{col}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) &= \operatorname{col}(\varepsilon_i) = \operatorname{col}(2\varepsilon_i) = i, \\ \operatorname{row}: \Phi^+ &\rightarrow \{-n, \dots, n\}: & \operatorname{row}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) &= \mp j, \quad \operatorname{row}(\varepsilon_i) = 0, \quad \operatorname{row}(2\varepsilon_i) = -i, \end{aligned}$$

и для произвольных $-n \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq n$ множества

$$\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i(\Phi) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \operatorname{row}(\alpha) = i\}, \quad \mathcal{C}_j = \mathcal{C}_j(\Phi) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \operatorname{col}(\alpha) = j\}$$

назовем i -й строкой и j -м столбцом Φ^+ соответственно. Заметим, что, ввиду предложения 2.1, $|D \cap \mathcal{R}_i| \leq 1$ и $|D \cap \mathcal{C}_j| \leq 2$ для любого j (причем если $|D \cap \mathcal{C}_j| = 2$, то $D \cap \mathcal{C}_j = \{\varepsilon_j - \varepsilon_l, \varepsilon_j + \varepsilon_l\}$ и $\Phi = B_n$ или D_n).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\beta \in \Phi^+$. Корни $\alpha, \gamma \in \Phi^+$ назовем β -сингулярными, если их сумма равна β . Множество всех β -сингулярных корней обозначается $S(\beta)$ (см. [6], [7], [9]).

Легко понять, что сингулярные корни имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 S(\varepsilon_i - \varepsilon_j) &= \bigcup_{l=i+1}^{j-1} \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_l - \varepsilon_j\}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
 S(\varepsilon_i) &= \bigcup_{l=i+1}^n \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_l\}, \quad S(2\varepsilon_i) = \bigcup_{l=i+1}^n \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_i + \varepsilon_l\}, \quad 1 \leq i \leq n, \\
 S(\varepsilon_i + \varepsilon_j) &= \bigcup_{l=i+1}^{j-1} \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_j\} \cup \bigcup_{l=j+1}^n \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_j + \varepsilon_l\} \\
 &\cup \bigcup_{l=j+1}^n \{\varepsilon_j + \varepsilon_l, \varepsilon_j - \varepsilon_l\} \cup S_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$S_{ij} = \begin{cases} \{\varepsilon_i, \varepsilon_j\}, & \text{если } \Phi = B_n, \\ \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, 2\varepsilon_j\}, & \text{если } \Phi = C_n, \\ \emptyset, & \text{если } \Phi = D_n. \end{cases}$$

Для наших целей будет удобно представлять множество $S(\beta)$ в виде объединения $S(\beta) = S^+(\beta) \cup S^-(\beta)$, где

$$S^+(\beta) = \begin{cases} \{\varepsilon_i + \varepsilon_l, \quad i < l \leq n\}, & \text{если } \Phi = C_n \text{ и } \beta = 2\varepsilon_i, \\ S(\beta) \cap \mathcal{C}_{\text{col}(\beta)} & \text{иначе,} \end{cases} \tag{3}$$

а $S^-(\beta) = S(\beta) \setminus S^+(\beta)$ (обратим внимание, что в любом случае $S^+(\beta) \subset \mathcal{C}_{\text{col}(\beta)}$).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.3. Пусть $j_1, \dots, j_t$ – номера столбцов, в которых лежат корни из D . Обозначим $\mathcal{M} = \mathcal{M}_D = \bigcup_{i=0}^t \mathcal{M}_i$, где $\mathcal{M}_0 = \emptyset$ и для каждого $i = 1, \dots, t$

$$\mathcal{M}_i = \{\gamma \in S^-(\beta) \mid \beta \in D \cap \mathcal{C}_{j_i} \text{ и } \gamma, \beta - \gamma \notin \bigcup_{l=0}^{i-1} \mathcal{M}_l\}. \tag{4}$$

ПРИМЕР 2.4. Пусть $\Phi = D_7$, $D = \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_5, \varepsilon_2 \pm \varepsilon_6, \varepsilon_3 + \varepsilon_4\}$. Тогда $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$, где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 &= \{\varepsilon_2 \pm \varepsilon_5, \varepsilon_3 \pm \varepsilon_5, \varepsilon_4 \pm \varepsilon_5\} \cup \mathcal{C}_5, \\
 \mathcal{M}_2 &= \{\varepsilon_3 \pm \varepsilon_6, \varepsilon_4 \pm \varepsilon_6\} \cup \mathcal{C}_6, \quad \mathcal{M}_3 = \{\varepsilon_4 \pm \varepsilon_7\}.
 \end{aligned}$$

Определим теперь подпространство $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}$, которое впоследствии окажется поляризацией для канонической формы $f \in \Omega$. А именно, положим $\mathcal{P} = \Phi^+ \setminus \mathcal{M}$ и

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{D, \xi} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} k e_\alpha + \mathfrak{p}_0. \tag{5}$$

Здесь через $\mathfrak{p}_0$ мы обозначили подпространство, которое строится следующим образом. Предположим, что $\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j \in D$, $i < l < j$, $\varepsilon_l - \varepsilon_j, \varepsilon_l + \varepsilon_j \in \mathcal{M}_i$ и $D \cap \mathcal{R}_{-l} = \emptyset$; положим тогда $x = \xi_{\varepsilon_l + \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l + \varepsilon_j}$. По определению $\mathfrak{p}_0$ натянуто на все такие векторы x . В частности, если $\Phi = C_n$, то $\mathfrak{p}_0 = 0$ для любого D , как показывает пункт б) предложения 2.1.

ПРИМЕР 2.5. Пусть Φ и D такие же, как в предыдущем примере. Тогда $\mathfrak{p}_0$ натянуто на векторы

$$\begin{aligned} & \xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_5} \cdot e_{\varepsilon_2-\varepsilon_5} - \xi_{\varepsilon_1-\varepsilon_5} \cdot e_{\varepsilon_2+\varepsilon_5}, \\ & \xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_5} \cdot e_{\varepsilon_3-\varepsilon_5} - \xi_{\varepsilon_1-\varepsilon_5} \cdot e_{\varepsilon_3+\varepsilon_5}, \quad \xi_{\varepsilon_2+\varepsilon_6} \cdot e_{\varepsilon_3-\varepsilon_6} - \xi_{\varepsilon_2-\varepsilon_6} \cdot e_{\varepsilon_3+\varepsilon_6}. \end{aligned}$$

Нам потребуются еще два технических утверждения, которые будут также использованы в следующих пунктах. Пусть

$$\tilde{\Phi}^+ = \begin{cases} \Phi^+ \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{R}_0), & \text{если } D = B_n \text{ и } D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}, \\ \Phi^+ \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}), & \text{если } \emptyset \neq D \cap \mathcal{C}_1 \subset \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}, \\ \Phi^+ \setminus \mathcal{C}_1 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что с учетом пункта а) предложения 2.1 $D = (D \cap \mathcal{C}_1) \cup (D \cap \tilde{\Phi}^+)$.

