Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами на классах сверток аналитических периодических функций, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 755–762

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:02:32

УДК 517.51

О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами на классах свертков аналитических периодических функций

А. В. Покровский

Для непрерывной 2π -периодической вещественной функции $K(t)$, амплитуды гармоник которой убывают, начиная с заданного номера $n \in \mathbb{N}$, не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $q \in (0, 1)$, найдены точные верхние оценки q , обеспечивающие выполнение для $K(t)$ условия Нады N_n^* .

Библиография: 6 названий.

Введение. Настоящая заметка посвящена решению следующей задачи: для заданного натурального числа n определить точную верхнюю грань тех действительных $q \in (0, 1)$, при которых условие Нады N_n^* выполняется для любой вещественной 2π -периодической функции $K(t)$ на действительной прямой $\mathbb{R}$, амплитуды гармоник которой положительны, начиная с номера n , и убывают не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем q . В сочетании с известными результатами С. М. Никольского решение этой задачи позволяет выделять 2π -периодические аналитические функции $K(t)$, для которых возможность получения точных значений величин наилучшего приближения в равномерной метрике или в среднем тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ с действительными коэффициентами порожденных ядром $K(t)$ сверточных классов определяется только по априорной информации о скорости убывания амплитуд гармоник рассматриваемого ядра.

Основной результат работы сформулирован в приводимой ниже теореме 1, доказательство которой проводится по следующей схеме: сначала устанавливается существование действительного числа $\alpha \in [0, \pi)$, тригонометрического полинома $T_{n-1, K, \alpha}(t)$ степени не выше $n-1$ и аналитической функции $W_{n, K, \alpha}(t)$, для которых справедливо тождество $K(t) - T_{n-1, K, \alpha}(t) \equiv \cos(nt - \alpha)W_{n, K, \alpha}(t)$, $t \in \mathbb{R}$; затем с помощью анализа функции $W_{n, K, \alpha}(t)$ выделяется ограничение на знаменатель геометрической прогрессии q , обеспечивающее выполнение для ядра $K(t)$ условия N_n^* ; и, наконец, выводятся формулы для нахождения точных значений рассматриваемых величин наилучших приближений на классах свертков. Реализация первого и третьего из этих этапов представляет в значительной степени воспроизведение хорошо известных рассуждений (см., например, [1], [2]), и основная сложность в доказательстве теоремы 1 связана с анализом функции $W_{n, K, \alpha}(t)$. В нашей работе она преодолевается за счет представления этой функции в виде абсолютно и равномерно сходящегося функционального ряда, члены которого принимают, вообще говоря,

комплексные значения. Именно этот прием, несмотря на чисто вещественный характер рассматриваемой задачи, позволяет получить результат, точность которого иллюстрируется построением дополняющих его примеров.

Задача о наилучшем приближении тригонометрическими полиномами на классах сверток периодических функций подробно изучена прежде всего для классов, порожденных ядрами конечной гладкости (см., например, [1]–[3], комментарии и ссылки в [4] и [5]), и наш интерес к ней в значительной степени вызван появлением работы [5], где рассматривается случай аналитических ядер. В частности, приводимое ниже следствие 1 усиливает теорему 3 из [5]. Отметим также, что в [5] содержатся достаточно подробные комментарии по поводу истории вопроса, отражающие его текущее состояние, с соответствующими ссылками.

1. Определения и формулировки основных результатов. Пусть $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ – тождественно не равная нулю последовательность неотрицательных чисел такая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k$ сходится, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, 2\pi)$, и пусть $K(t)$ – непрерывная 2π -периодическая функция (ядро), заданная формулой

$$K(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kt - \alpha_k), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Как обычно, $L = L[0, 2\pi]$ – линейное пространство, состоящее из всех функций $f(t)$, измеримых на отрезке $[0, 2\pi]$, для которых конечна норма $\|f\|_L := \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$, $C = C[0, 2\pi]$ – линейное пространство, состоящее из всех непрерывных функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(0) = f(2\pi)$; норма функции $f(t)$ в этом пространстве определяется равенством $\|f\|_C := \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)|$. Через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$ мы обозначаем соответственно множества целых положительных (натуральных) и целых неотрицательных чисел. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $m < n$. Обозначим

$$H_L^m := \left\{ f \in L : \|f\|_L \leq 1, \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos kt}{\sin kt} dt = 0, k = 0, 1, \dots, m \right\},$$

$$H_C^m := \left\{ f \in C : \|f\|_C \leq 1, \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos kt}{\sin kt} dt = 0, k = 0, 1, \dots, m \right\}$$