Обозначим $\tilde{\Phi} = \pm \tilde{\Phi}^+$. На самом деле, $\tilde{\Phi}$ изоморфна системе корней, ранг которой меньше, чем ранг Φ . Точнее говоря, пусть

$$\Phi' = \begin{cases} D_{n-1}, & \text{если } \Phi = B_n, D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}, \\ B_{n-2}, C_{n-2}, D_{n-2}, & \text{если } \emptyset \neq D \cap \mathcal{C}_1 \subset \Phi_0^+, \\ & \text{где } \Phi = B_n, C_n, D_n \text{ соответственно,} \\ B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1}, & \text{в остальных случаях,} \\ & \text{где } \Phi = B_n, C_n, D_n \text{ соответственно.} \end{cases} \quad (7)$$

ЛЕММА 2.6. *Имеет место изоморфизм систем корней $\tilde{\Phi} \cong \Phi'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно построить биекцию $\pi: \tilde{\Phi}^+ \rightarrow \Phi'^+$, которая продолжалась бы до изометрического изоморфизма $\langle \tilde{\Phi}^+ \rangle_{\mathbb{R}} \rightarrow \langle \Phi'^+ \rangle_{\mathbb{R}}$.

Определим число m' для Φ' так же, как число m для Φ (см. начало пункта). Если оно четно, то положим $n' = m'/2$, а иначе $n = (m' - 1)/2$. Пронумеруем столбцы корней из $\tilde{\Phi}^+$ от 1 до n' , а строки – от $-n'$ до n' (пропуская 0, если m' четно). Получаем искомую биекцию π .

Той же буквой π будем обозначать соответствующий изоморфизм $\tilde{\mathfrak{u}} \rightarrow \mathfrak{u}'$, задаваемый правилом $e_\alpha \rightarrow e_{\pi(\alpha)}$, $\alpha \in \tilde{\Phi}^+$. (Здесь $\tilde{\mathfrak{u}} = \sum_{\alpha \in \tilde{\Phi}^+} k e_\alpha \subset \mathfrak{u}$, а $\mathfrak{u}' = \sum_{\alpha \in \Phi'^+} k e_\alpha \subset \mathfrak{gl}_{m'}(k)$ – алгебра Ли максимальной унитарной подгруппы U' в классической группе G' с системой корней Φ' .)

Обратимся вновь к формулам (2) и (3). Понятно, что если $\alpha + \gamma = \beta$ и $\alpha \in S^+(\beta)$, то $\gamma \in S^-(\beta)$ (и наоборот). Несложный перебор показывает, что если $\gamma \in S^-(\beta)$, то $\text{col}(\gamma) \geq \text{col}(\beta)$. Более того, в этом случае выполнено хотя бы одно из двух условий: $\text{row}(\gamma) = \text{row}(\beta)$, $\text{col}(\gamma) = \text{row}(\alpha)$ или $\text{row}(\gamma) = -\text{row}(\alpha)$, $\text{col}(\gamma) = -\text{row}(\beta)$ (здесь так же $\alpha = \beta - \gamma$).

ЛЕММА 2.7. *Пусть $\beta \in D \cap \mathcal{C}_j$, $\alpha \in S^+(\beta)$, $\gamma = \beta - \alpha \in \mathcal{M}_j$ и $\delta \in \Phi^+$. Если $D \cap \mathcal{C}_j = \{\beta\}$, то $\alpha + \delta \in D$ лишь при $\delta = \gamma$. Если же $|D \cap \mathcal{C}_j| = 2$ (тогда, автоматически, $\Phi \neq C_n$), то $\alpha + \delta \in D$ лишь при $\delta = \gamma$ в случае $\beta = \varepsilon_j - \varepsilon_l$ и при $\delta = (\varepsilon_j \pm \varepsilon_l) - \alpha$ в случае $\beta = \varepsilon_j + \varepsilon_l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что найдется такой $\beta' \in D \cap \mathcal{C}_i$, $i \neq j$, что $\alpha + \delta = \beta'$ (случай $i = j$ тривиален). Поскольку $i \neq j$, а $S^+(\beta) \subset \mathcal{C}_j$, $S^+(\beta') \subset \mathcal{C}_i$ (см. (3)), мы видим, что $\alpha \in S^-(\beta')$, а $\delta \in S^+(\beta')$. Кроме того, $j = \text{col}(\beta) = \text{col}(\alpha) \geq \text{col}(\beta') = i$, значит, $j > i$.

То, что $\alpha \notin \mathcal{M}_i$, означает, что $\delta \in \mathcal{M}_s$ для какого-то $s < i$ (см. (4)). В частности, существует $\beta'' \in D \cap \mathcal{C}_s$, для которого $\delta \in S^-(\beta)$; положим $\eta = \beta'' - \delta$. Если $\text{row}(\delta) = -\text{row}(\eta)$, $\text{col}(\delta) = -\text{row}(\beta'')$, то $i = \text{col}(\beta') = \text{col}(\delta) = -\text{row}(\beta'')$ и корни β' , β'' не ортогональны, чего быть не может. Отсюда $\text{row}(\delta) = \text{row}(\beta'')$, $\text{col}(\delta) = \text{row}(\eta)$.

Аналогично, если $\text{row}(\alpha) = -\text{row}(\delta)$, $\text{col}(\alpha) = \text{row}(\beta')$, то $j = \text{col}(\beta) = \text{col}(\alpha) = \text{row}(\beta')$ и корни β , β' неортогональны. Значит, $\text{row}(\alpha) = \text{row}(\beta')$, $\text{col}(\alpha) = \text{row}(\delta)$. Но тогда $i = \text{col}(\beta) = \text{col}(\alpha) = \text{row}(\delta) = \text{row}(\beta'')$ и корни β , β'' не ортогональны – противоречие. Следовательно, корня β' не существует.

Теперь все готово, чтобы доказать теорему 1.1. Доказательство непосредственно вытекает из определения поляризации и следующих двух предложений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Подпространство $\mathfrak{p}$ является подалгеброй в $\mathfrak{u}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\mathfrak{u}_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_1} k e_\alpha, \quad \mathfrak{u}_2 = \sum_{\alpha \in \Phi^+ \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \tilde{\Phi}^+)} k e_\alpha.$$

Заметим, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}$ как векторные пространства, где $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}_2$ и $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \tilde{\mathfrak{u}}$. Будем вести доказательство индукцией по рангу Φ (база индукции легко проверяется непосредственно).

Обозначим $D' = \pi(D \cap \tilde{\Phi}^+)$ и пусть $\mathfrak{p}'$ – подпространство в $\mathfrak{u}'$, построенное с помощью (5) на основе множества D' и набора ненулевых констант ξ' , получающегося из ξ удалением констант, соответствующих корням из $D \cap \mathcal{C}_1$ (если таковые найдутся).

В силу леммы 2.6 ранг Φ' меньше, чем ранг Φ , поэтому по предположению индукции $\mathfrak{p}'$ – подалгебра в $\mathfrak{u}'$. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{p}}$ – подалгебра в $\tilde{\mathfrak{u}}$ (а значит, и в $\mathfrak{u}$) как прообраз подалгебры относительно морфизма π . Легко видеть, что $\mathfrak{p}_1$ – коммутативный идеал, поэтому достаточно доказать, что $[\mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}_2] \subset \mathfrak{p}$. По построению, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{a} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \tilde{\Phi}^+)} k e_\alpha$, а $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_0$; рассмотрим подпространства $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ по отдельности.

1) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}] \subset \mathfrak{p}$. Действительно, если $\Phi = C_n$ и $D \cap \mathcal{C}_1 = \{2\varepsilon_1\}$, или $\Phi = B_n$ и $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}$, или $D \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$, или же $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$ для какого-нибудь j , то $\mathfrak{a} = 0$. Предположим, что $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}$; тогда $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{b} = 0$ и $\mathfrak{a}$ натянуто на векторы e_α , $\alpha \in (\mathcal{R}_{-j} \cup \mathcal{C}_j) \setminus \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$; во всяком случае, для них скалярные произведения (α, ε_j) больше нуля. В то же время, все корни вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $2 \leq i \leq n$, лежат в $\mathcal{M}_1$, поэтому для всякого e_γ , встречающегося в сумме $y = \sum y_\gamma e_\gamma \in \mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}$, все скалярные произведения $(\gamma + \alpha, \varepsilon_j)$ также будут положительны. Значит, $\gamma + \alpha \in \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$, т.е. $[e_\gamma, e_\alpha] \in k e_{\gamma+\alpha} \subset \mathfrak{p}$. Поскольку γ и α выбраны произвольно, $[y, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{p}$.

Аналогично, пусть $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$. Тогда $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{b} = 0$ и $\mathfrak{a}$ натянуто на векторы e_α , $\alpha \in \mathcal{R}_j \setminus \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}$; во всяком случае, для них скалярные произведения (α, ε_j) меньше нуля. В то же время, все корни вида $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, $2 \leq i \leq n$, лежат

в $\mathcal{M}_1$ (как и корень $2\varepsilon_j$ в случае $\Phi = C_n$), поэтому для всякого e_γ , встречающегося в сумме $y = \sum y_\gamma e_\gamma \in \mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}$, все скалярные произведения $(\gamma + \alpha, \varepsilon_j)$ также будут отрицательны. Значит, $\gamma + \alpha \in \mathcal{R}_j$, т.е. $[e_\gamma, e_\alpha] \in ke_{\gamma+\alpha} \subset \mathfrak{p}$. Поскольку γ и α выбраны произвольно, $[y, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{p}$.

2) $[\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}] \subset \mathfrak{p}$. Это доказано в лемме 4.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. $\mathfrak{p}$ – Максимальное f -изотропное подпространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что $\mathfrak{p}$ – f -изотропное подпространство. Пусть сначала $y, z \in \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} ke_\alpha$ (напомним, что $\mathcal{P} = \Phi^+ \setminus \mathcal{M}$). Тогда $[y, z] \in \sum_{\alpha, \gamma \in \mathcal{P}} ke_{\alpha+\gamma}$ (мы полагаем $e_\alpha = 0$ при $\alpha \notin \Phi^+$). Из $f([y, z]) \neq 0$ следует, что найдутся такие $\alpha, \gamma \in \mathcal{P}$, что $\alpha + \gamma \in D$. Однако это невозможно: по определению множества $\mathcal{M}$ (см. (4)), из каждой пары β -сингулярных корней, равных в сумме $\beta \in D$, хотя бы один попадает в $\mathcal{M}$, а значит, не лежит в $\mathcal{P}$.

Пусть теперь $x = \xi_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l + \varepsilon_j} \in \mathfrak{p}_0$, $i < l < j$ (тем самым, $\Phi \neq C_n$ и $\beta, \beta' \in D$, где $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\beta' = \varepsilon_i + \varepsilon_j$). Если $\alpha \in \mathcal{P}$, то ввиду пункта б) леммы 2.7 $\alpha + (\varepsilon_l \pm \varepsilon_j) \in D$ лишь при $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_l$. Но тогда, конечно, $f([x, e_\alpha]) = 0$. С другой стороны, если $x' \in \mathfrak{p}_0$ и $[x, x'] \neq 0$, то $x' = \xi_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_s - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_s + \varepsilon_j}$, $i < s < j$, очевидно; пусть, скажем, $s < l$. В этой ситуации $[x, x'] \in ke_{\varepsilon_s + \varepsilon_l}$. Но если $\varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$, то x' не может лежать в $\mathfrak{p}_0$ по определению (см. (5)).

2) Покажем теперь, что $\mathfrak{p}$ максимально (по включению) среди f -изотропных подпространств. Предположим, что существует $y \notin \mathfrak{p}$, для которого подпространство $\mathfrak{p} + ky$ изотропно. Пусть

$$y = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} y_\gamma e_\gamma, \quad y_\gamma \in k^*.$$

Выберем какой-нибудь корень γ_0 , для которого $y_{\gamma_0} \neq 0$ (т.е. e_{γ_0} встречается в разложении y); по построению $\gamma_0 \in \mathcal{M}_i$ для какого-нибудь i . Другими словами, существуют $\beta \in D \cap \mathcal{C}_i$ и $\alpha_0 \in S^+(\beta)$ такие, что $\beta = \alpha_0 + \gamma_0$, причем $\alpha_0 \in \mathcal{P}$, т.е. $e_{\alpha_0} \in \mathfrak{p}$. Тем самым, $[e_{\alpha_0}, e_{\gamma_0}] = c \cdot e_\beta$, $c \in k^*$. Используем лемму 2.7: если $D \cap \mathcal{C}_i = \{\beta\}$, то $\alpha_0 + \gamma \notin D$ при $\gamma \neq \gamma_0$, а значит,

$$f([e_{\alpha_0}, y]) = f([e_{\alpha_0}, y_{\gamma_0} e_{\gamma_0}]) = y_{\gamma_0} \cdot c \cdot \xi_\beta \neq 0.$$

В лемме 4.2 показано, что и в случае $|D \cap \mathcal{C}_i| = 2$ найдется вектор $x' \in \mathfrak{p} + ky$ такой, что $f[y, x'] \neq 0$. Мы видим, что в любом случае $\mathfrak{p}$ нельзя включить в изотропное подпространство большей размерности, что и завершает доказательство.

Теорема 1.1 полностью доказана. В принципе, в ряде случаев (например, для $\Phi = C_n$) она позволяет легко вычислить размерность орбиты, ассоциированной с ортогональным подмножеством. (С этого момента и до конца следующего пункта k – алгебраически замкнутое поле.)

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть $|D \cap \mathcal{C}_j| \leq 1$ для любого $1 \leq j \leq n$. Тогда $\dim \Omega = 2 \cdot |\mathcal{M}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, размерность орбиты равна удвоенной коразмерности любой поляризации любой точки на орбите [5; с. 117]. Но в данном случае коразмерность $\mathfrak{p}$ – это в точности $|\mathcal{M}|$, так как $\mathfrak{p}_0 = 0$.

Мы, однако, получим значительно более явную формулу для вычисления размерности орбиты, ассоциированной с *любым* ортогональным подмножеством (см. теорему 1.2). Для этого придется вовлечь в игру инволюции в группе Вейля.