и рассмотрим класс L_K^m , состоящий из всех 2π -периодических функций $f(t)$, представимых на отрезке $[0, 2\pi]$ в виде

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t-s) \varphi(s) ds, \quad (2)$$

где $\varphi \in H_L^m$. Множество всех 2π -периодических функций $f(t)$, представимых на $[0, 2\pi]$ в виде (2) с $\varphi \in H_C^m$ обозначим через C_K^m .

Мы рассматриваем задачу о нахождении величин наилучшего приближения функциональных классов L_K^m и C_K^m множеством $\mathcal{T}(n-1)$, состоящим из всех тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, в метриках соответственно пространств L и C :

$$E_n(L_K^m)_L := \sup_{f \in L_K^m} \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}(n-1)} \|f - T_{n-1}\|_L,$$

$$E_n(C_K^m)_C := \sup_{f \in C_K^m} \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}(n-1)} \|f - T_{n-1}\|_C.$$

Напомним (см., например, [4; гл. 4]), что ядро $K(t)$ принадлежит к классу Никольского A_n^* (удовлетворяет условию Никольского A_n^*), если существует натуральное число $n^* \geq n$ и тригонометрический полином $T_{n-1}^*(t)$ степени не выше $n-1$ такие, что для функции $\varphi_*(t) := \text{sign}[K(t) - T_{n-1}^*(t)]$ почти всюду выполняется равенство $\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t)$. В этом случае (см. [6; п. 50]) $T_{n-1}^*(t)$ является полиномом наилучшего приближения в среднем ядра $K(t)$ тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$: $\|K - T_{n-1}^*\|_L = E_n(K) := \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}(n-1)} \|K - T_{n-1}\|_L$. Следуя работе [4; с. 309], мы говорим, что ядро $K(t)$ принадлежит к классу Нады N_n^* (удовлетворяет условию Нады N_n^*), если существуют тригонометрический полином $T_{n-1}^*(t)$ степени не выше $n-1$ и точка $s \in [0, \pi/n)$ такие, что разность $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ меняет знак на $[0, 2\pi)$ в точках вида $s + k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$, и только в них. Из приведенных определений вытекает включение $N_n^* \subset A_n^*$. Ядра $K \in A_n^*$ играют важную роль в задачах приближения порожденных ими классов сверток тригонометрическими полиномами, которая выражается следующей теоремой Никольского (см. [4; теорема 4.3.3]).

ТЕОРЕМА А. Пусть $K \in A_n^*$. Тогда для всех $m = 0, 1, \dots, n-1$ справедливы равенства $E_n(L_K^m)_L = E_n(C_K^m)_C = \pi^{-1} E_n(K)_L$.

Чтобы сформулировать основной результат работы введем следующие обозначения: если $n \in \mathbb{N}$ и $q \in (0, 1)$, то $D_{n,q}$ – множество всех ядер $K(t)$ вида (1), для которых выполнена цепочка неравенств

$$\rho_n \geq q^{-1} \rho_{n+1} \geq q^{-2} \rho_{n+2} \geq \dots > 0,$$

q_n – корень уравнения $x^{2n} = (1-3x)/(2-2x)$ на отрезке $[0, 1/3]$. Поскольку функция $y = x^{2n}$ возрастает на $[0, 1/3]$, а функция $y = (1-3x)/(2-2x)$ убывает на этом отрезке, то величина q_n определена единственным образом, при этом, очевидно, последовательность $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ возрастает и выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1/3$.

В принятых обозначениях имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое ядро $K(t)$ вида (1), принадлежащее классу D_{n,q_n} , удовлетворяет условию N_n^* , и для него существует единственное $\alpha \in [0, \pi)$, при котором выполнено равенство

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{n+2nj} \sin(\alpha(2j+1) - \alpha_{n(2j+1)}) = 0, \quad (3)$$

при этом для всех $m = 0, 1, \dots, n-1$ справедливы соотношения

$$E_n(L_K^m)_L = E_n(C_K^m)_C = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \rho_{(2j+1)n}}{2j+1} \cos((2j+1)\alpha - \alpha_{(2j+1)n}) \right|. \quad (4)$$

Если $q \in (q_n, 1)$, то класс $D_{n,q}$ содержит ядра, для которых условие A_n^* не выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что присутствующее в определении класса D_{n,q_n} условие положительности амплитуд гармоник входящих в него ядер (начиная с номера n) в доказательстве первого утверждения теоремы 1 не используется.

Приведем одно следствие, вытекающее из этой теоремы. Для его формулировки подсчитаем значение q_1 , равное, как мы знаем, единственному корню уравнения $x^2 = (1 - 3x)/(2 - 2x)$ в интервале $(0, 1/3)$. Преобразуя это уравнение к виду $2x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$, и замечая, что $x_0 = -1$ является его корнем, находим два других корня: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}/2$. Поскольку интересующий нас корень лежит в интервале $(0, 1/3)$, то $q_1 = 1 - \sqrt{2}/2 = 0,292893 \dots$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $0 < q \leq 1 - \sqrt{2}/2$ и $K(t)$ – ядро вида (1), принадлежащее классу $D_{1,q}$, то при каждом $n \in \mathbb{N}$ оно удовлетворяет условию N_n^* и справедливы равенства (5), где α – (единственный) корень уравнения (3) на промежутке $[0, \pi)$. При $q \in (1 - \sqrt{2}/2, 1]$ существуют ядра $K \in D_{1,q}$, для которых условие A_1^* не выполнено.

Как уже упоминалось выше, следствие 1 усиливает теорему 3 из работы [5], в которой показано, что при $q < q_* = 0,280647 \dots$ каждое ядро $K \in D_{1,q}$ удовлетворяет условию N_n^* для всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Вспомогательный результат. Ключевую роль в доказательстве теоремы 1 играет следующая лемма, в которой, как обычно, i – мнимая единица.

ЛЕММА 1. Пусть $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – ядро, заданное равенством (1), $n \in \mathbb{N}$, и пусть ряд $\sum_{j=1}^{\infty} j \rho_{k+2nj}$ сходится при всех $k = 1, \dots, 2n$. Тогда существует действительное $\alpha \in [0, \pi)$, удовлетворяющее равенству (3), и тригонометрический полином $T_{n-1,f,\alpha} \in \mathcal{T}(n-1)$, для которых выполнено тождество

$$K(t) - T_{n-1,K,\alpha}(t) \equiv \cos(nt - \alpha) W_{n,K,\alpha}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} W_{n,K,\alpha}(t) := & \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{n+2nj} \exp[i(\alpha(2j+1) - \alpha_{n+2nj})] \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{k+n+2nj} \cos(kt + \alpha(2j+1) - \alpha_{k+n+2nj}). \end{aligned} \quad (6)$$

Более того, для существования при заданном $\alpha \in \mathbb{R}$ тригонометрического полинома степени не выше $n-1$, интерполирующего ядро $K(t)$ во всех нулях функции $\cos(nt - \alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$\sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \rho_{k+2nj} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{k+2nj}$$

следует, что присутствующее в лемме 1 условие $\sum_{j=1}^{\infty} j \rho_{k+2nj} < \infty$, $k = 1, \dots, 2n$, равносильно сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{k+2nj}$.

Обозначим $a_k = \rho_k \cos \alpha_k$, $b_k = \rho_k \sin \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, и сделаем замену переменной $\tau = t - \alpha/n$. Тогда ряд Фурье функции $K(\tau + \alpha/n)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \left(\tau + \frac{\alpha}{n} \right) + b_k \sin k \left(\tau + \frac{\alpha}{n} \right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1 \cos k\tau + b_k^1 \sin k\tau),$$