3. Размерность орбиты Ω . Пусть D , ξ , Ω , $\mathfrak{p}$ определены, как в предыдущем пункте. Напомним, что мы ввели в рассмотрение систему корней Φ' , ранг которой меньше ранга Φ (см. (7)), подмножество $\tilde{\Phi}^+ \subset \Phi^+$, построили (биективное) отображение $\pi: \tilde{\Phi}^+ \rightarrow \Phi'^+$, продолжающееся до изоморфизма соответствующих систем корней (см. лемму 2.6), обозначили $D' = \pi(D \cap \tilde{\Phi}^+)$ и, наконец, определили подалгебру $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{u}'$ (см. доказательство предложения 2.8). Подчеркнем, что $D = (D \cap \mathcal{C}_1) \cup \pi^{-1}(D')$, причем эти множества не пересекаются.

Для краткости введем следующее обозначение:

$$r = \begin{cases} |\mathcal{C}_1| + |S^-(\varepsilon_1 \mp \varepsilon_j)|, & \text{если } D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j\}, \\ |\mathcal{C}_1| + \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } D \cap \mathcal{R}_{-l} = \emptyset\}, & \text{если } D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}, \\ |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P}| & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

ЛЕММА 3.1. *Размерности $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ связаны соотношением $\dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{p}' + r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве предложения 2.8 мы уже использовали разложение $\mathfrak{p}$ в сумму векторных пространств: $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}$, где

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}_1, \quad \mathfrak{u}_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P}} ke_\alpha, \quad \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}_2, \quad \mathfrak{u}_2 = \sum_{\alpha \in \Phi^+ \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \tilde{\Phi}^+)} ke_\alpha$$

и $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \sum_{\alpha \in \tilde{\Phi}^+} ke_\alpha$. Поскольку $\tilde{\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{p}'$, то

$$\dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{p}' = \dim \mathfrak{p}_1 + \dim \mathfrak{p}_2 = |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P}| + |\mathcal{P} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \tilde{\Phi}^+)| + \dim(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{u}_2).$$

Но это в точности r , как показывает тривиальное рассмотрение различных вариантов расположения корней из $D \cap \mathcal{C}_1$.

Пусть теперь W – группа Вейля системы корней Φ . Для произвольного $\alpha \in \Phi^+$ будем через $r_\alpha \in W$ обозначать отражение относительно гиперплоскости, ортогональной α . Рассмотрим следующую инволюцию (элемент второго порядка) в W :

$$\sigma = \sigma_D = \prod_{\beta \in D} r_\beta$$

(порядок, в котором взяты r_β , не важен, ибо они коммутируют). Таким же образом, стартуя с подмножества $D' \subset \Phi'^+$, определим инволюцию σ' в группе Вейля W' системы корней Φ' .

Через $l(\sigma)$ (соответственно $s(\sigma)$) будем обозначать длину редуцированного (самого короткого) разложения σ в произведения простых (соответственно произвольных) отражений. (Другими словами, $l(\sigma)$ – это просто длина σ в группе Вейля, а $s(\sigma) = |D|$.) Так же определим числа $l'(\sigma')$ и $s'(\sigma')$.

Для описания размерности орбиты Ω , ассоциированной с ортогональным подмножеством D , нам понадобится еще одна численная характеристика. Она может отличаться от нуля лишь в случае $\Phi = B_n$ или D_n и по определению равна

$\vartheta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$, где

$$\begin{aligned} d_1 &= \#\{(i, j, l, s) \mid i < l < s < j \text{ и } \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_l + \varepsilon_s \in D\}, \\ d_2 &= \#\{(i, j, l, s) \mid i < l < j < s \text{ и } \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_l - \varepsilon_s, \varepsilon_l + \varepsilon_s \in D\}, \\ d_3 &= \#\{(i, j) \mid \varepsilon_i + \varepsilon_j \in D \text{ и } i > l, \text{ где } D \cap \mathcal{R}_0 = \{\varepsilon_l\}\}, \\ d_4 &= \#\{(i, j) \mid \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j \in D \text{ и } i < j < l, \text{ где } D \cap \mathcal{R}_0 = \{\varepsilon_l\}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Обратим внимание, что два последних числа не равны нулю лишь при $\Phi = B_n$ и $D \cap \mathcal{R}_0 \neq \emptyset$; в этом случае $|D \cap \mathcal{R}_0| = 1$, как гласит предложение 2.1, а), так что числа d_3 и d_4 корректно определены.

Аналогичным образом, отталкиваясь от подмножества $D' \subset \Phi'^+$, определим ϑ' . Понятно, что $s(\sigma) = s'(\sigma') + |D \cap \mathcal{C}_1|$; доказательство теоремы 1.2 основано, по сути, на сравнении $l(\sigma)$ с $l'(\sigma')$ и ϑ с ϑ' соответственно.

Для произвольной инволюции $\tau \in W$ через Φ_τ обозначим множество положительных корней, которые под действием τ переходят в отрицательные: $\Phi_\tau = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \tau(\alpha) \in \Phi^-\}$. Как известно, $l(\tau) = |\Phi_\tau|$, так что нам нужно сравнить мощности множеств Φ_σ и $\Phi'_{\sigma'}$. Пусть $\tilde{D} = D \cap \tilde{\Phi}^+ = \pi^{-1}(D')$ и $\tilde{\sigma} \in W$ – инволюция, равная произведению отражений r_β , $\beta \in \tilde{D}$.

Поскольку в $\tilde{\Phi}^+$ по определению не содержится первый столбец, а также строки и столбцы всех корней из $D \cap \mathcal{C}_1$, то $\sigma(\alpha) = \tilde{\sigma}(\alpha)$ для любого $\alpha \in \tilde{\Phi}^+$. Следовательно, $\Phi_\sigma \cap \tilde{\Phi}^+ = \pi^{-1}(\Phi'_{\sigma'})$ и, тем самым, $|\Phi_\sigma \cap \tilde{\Phi}^+| = |\Phi'_{\sigma'}| = l'(\sigma')$, так что осталось исследовать действие σ на $\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}$. Тогда $l(\sigma) = l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)| + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данной ситуации $\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ (см. (6)). Здесь $\Phi_\sigma \cap \mathcal{C}_1 = S^+(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \cup \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}$. Если $\alpha \in \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$, то скалярное произведение (α, ε_j) больше нуля, а группа Вейля действует ортогональными преобразованиями, поэтому $(\sigma(\alpha), \varepsilon_1) > 0$, откуда следует, что $\sigma(\alpha) > 0$ (т.е. лежит в Φ^+). Если же $\alpha \in \mathcal{R}_j \setminus \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\} = S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)$, то $(\alpha, \varepsilon_j) < 0$, поэтому $(\sigma(\alpha), \varepsilon_1) < 0$ и $\sigma(\alpha) < 0$ (т.е. лежит в Φ^-). Итак,

$$l(\sigma) = |\Phi'_{\sigma'}| + |S^+(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)| + 1 + |S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)| = l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)| + 1,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.3. Пусть $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$. Тогда $l(\sigma) = l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей лемме, $\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ (см. (6)). Здесь $\Phi_\sigma \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_i, i < j\} \cup \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\} \cup S_1$, где S_1 пусто при $\Phi = D_n$, состоит из корня ε_1 при $\Phi = B_n$ и состоит из корня $2\varepsilon_1$ при $\Phi = C_n$; в любом случае получаем всего $|S^+(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| + 1$ корней.