где $a_k^1 = a_k \cos(k\alpha/n) + b_k \sin(k\alpha/n)$, $b_k^1 = -a_k \sin(k\alpha/n) + b_k \cos(k\alpha/n)$. Определяя числа $a_k^2 := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_{k+2nj}^1$, $b_k^2 := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j b_{k+2nj}^1$, $k \in \mathbb{N}$, и производя очевидные преобразования, получаем равенства

$$\begin{aligned} & 2 \cos n\tau \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}^2 \cos k\tau \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}^2 \cos(k-n)\tau + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}^2 \cos(k+n)\tau \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1} a_{k+n}^2 \cos(k-n)\tau + a_{3n}^2 \cos n\tau + \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + a_{k+2n}^2) \cos k\tau \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1} a_{k+n}^2 \cos(k-n)\tau - a_n^2 \cos n\tau + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 \cos k\tau - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^1 \cos k\tau, \end{aligned}$$

откуда

$$2 \cos n\tau \left(\frac{a_n^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}^2 \cos k\tau \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 \cos k\tau - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^1 \cos k\tau + \sum_{k=1}^{2n-1} a_{k+n}^2 \cos(k-n)\tau. \quad (7)$$

Точно таким же образом получаем равенство

$$2 \cos n\tau \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+n}^2 \sin k\tau = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^1 \sin k\tau - \sum_{k=1}^{n-1} b_k^1 \sin k\tau + \sum_{k=1}^{2n-1} b_{k+n}^2 \sin(k-n)\tau - b_n^2 \sin n\tau. \quad (8)$$

Заметим, что

$$b_n^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j b_{n+2nj}^1 = - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{n+2nj} \sin(\alpha(2j+1) - \alpha_{(2j+1)n}) =: w(\alpha).$$

Поскольку $w(0) = -w(\pi)$, найдется такое значение $\alpha \in [0, \pi)$, при котором $b_n^2 = w(\alpha) = 0$. В дальнейшем мы считаем, что α выбрано именно таким образом. Тогда, складывая (7) и (8) и учитывая выбор α и чебышевность пространства $\mathcal{T}(n-1)$, получаем существование единственного полинома $T_{n-1,K,\alpha} \in \mathcal{T}(n-1)$, для которого выполняется цепочка равенств

$$\begin{aligned} & K(t) - T_{n-1,K,\alpha}(t) \\ &= 2 \cos n\tau \left(\frac{a_n^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+n}^2 \cos k\tau + b_{k+n}^2 \cos k\tau) \right) \\ &= 2 \cos n\tau \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_{n+2nj}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (a_{k+n+2nj}^1 \cos k\tau + b_{k+n+2nj}^1 \sin k\tau) \right) \\ &= 2 \cos n\tau \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{n+2nj} \cos \left(\frac{\alpha(n+2nj)}{n} \right) - \alpha_{n+2nj} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{k+n+2nj} \cos \left(k\tau + \frac{\alpha(k+n+2nj)}{n} \right) - \alpha_{k+n+2nj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos n\tau \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{n+2nj} \cos(\alpha(2j+1) - \alpha_{(2j+1)n}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{n+2nj} \sin(\alpha(2j+1) - \alpha_{(2j+1)n}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{k+n+2nj} \cos\left(k\tau + \frac{\alpha(k+n+2nj)}{n}\right) - \alpha_{k+n+2nj} \right) \\
&= 2 \cos(nt - \alpha) \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{n+2nj} \exp[i(\alpha(2j+1) - \alpha_{(2j+1)n})] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{k+n+2nj} \cos(kt + \alpha(2j+1) - \alpha_{k+n+2nj}) \right).
\end{aligned}$$