Если $\alpha \in (\mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_{-j}) \setminus \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\} = S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)$, то $(\alpha, \varepsilon_j) > 0$, поэтому $(\sigma(\alpha), \varepsilon_1) < 0$ и $\sigma(\alpha) < 0$. Если же $\alpha \in \mathcal{R}_j$, то $(\alpha, \varepsilon_j) < 0$, $(\sigma(\alpha), \varepsilon_1) > 0$ и $\sigma(\alpha) > 0$. Итак,

$$l(\sigma) = |\Phi'_{\sigma'}| + |S^+(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| + 1 + |S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| = l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| + 1,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.4. а) Пусть $\Phi = B_n$ и $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}$. Тогда

$$l(\sigma) = l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1| + 2 \cdot \#\{\beta \in \tilde{D} \mid \text{row}(\beta) < 0\}.$$

б) Если $\Phi = C_n$ и $D \cap \mathcal{C}_1 = 2\varepsilon_1$, то $l(\sigma) = l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Здесь $\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{R}_0$. Ясно, что $\Phi_\sigma \cap \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1$. Поскольку ε_1 ортогонален всем остальным корням из $\mathcal{R}_0$, для $\alpha \in \mathcal{R}_0$ имеем $\sigma(\alpha) = \tilde{\sigma}(\alpha) = \pm \varepsilon_l < 0$ лишь при $\varepsilon_i + \varepsilon_l \in \tilde{D}$. Итак, $l(\sigma) = |\Phi'_\sigma| + |\mathcal{C}_1| + 2 \cdot \#\{\beta \in \tilde{D} \mid \text{row}(\beta) < 0\}$, что и требовалось доказать.

б) Очевидно: $\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1$ целиком лежит в Φ_σ .

Случай $|D \cap \mathcal{C}_1| = 2$ разобран в лемме 4.3.

Ключевым моментом в доказательстве теоремы 1.2 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть D, D', σ, σ' и r определены как ранее. Тогда

$$l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = l'(\sigma') - s'(\sigma') - 2\vartheta' + 2(|\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+| - r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости

$$\mathcal{F} = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta, \quad \mathcal{F}' = l'(\sigma') - s'(\sigma') - 2\vartheta'.$$

Доказательство заключается в переборе различных вариантов расположения корней из $D \cap \mathcal{C}_1$.

1) $D \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$. В этом случае, разумеется, $l(\sigma) = l'(\sigma')$, $s(\sigma) = s'(\sigma')$ и $\vartheta = \vartheta'$. С другой стороны, $\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1$ (см. (6)) и $r = |\mathcal{C}_1|$ (см. (8)), как и должно быть.

2) $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j\}$. Тогда $s(\sigma) = s'(\sigma')$, $\vartheta = \vartheta'$ и ввиду лемм 3.2, 3.3 $l(\sigma) = l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)| + 1$, поэтому $\mathcal{F} - \mathcal{F}' = |S(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)|$. В то же время, с учетом (6), (8) и того, что $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j} = \mathcal{C}_1 \cup S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \cup S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)$, получаем

$$|\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+| - r = |\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}| - (|S^-(\varepsilon_1 \mp \varepsilon_j)| + |\mathcal{C}_1|) = |S^-(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)|,$$

что ровно вдвое меньше, чем $|S(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)|$.

3) $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}$ ($\Phi = B_n$). Согласно (6), (8), (9) и лемме 3.4, а)

$$|\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+| - r = (|\mathcal{C}_1| + |S^-(\varepsilon_1)|) - |\mathcal{C}_1| = |S^-(\varepsilon_1)| = n - 1,$$

в то время как $l(\sigma) = l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1| + 2 \cdot \#\{\beta \in \tilde{D} \mid \text{row}(\beta) < 0\}$, $s(\sigma) = s'(\sigma') + 1$ и

$$\vartheta = \vartheta' + \#\{(i, j) \mid \varepsilon_i + \varepsilon_j \in D \text{ и } i > 1\} = \vartheta' + \#\{\beta \in \tilde{D} \mid \text{row}(\beta) < 0\}.$$

Следовательно, $\mathcal{F} - \mathcal{F}' = |\mathcal{C}_1| - 1 = (2n - 1) - 1 = 2(n - 1)$, как и должно быть.

4) $D \cap \mathcal{C}_1 = \{2\varepsilon_1\}$ ($\Phi = C_n$). Согласно (6), (8), (9) и лемме 3.4, б)

$$|\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+| - r = |\mathcal{C}_1| - |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P}| = (2n - 1) - n = n - 1,$$

в то время как $l(\sigma) = l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1|$, $s(\sigma) = s'(\sigma') + 1$ и $\vartheta = \vartheta' = 0$, так что $\mathcal{F} - \mathcal{F}' = |\mathcal{C}_1| - 1 = (2n - 1) - 1 = 2(n - 1)$, как и должно быть.

5) $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$ ($\Phi = B_n$ или D_n). Из (6) и (8) мы видим, что

$$\begin{aligned} |\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+| - r &= |\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}| - |\mathcal{C}_1| - \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } D \cap \mathcal{R}_{-l} = \emptyset\} \\ &= m - 4 - \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } D \cap \mathcal{R}_{-l} = \emptyset\} \\ &= m - 4 - \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } \tilde{D} \cap \mathcal{R}_{-l} = \emptyset\} \\ &= m - 4 - (j - 2) + \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } \tilde{D} \cap \mathcal{R}_{-l} \neq \emptyset\} \\ &= m - j - 2 + \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } \tilde{D} \cap \mathcal{R}_{-l} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $s(\sigma) = s'(\sigma') + 2$ и, сравнивая (9) с (11) (см. лемму 4.3), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F} - \mathcal{F}' &= |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_j| - 2 + 2 \cdot \#\{(l, s) \mid 1 < l < s < j \text{ и } \varepsilon_l + \varepsilon_s \in \tilde{D}\} \\ &= (m - 2) + (m - 2j) - 2 + 2 \cdot \#\{(l, s) \mid 1 < l < s < j \text{ и } \varepsilon_l + \varepsilon_s \in \tilde{D}\} \\ &= 2(m - j - 2) + 2 \cdot \#\{s \mid 1 < s < j \text{ и } \tilde{D} \cap \mathcal{R}_{-s} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Заменяя в последней строке s на l , получаем искомый результат.