Первое утверждение леммы установлено. Второе утверждение фактически установлено в [2; с. 944–945] и представляет по сути переформулировку известной леммы М. Г. Крейна, согласно которой полином $T_{n-1, K, \alpha} \in \mathcal{T}(n-1)$ интерполирует ядро $K(t)$ во всех нулях функции $\cos(nt - \alpha)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k K(\alpha/n + \pi/(2n) + (k\pi)/n) = 0$, дополненное вычислением последней суммы:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k K\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = 2n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \rho_{n+2nj} \sin(\alpha(2j+1) - \alpha_{n(2j+1)}).$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $q \in (0, 1)$, $K(t)$ – ядро из класса $D_{n,q}$, заданное равенством (1). По лемме 1 существует действительное $\alpha \in [0, \pi)$ и тригонометрический полином $T_{n-1, K, \alpha} \in \mathcal{T}(n-1)$, для которых выполнены равенство (3) и тождество (5), где функция $W_{n, K, \alpha}(t)$ определена равенством (6). Из принадлежности ядра $K(t)$ к классу $D_{n,q}$ следует, что $\rho_n > 0$ и для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\rho_{n+k} \leq q^k \rho_n$. Используя это неравенство и формулы (5), (6), получаем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}
|W_{n, K, \alpha}(t)| &\geq \frac{1}{2} \left(\rho_n - \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{n+2nj} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{k+n+2nj} \\
&\geq \frac{\rho_n}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} q^{2nj} \right) - \rho_n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q^{k+2nj} \\
&= \frac{\rho_n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{1 - 3q}{2 - 2q} - q^{2n} \right), \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует, что при всех $q \in (0, q_n)$ ядро $K(t)$ не имеет нулей на $[0, 2\pi]$, и ввиду равенства (5) удовлетворяет условию N_n^* . Пусть $q = q_n$. Тогда из (6), (9) и из определения числа q_n следует, что условие $W_{n, K, \alpha}(t) = 0$ выполнено только в том случае, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ имеют место равенства $\rho_{n+k} = q_n^k \rho_n$, $\cos(\alpha - \alpha_n) = -\varepsilon$,

$$\cos(kt + \alpha(2j+1) - \alpha_{k+n+2nj}) = \varepsilon(-1)^j, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, при этом в тех точках $t \in \mathbb{R}$, в которых $W_{n,K,\alpha}(t) \neq 0$, знак $W_{n,K,\alpha}(t)$ совпадает со знаком $\cos(\alpha - \alpha_n)$. Из (10) (полагая, например, $k = j = 1$) заключаем, что множество $\{t \in [0, 2\pi] : W_{n,K,\alpha}(t) = 0\}$ конечно, и в каждой точке этого множества функция $W_{n,K,\alpha}(t)$ не меняет знак. Это и означает, что ядро $K(t)$ удовлетворяет условию Нады N_n^* . Как уже отмечалось выше, в этом случае полином $T_{n-1,K,\alpha}(t)$ является полиномом наилучшего приближения в среднем ядра $K(t)$ на $[0, 2\pi]$, причем единственным по теореме Джексона о единственности элемента наилучшего приближения в среднем чебышевскими подпространствами в C для непрерывных функций (см. [6; п. 49]). Отсюда получаем утверждение теоремы 1 о единственности числа α из промежутка $[0, \pi)$, удовлетворяющего равенству (3). Чтобы получить (4), воспользуемся равенствами

$$E_n(K) = \left| \int_0^{2\pi} (K(t) - T_{n-1,K,\alpha}(t)) \operatorname{sign} \cos(nt - \alpha) dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} K(t) \operatorname{sign} \cos(nt - \alpha) dt \right|, \quad (11)$$

непосредственно вытекающими из разложения

$$\operatorname{sign} \cos(nt - \alpha) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos((2j+1)(nt - \alpha))}{2j+1} \quad (12)$$

функции $\operatorname{sign} \cos(nt - \alpha)$ в ряд Фурье. Из (1), (11) и (12) и из квадратичной суммируемости функций $K(t)$ и $\operatorname{sign} \cos(nt - \alpha)$ на $[0, 2\pi]$, применяя обобщенное равенство Парсеваля и теорему А, получаем (4).

Чтобы завершить доказательство теоремы осталось показать, что при $q \in (q_n, 1)$ класс $D_{n,q}$ содержит ядра, для которых условие A_n^* не выполняется. Для этого рассмотрим ядро

$$K_{n,q}(t) := \sum_{m=n}^{\infty} q^m \cos(mt - \alpha_m), \quad t \in \mathbb{R},$$