Комбинируя это предложение с леммой 3.1 мы легко докажем теорему 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Индукция по рангу Φ (база индукции проверяется непосредственно). По предположению индукции $\dim \Omega' = l(\sigma') - s(\sigma') - 2\vartheta'$. Поскольку размерность орбиты равна удвоенной коразмерности любой поляризации любой точки на орбите [5; с. 117], в силу предложения 3.5 и леммы 3.1 размерность орбиты Ω равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{codim } \mathfrak{p} &= 2(|\Phi^+| - \dim \mathfrak{p}) = 2(|\Phi^+| - \dim \mathfrak{p}' - r) \\ &= 2(|\Phi^+| - r - |\Phi'^+| + \text{codim } \mathfrak{p}') = 2(|\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+| - r) + \dim \Omega' \\ &= l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta - (l'(\sigma) - s'(\sigma') - 2\vartheta') + l'(\sigma) - s'(\sigma') - 2\vartheta' \\ &= l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3.6. Пусть $\Phi = B_7$ и $D = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_6, \varepsilon_1 + \varepsilon_6, \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_7, \varepsilon_3 + \varepsilon_7, \varepsilon_4 + \varepsilon_5\}$; тогда $s(\sigma) = |D| = 6$, $l(\sigma) = |\Phi_\sigma| = 48$ (в этом нетрудно убедиться, вычислив Φ_σ непосредственно). С другой стороны, согласно (9)

$$\begin{aligned} d_1 &= \#\{(1, 6, 4, 5), (3, 7, 4, 5)\} = 2, \\ d_2 &= \#\{(1, 6, 3, 7)\} = 1, \quad d_3 = \#\{(3, 7), (4, 5)\} = 2, \quad d_4 = \#\{(1, 6)\} = 1 \end{aligned}$$

(ибо $D \cap \mathcal{R}_0 = \{\varepsilon_2\}$). Поэтому $\vartheta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6$ и, следовательно,

$$\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = 48 - 6 - 12 = 30.$$

4. Размерности представлений U и доказательства. Пусть теперь $k = \mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов (тогда U — конечная группа). Используя теорему 1.2, а также связь неприводимых конечномерных комплексных представлений группы U

с коприсоединенными орбитами, мы охарактеризуем все возможные размерности этих представлений. Обозначим через K алгебраическое замыкание поля k ; пусть $\mathfrak{u}_K$ – подалгебра в $\mathfrak{gl}_m(K)$, натянутая на векторы вида (1) и $U_K = \exp(\mathfrak{u}_K)$. Если $f \in \mathfrak{u}^* \subset \mathfrak{u}_K^*$, то через $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$ будем обозначать, как и раньше, ее орбиту относительно коприсоединенного представления группы U , а через $\Omega_K \subset \mathfrak{u}_K^*$ – относительно коприсоединенного представления группы U_K .

Согласно [2; предложение 2] имеется взаимно однозначное соответствие между коприсоединенными орбитами U и классами изоморфных неприводимых представлений U , причем если представление V соответствует орбите Ω , то $\dim V = \sqrt{\Omega} = q^{\dim \Omega_K / 2}$. Положим

$$\mu = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2}, & \text{если } \Phi = B_n \text{ или } C_n, \\ \frac{n(n-1)}{2}, & \text{если } \Phi = D_n \text{ и } n \text{ четно,} \\ \frac{(n-1)^2}{2}, & \text{если } \Phi = D_n \text{ и } n \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (10)$$

Максимально возможная размерность коприсоединенной орбиты Ω_K равна 2μ [6; предложения 6.3, 6.6]. Следствие 1.3 гласит, что группа U обладает неприводимым представлением размерности N в том и только в том случае, когда $N = q^l$, где $0 \leq l \leq \mu$. В силу предыдущих замечаний достаточно для произвольного такого l предъявить орбиту Ω_K размерности $2l$. Теорема 1.2 сводит задачу к построению ортогонального подмножества $D \subset \Phi^+$, для которого $l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = 2l$ (на самом деле, для всех подмножеств, которые мы будем строить, $\vartheta = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.3. Для произвольного $1 \leq j \leq [n/2]$ положим $\beta_j = \varepsilon_{2j-1} + \varepsilon_{2j}$ и обозначим $s_j = |S^+(\beta_j)|$. Несложный перебор показывает (см. (2)), что $s_1 + \dots + s_t = \mu$, где $t = [n/2]$ для $\Phi = B_n, C_n$ и $t = [(n-1)/2]$ для $\Phi = D_n$. Мы замечаем также, что если $\alpha \in \mathcal{C}_{2j-1}$, а $\text{row}(\alpha)$ пробегает значения $2j, 2j+1, \dots, n, 0, -n, \dots, -2j+1, -2j$ (в случае четного n индекс 0 пропускается), то величина $|S^+(\alpha)|$ пробегает значения $0, 1, \dots, s_j$ соответственно.

Итак, пусть $0 \leq l \leq \mu$. Если $l \leq s_1$, то, как мы только что указывали, можно выбрать такой корень $\beta \in \mathcal{C}_1$, что $|S^+(\beta)| = l$. Пусть $D = \{\beta\}$; тогда $\Phi_\sigma = \Phi_{r_\beta}$. Но для произвольного $\alpha \in \mathcal{C}_i$

$$\Phi_{r_\alpha} = \begin{cases} \mathcal{C}_i, & \text{если } \alpha = \varepsilon_i, \\ (S(\alpha) \cup \{\alpha, 2\varepsilon_i\}) \setminus \{\varepsilon_i - \varepsilon_j\}, & \text{если } \alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j \text{ и } \Phi = C_n, \\ S(\alpha) \cup \{\alpha\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В любом случае, Φ_{r_α} состоит ровно из $|S(\alpha)| + 1 = 2|S^+(\alpha)| + 1$ корней, так что $s(\sigma) = 1$, $l(\sigma) = 2|S^+(\beta)| + 1$ и $\vartheta = 0$, поэтому $l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = 2|S^+(\beta)| = 2l$.

Если же $l > s_1$, то выберем такое i , что $s_1 + \dots + s_i < l \leq s_1 + \dots + s_{i+1}$. Как было замечено выше, существует такой корень $\beta \in \mathcal{C}_{2i+1}$, что $|S^+(\beta)| = l - (s_1 + \dots + s_i)$. Положим $D = \{\beta_1, \dots, \beta_i, \beta\}$. Тогда $\Phi_\sigma = \bigcup_{j=1}^i \Phi_{r_{\beta_j}} \cup \Phi_{r_\beta}$, причем эти множества не

пересекаются. Значит,

$$\begin{aligned} l(\sigma) &= \sum_{j=1}^i |\Phi_{r_{\beta_j}}| + |\Phi_{r_{\beta}}| = \sum_{j=1}^i (2|S^+(\beta_j)| + 1) + (2|S^+(\beta)| + 1) \\ &= 2(s_1 + \dots + s_i + |S^+(\beta)|) + (i + 1) = 2l + |D|, \end{aligned}$$

поэтому $l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = 2l + |D| - |D| - 0 = 2l$, что завершает доказательство.

Конечно, отсюда автоматически следует, что над алгебраически замкнутым полем возможные размерности коприсоединенных орбит группы U — это $0, 2, \dots, 2\mu$.

Нам осталось доказать несколько технических лемм, используемых в доказательствах предложений 2.8, 2.9 и 3.5 при рассмотрении случая, когда D содержит два корня из какого-то столбца. Разумеется, наши рассуждения никак не будут зависеть от предыдущих результатов.

ЛЕММА 4.1. Пусть k — любое поле, $D \subset \Phi^+$ — ортогональное подмножество, $\xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$ — набор ненулевых констант из поля k и $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_2, \tilde{\mathfrak{p}}, \mathfrak{b}$ определены как в доказательстве предложения 2.8. Тогда $[\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}] \subset \mathfrak{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $|D \cap \mathcal{C}_1| \leq 1$, то $\mathfrak{b} = 0$. Предположим, что $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$ (а значит, $\Phi \neq C_n$ ввиду пункта б) предложения 2.1); в этом случае $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{a} = 0$. Пусть $x = \xi_{\varepsilon_1 + \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_1 - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \in \mathfrak{b}$, $1 < i < j$, и e_{γ_0} встречается в сумме $y = \sum y_\gamma e_\gamma \in \mathfrak{p}_2 + \tilde{\mathfrak{p}}$. Ясно, что ситуация $[x, e_{\gamma_0}] \neq 0$ возможна лишь при $\gamma_0 \in \mathcal{R}_i$, так как в рассматриваемом случае $\mathfrak{p} \cap \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_j} k e_\alpha = 0$ и $[x, x'] = 0$ для любого вектора $x' = \xi_{\varepsilon_1 + \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_1 - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l + \varepsilon_j}$, $1 < l < j$.

Итак, пусть $\gamma_0 = \varepsilon_l - \varepsilon_i$ для некоторого $1 < l < i$ (при $l = 1$ сразу получаем $[x, e_{\gamma_0}] \in \mathfrak{p}_1$). Тогда, как легко видеть, $[x, e_{\gamma_0}] = c x'$, $c \in k^*$, где $x' = \xi_{\varepsilon_1 + \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_1 - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l + \varepsilon_j}$. Но $x' \notin \mathfrak{b}$ лишь в одном случае: когда $D \cap \mathcal{R}_{-l} \neq \emptyset$, т.е. $\varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$ для некоторого $1 < s < l$ (см. определение $\mathfrak{p}_0$). Если $\gamma_0 \in \mathcal{M}_s$, то по определению $\mathfrak{p}_0$ e_{γ_0} не может входить в разложение какого-либо вектора из $\mathfrak{p}_0$, а потому не может встретиться в y . Следовательно, γ_0 не содержится в $\mathcal{M}_s$.

Но это означает (см. (4)), что или γ_0 , или $\varepsilon_s + \varepsilon_i = (\varepsilon_s + \varepsilon_l) - \gamma_0$ попадают в какое-то $\mathcal{M}_r$, где $1 < r < s$, т.е. D содержит один из корней вида $\varepsilon_r - \varepsilon_i$, $\varepsilon_r + \varepsilon_l$, $\varepsilon_r + \varepsilon_s$, $\varepsilon_r + \varepsilon_i$. В первых двух случаях, как и выше, из определения $\mathfrak{p}_0$ видно, что e_{γ_0} не входит в разложения какого-либо вектора из $\mathfrak{p}_0$, а потому не встречается в y . Корень $\varepsilon_r + \varepsilon_s$ не ортогонален корню $\varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$, а значит, не может лежать в D . Если же $\varepsilon_r + \varepsilon_i \in D$, то $D \cap \mathcal{R}_{-i} \neq \emptyset$, а потому сам вектор x не содержится в $\mathfrak{p}_0$ по определению этого подпространства.

Таким образом, $[x, e_{\gamma_0}] \subset \mathfrak{p}$. Поскольку γ_0 и x выбраны произвольно, $[y, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{p}$.

ЛЕММА 4.2. Пусть k — любое поле, $D \subset \Phi^+$ — ортогональное подмножество, $\xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$ — набор ненулевых констант из поля k и $\mathfrak{p}, y, \gamma_0, \mathcal{C}_i$ определены как в доказательстве предложения 2.9, причем $|D \cap \mathcal{C}_i| = 2$. Тогда существует такой $x' \in \mathfrak{p} + ky$, что $f([y, x']) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \cap \mathcal{C}_i = \{\beta, \beta'\}$, где $\beta = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\beta' = \varepsilon_i \mp \varepsilon_j$, и $\gamma_0 \in \mathcal{C}_l$, $i < l < j$; положим тогда $x = \xi_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l + \varepsilon_j}$. Ясно, что надо рассмотреть случай, когда векторы x и $y_0 = y_{\gamma_0} e_{\gamma_0} + y_{\gamma'_0} e_{\gamma'_0}$ пропорциональны и $x \notin \mathfrak{p}_0$; здесь мы

без ограничения общности полагаем $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\beta' = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ и $\gamma_0 = \varepsilon_l - \varepsilon_j$, $\gamma'_0 = \varepsilon_l + \varepsilon_j$. (Действительно, если x и y_0 не пропорциональны, то поскольку $\alpha_0 = \beta - \gamma_0 \in \mathcal{P}$, из леммы 2.7 вытекает, что уже $f([y, e_{\alpha_0}]) = \xi_\beta y \gamma'_0 - \xi_{\beta'} y \gamma_0 \neq 0$, так что в качестве x' можно взять e_{α_0} . Если же $y_0 = cx$, $c \in k$, и $x \in \mathfrak{p}_0$, то в разложение $y - cx \in \mathfrak{p} + ky$ не входят e_{γ_0} , $e_{\gamma'_0}$ и можно применить индукцию по длине разложения y .)

Это возможно лишь при $D \cap \mathcal{R}_l \neq \emptyset$; иначе говоря, существует такое $s < l$, что $\varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$. Мы замечаем, что $s > i$ – в самом деле, если $s < i$, то почему же корни γ_0 , γ'_0 лежат в $\mathcal{M}_i$, а не в $\mathcal{M}_s$? Причина может быть одна: корни $\varepsilon_s \pm \varepsilon_j = (\varepsilon_s + \varepsilon_l) - (\varepsilon_l \mp \varepsilon_j)$ попали в какое-то $\mathcal{M}_r$, $r < s$, что сразу противоречит ортогональности D (см. замечание перед леммой 2.7).

Итак, $i < s < l < j$. Рассмотрим корни $\gamma_1 = \varepsilon_s - \varepsilon_j$, $\gamma'_1 = \varepsilon_s + \varepsilon_j$. Если хоть один из них попал в какое-то $\mathcal{M}_r$, $r < i$, то подмножество D не ортогонально; то же в случае, когда $\varepsilon_i - \varepsilon_s = (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) - (\varepsilon_s \pm \varepsilon_j) \in \mathcal{M}_r$, $r < i$. Таким образом, $\gamma_1, \gamma'_1 \in \mathcal{M}_i$ (см. определение множества $\mathcal{M}$). Вектор $x' = \xi_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \cdot e_{\gamma_1} - \xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \cdot e_{\gamma'_1}$ обязательно лежит в $\mathfrak{p}_0$: иначе $D \cap \mathcal{R}_s \neq \emptyset$, что противоречит ортогональности D . Но в таком случае $f([x, x']) = f(2\xi_\beta \xi_{\beta'} e_{\varepsilon_s + \varepsilon_l}) = 2 \cdot \xi_\beta \cdot \xi_{\beta'} \cdot \xi_{\varepsilon_s + \varepsilon_l} \neq 0$, а потому, как показывает лемма 2.7, и $f([y, x']) = f([x, x']) \neq 0$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\Phi = B_n$ или D_n и $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$. Тогда

$$\begin{aligned} l(\sigma) = l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_j| + 4 \cdot \#\{(l, s) \mid 1 < l < s < j, \text{ у } \varepsilon_l + \varepsilon_s \in \tilde{D}\} \\ + 2 \cdot \#\{(l, s) \mid 1 < l < j < s \text{ у } \varepsilon_l - \varepsilon_s, \varepsilon_l + \varepsilon_s \in \tilde{D}\} \\ + 2 \cdot \#\{l \mid 1 < l < j \text{ у } \varepsilon_l \in \tilde{D}\} \end{aligned} \quad (11)$$