где значение $\alpha_m \in \{0, \pi\}$ выбирается следующим образом: $\alpha_n = 0$; если $m = k + n + 2nj > n$, где $j \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq 2n - 1$ (очевидно, что k и j определены единственным образом), то α_m выбирается из условия $\cos \alpha_m = (-1)^{j+1}$. Тогда условие (3) выполнено при $\alpha = 0$, и если $q = q_n$, то $W_{n,q}(t) := W_{n,K_{n,q},0}(t) > 0$ для всех $t \in (0, 2\pi)$ и $W_{n,q}(0) = 0$. С другой стороны, $W_{n,q}(0) < 0 \quad \forall q \in (q_n, 1)$, и элементарно проверяется, что для всех $n \in \mathbb{N}$ отображение $F: (0, 1) \rightarrow C$, сопоставляющее числу q функцию $W_{n,q}$, непрерывно. Отсюда следует, что если $q \in (q_n, 1/3)$ и величина $q - q_n$ является столь малой, что функция $W_{n,q}$ отрицательна в некоторых окрестностях $U_0 \subset (-\pi/(8n), \pi/(8n))$ и $U_{2\pi}$ точек $t = 0$ и $t = 2\pi$ соответственно и положительна во всех внутренних точках множества $[0, 2\pi] \setminus (U_0 \cup U_{2\pi})$, то ядро $K_{n,q}$ не удовлетворяет условию A_n^* .

Чтобы убедиться в этом, предположим противное. По определению условия A_n^* это означает, что для ядра $K(t) := K_{n,q}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cos kt$ существует натуральное число $n^* \geq n$ и тригонометрический полином $T_{n-1}^* \in \mathcal{T}(n-1)$ такие, что для функции $\varphi_*(t) := \operatorname{sign}[K(t) - T_{n-1}^*(t)]$ почти всюду выполняется равенство $\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t)$, при этом в силу сказанного выше $T_{n-1}^*(t)$ является единственным элементом наилучшего приближения в среднем ядра $K(t)$ тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$. Поскольку ядро $K(t)$ четно и не является тригонометрическим полиномом, то полином $T_{n-1}^*(t)$ является четной функцией, а разность

$K(t) - T_{n-1}^*(t)$ не равна тождественно нулю. Поэтому, из выполнения почти всюду равенства $\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t)$ и из теоремы Вейерштрасса о промежуточном значении непрерывной функции следует, что функция $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ обращается в нуль во всех узлах сетки с постоянным шагом π/n_* , симметричной относительно точки $t = 0$, причем в сколь угодно малой окрестности каждого из них она принимает как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, полином $T_{n-1}^*(t)$ интерполирует ядро $K(t)$ либо во всех нулях функции $\sin n^*t \equiv \cos(n^*t - \pi/2)$, либо во всех нулях функции $\cos n^*t$. Первый из этих случаев невозможен, поскольку нарушается необходимое условие на $\alpha = \pi/2$ из второго утверждения леммы 1.

Предположим, что имеет место второй из них. Снова применяя лемму 1, заключаем, что существует единственный тригонометрический полином степени не выше $n - 1$, интерполирующий ядро $K(t)$ во всех нулях функции $\cos n^*t$, и этот полином совпадает с $T_{n-1}^*(t)$. Если $n^* > n$, то из равенства (7) (в котором n заменено на n^* и $\alpha = 0$) вытекает, что коэффициент при $\cos(n^* - 1)t$ в полиноме $T_{n-1}^*(t)$ равен по модулю

$$\left| a_{n^*-1} - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_{n^*+1+2n^*j} - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_{3n^*-1+2n^*j} \right| \geq q^{n^*-1} - 2 \sum_{j=n^*}^{\infty} q^j = q^{n^*-1} \frac{1-3q}{1-q} > 0,$$

а это противоречит тому, что его степень не превосходит $n - 1$.

Осталось рассмотреть случай $n^* = n$. Но тогда из условий, наложенных на q , следует, что для всех $t \in U_0$ выполняется равенство $\varphi_*(t + \pi/n_*) = \varphi_*(t)$, а это противоречит тому, что ядро $K(t)$ удовлетворяет условию A_n^* .

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сунь Юн-Шен, “О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23** (1959), 67–92.
- [2] В. К. Дзядык, “О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23** (1959), 933–950.
- [3] С. Б. Стечкин, “О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **20** (1956), 643–648.
- [4] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976.
- [5] А. С. Сердюк, “Найкращі наближення і поперечники класів згортки періодичних функцій високої гладкості”, *Укр. матем. журн.*, **57:7** (2005), 946–971.
- [6] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.

А. В. Покровский

Институт математики НАН Украины

E-mail: pokrovsk@imath.kiev.ua

Поступило

22.05.2007