(последнее слагаемое равно нулю или двум).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в леммах 3.2, 3.3, $\Phi^+ \setminus \tilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ (см. (6)). Ясно, что $\mathcal{C}_1 \subset \Phi_\sigma$. Обозначим для краткости $\sigma_1 = r_{\varepsilon_1 - \varepsilon_j} r_{\varepsilon_1 + \varepsilon_j}$ (тем самым, $\sigma = \sigma_1 \tilde{\sigma}$). Исследуем подробно, как действуют σ_1 и $\tilde{\sigma}$ на корни из $\mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$. Если $\alpha = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \in \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$, то $\sigma_1(\alpha) = \varepsilon_i \mp \varepsilon_j > 0$, а если $\alpha = \varepsilon_j \pm \varepsilon_l \in \mathcal{C}_j$, то $\sigma_1(\alpha) = -\varepsilon_j \pm \varepsilon_l < 0$ (аналогично, $\sigma_1(\varepsilon_j) = -\varepsilon_j < 0$). Таким образом, $\Phi_{\sigma_1} \setminus \tilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j$. Выясним, как влияют на ситуацию корни из $\tilde{D}$: предположим, что $\tilde{D}$ изначально пусто, и будем добавлять туда корни, изучая, как при этом изменяется $|\Phi_\sigma \setminus \tilde{\Phi}^+|$ (ввиду ортогональности множества D добавлять корни в $\tilde{D}$ можно независимо и в любом порядке).

Пусть $\beta = \varepsilon_l + \varepsilon_s \in \tilde{D}$, где $1 < l < s < j$. Понятно, что $r_\beta \sigma_1(\alpha) = \sigma_1(\alpha) < 0$ для любого $\alpha \in \mathcal{C}_j$. В то же время, четыре корня из $\mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ под действием $r_\beta \sigma_1$ становятся отрицательными: $\varepsilon_l \pm \varepsilon_j$ и $\varepsilon_l \pm \varepsilon_s$ переходят в $-\varepsilon_s \pm \varepsilon_j$ и $-\varepsilon_l \pm \varepsilon_j$ соответственно. Значит, каждый корень $\beta \in \tilde{D}$ такого вида увеличивает значение $|\Phi_\sigma \setminus \tilde{\Phi}^+|$ на четыре.

Пусть теперь $\beta = \varepsilon_l - \varepsilon_s, \beta' = \varepsilon_l + \varepsilon_s \in \tilde{D}$, где $1 < l < j < s$. В этом случае под действием $r_\beta r_{\beta'} \sigma_1$ корни $\varepsilon_l \pm \varepsilon_j \in \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ переходят в отрицательные корни $-\varepsilon_l \pm \varepsilon_j$, корни $\varepsilon_j \pm \varepsilon_s$ переходят в корни $-\varepsilon_j \mp \varepsilon_s$ (тоже отрицательные, как и под действием σ_1) и $r_\beta r_{\beta'} \sigma_1(\alpha) = \sigma_1(\alpha)$ для остальных $\alpha \in \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$. Значит, каждая такая пара корней $\beta, \beta' \in \tilde{D}$ увеличивает значение $|\Phi_\sigma \setminus \tilde{\Phi}^+|$ на два.

Если $\beta = \varepsilon_l \in \tilde{D}$, где $1 < j < l$, то корни $\varepsilon_l \pm \varepsilon_j \in \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ переходят под действием $r_\beta \sigma_1$ в отрицательные корни $-\varepsilon_l \mp \varepsilon_j$ и $r_\beta \sigma_1(\alpha) = \sigma_1(\alpha)$ для остальных

$\alpha \in \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$. Значит, каждый корень $\beta \in \tilde{D}$ такого вида (а их не больше одного) увеличивает значение $|\Phi_\sigma \setminus \tilde{\Phi}^+|$ на два.

Если же $\beta = \varepsilon_l - \varepsilon_s \in \tilde{D}$, где $1 < l < j < s$, то под действием $r_\beta \sigma_1$ корень $\varepsilon_l + \varepsilon_j \in \mathcal{R}_j$ переходит в отрицательный корень $-\varepsilon_j + \varepsilon_s$, но зато корень $\varepsilon_j + \varepsilon_s$ переходит в положительный корень $\varepsilon_l - \varepsilon_j$ (на остальные корни из $\mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ элементы $r_\beta \sigma_1$ и σ_1 действуют одинаково), так что $|\Phi_\sigma \setminus \tilde{\Phi}^+|$ не изменяется. Легко видеть, что любые другие варианты расположения корней из $\tilde{D}$ вообще не влияют на действие элемента σ на $\mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$. Это завершает доказательство.

В заключение отметим, что леммы 4.1, 4.2 (равно как и предложения 2.8, 2.9, а значит, и сама теорема 1.1) действительно верны для любого поля k – как достаточно большой положительной, так и нулевой характеристики (в самом деле, характеристика поля никак не используется в их доказательстве). В частности, у нас есть способ построения поляризации для орбит, ассоциированных с ортогональными подмножествами над полем вещественных чисел $k = \mathbb{R}$, что играет важную роль в конструкции неприводимых унитарных представлений соответствующих нильпотентных групп Ли (см., например, [1; с. 182]).

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А. Н. Панову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Кириллов, *Лекции по методу орбит*, Университетская серия, **10**, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [2] D. Kazhdan, “Proof of Springer’s hypothesis”, *Israel J. Math.*, **28**:4 (1977), 272–286.
- [3] А. Н. Панов, “Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединённые орбиты”, *Вопросы теории представлений алгебр и групп*. 16, Зап. научн. сем. ПОМИ, **349**, ПОМИ, СПб., 2007, 150–173.
- [4] М. В. Игнатьев, “Базисные подсистемы в системах корней B_n и D_n и ассоциированные коприсоединённые орбиты”, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2008, № 3, 124–148.
- [5] B. Srinivasan, *Representations of Finite Chevalley Groups. A Survey*, Lecture Notes in Math., **764**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1974.
- [6] C. A. M. André, A. M. Neto, “Super-characters of finite unipotent groups of types B_n , C_n and D_n ”, *J. Algebra*, **305**:1 (2006), 394–429.
- [7] S. Mukherjee, *Coadjoint orbits for A_{n-1}^+ , B_n^+ and D_n^+* , [arXiv: math.RT/0501332](https://arxiv.org/abs/math.RT/0501332).
- [8] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972.
- [9] C. A. M. André, “Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group”, *J. Algebra*, **176**:3 (1995), 959–1000.

М. В. Игнатьев

Самарский государственный университет
E-mail: mihail.ignatev@gmail.com

Поступило

20.10.2008