Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Д. Вандерпер, Готовность к длительной эксплуатации
“теплой” резервной системы, *Матем. заметки*, 2008,
том 84, выпуск 5, 667–675

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:15:53

Готовность к длительной эксплуатации “теплой” резервной системы

Э. Дж. Вандерпер

Анализируется готовность к длительной эксплуатации дуплексной системы с “теплым” резервированием, которая обслуживается двумя ремонтниками. Случайное поведение этой системы описывается с помощью стохастического процесса, снабженного стационарными мерами, которые удовлетворяют некоторой системе связанных дифференциальных уравнений. Процедура решения этой системы основана на теории кусочно-голоморфных функций. В качестве примера рассматривается частный случай детерминистического ремонта (замены).

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Частным случаем параллельной системы Гавера (см., например, [1]), является дуплексная система Бирolini [2], впредь называемая **В-системой**. В-Система состоит из активного блока, работающего в реальном времени (и впредь называемого **о-блоком**), работа которого поддерживается *идентичным* блоком, находящемся в состоянии теплого резерва (и впредь называемым **s-блоком**). В-Система обслуживается одним ремонтным работником. Понятие теплого резерва означает, что время безотказной работы **s-блока** стохастически больше [3], чем время безотказной работы **о-блока**. Заметим, что теплый режим ожидания часто жизненно необходим для осуществления мгновенного переключения из состояния ожидания в рабочее состояние для обеспечения непрерывной работы системы в случае отказа активного блока. Далее, любое переключение меняет интенсивность отказов **s-блока** на интенсивность отказов **о-блока**. В-Система простаивает тогда и только тогда, когда выключаются оба блока. В противном случае В-система работает. В-Система работает как *замкнутая* система массового обслуживания, т.е. любой отказавший блок немедленно направляется в ремонт при условии, что ремонтный работник свободен. В противном случае, отказавший **о-блок** должен ждать ремонта. С другой стороны, любой отремонтированный блок становится в очередь в состоянии теплого резерва, если оставшийся блок продолжает функционировать. В противном случае отремонтированный блок немедленно начинает работать.

Промышленное применение систем теплого резерва изучалось в работах Шао с соавторами [4]. Однако анализ дуплексных систем еще далек от завершения! Как частный случай мы рассматриваем В-систему, которую обслуживают *два* ремонтных работника, и которую, следовательно, мы будем называть **Т-системой**. Ремонтный работник R специализируется по устранению **о-отказов**, тогда как ремонтный

работник R_s является экспертом по устранению s -отказов. Оба ремонтных работника заняты (одновременно) тогда и только тогда, когда выключаются и o -блок, и s -блок. В противном случае по крайней мере один из работников свободен. Наконец, заметим, что любой o -отказ всегда адресован ремонтному работнику R , тогда как s -отказ всегда адресован ремонтному работнику R_s . Следовательно, ремонтный работник R_s может быть свободен, если система простаивает.

Чтобы определить готовность T -системы к *длительной* эксплуатации, рассмотрим стохастический процесс, снабженный стационарными мерами, которые удовлетворяют некоторой системе связанных дифференциальных уравнений. Процедура получения общего решения этих уравнений основывается на применении довольно тонких результатов теории *кусочно голоморфных* функций [5]. Наконец, в качестве примера рассматривается частный случай *детерминистического* ремонта (замены).

2. Постановка задачи. Рассмотрим T -систему, удовлетворяющую следующим условиям. o -Блок имеет постоянную интенсивность отказов $\lambda > 0$ и функцию распределения общего времени ремонта $R(\cdot)$, $R(0) = 0$, с конечными средним и дисперсией. Время безотказной работы и время ремонта соответственно обозначим через f и r . s -Блок имеет постоянную интенсивность отказов $0 < \lambda_s < \lambda$ и общее распределение времени ремонта $R_s(\cdot)$, $R_s(0) = 0$, с конечными средним и дисперсией. Время безотказной работы и время ремонта соответственно обозначим через f_s и r_s . Заметим, что f_s *стохастически* больше, чем f . Предполагается, что случайные величины f , f_s , r , r_s *статистически* независимы. Любой ремонт приводит к полному восстановлению блока [6]. Интенсивность отказов λ_s меняется на интенсивность отказов λ при переключении из состояния готовности а рабочее состояние.

Характеристические функции (и двойственные им функции) формулируются в терминах *комплексных* переменных преобразования. Например,

$$\mathbb{E}e^{i\omega r} = \int_0^\infty e^{i\omega x} dR(x), \quad \text{Im } \omega \geq 0.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E}e^{-i\omega r} = \int_{-\infty}^0 e^{i\omega x} d\{1 - R((-x)-)\}, \quad \text{Im } \omega \leq 0.$$

Соответствующие преобразования Фурье–Стилтьеса называются *дуальными* преобразованиями. Без ограничения общности (см. замечания в п. 6) можно предположить, что оба распределения времени ремонта имеют ограниченные плотности (в смысле Радона–Никодима), определенные на $[0, \infty)$. Для описания случайного поведения T -системы рассмотрим стохастический процесс $\{N_t, t \geq 0\}$ с дискретным пространством состояний $\{A, B, C, D, D_s\} \subset [0, \infty)$, которое характеризуется следующими взаимно исключающимися событиями:

- $\{N_t = A\}$: “ T -система работает и оба ремонтных работника свободны в момент времени t ”;
- $\{N_t = B\}$: “ T -система работает и ремонтный работник R_s занят в момент времени t ”;
- $\{N_t = C\}$: “ T -система работает и ремонтный работник R занят в момент времени t ”;

$\{N_t = D\}$: “Т-система простаивает и ремонтный работник R_s свободен в момент времени t ”;

$\{N_t = D_s\}$: “Т-система простаивает и оба ремонтных работника заняты в момент времени t ”.

Состояние A называется *надёжным* состоянием. Заметим, что Т-система частично доступна (функционирует) в состояниях A , B , C и полностью доступна в состоянии A . Состояния D и D_s называются *состояниями простоя системы*.

(Векторные) марковские характеристики немарковского процесса $\{N_t, t \geq 0\}$ кусочны и условно определены следующим образом:

$\{N_t\}$, если $N_t = A$ (т.е. если наступило состояние $\{N_t = A\}$);

$\{(N_t, Y_t)\}$, если $N_t = B$, где Y_t – *оставшееся* время ремонта для находящегося в ремонте отказавшего **s**-блока в момент времени t ;

$\{(N_t, X_t)\}$, если $N_t = C$ или D , где X_t – *оставшееся* время ремонта для находящегося в ремонте отказавшего **o**-блока в момент времени t ;

$\{(N_t, X_t, Y_t)\}$, если $N_t = D_s$.

Пространство состояний основного марковского процесса задается следующим образом:

$$\{A\} \cup \{(B, y)\} \cup \{(C, x)\} \cup \{(D, x)\} \cup \{(D_s, x, y)\},$$

где $x \geq 0, y \geq 0$. Далее, рассмотрим Т-систему в стационарном состоянии (в так называемом *эргодическом* состоянии) с *инвариантной* мерой $\{P_K, K = A, B, C, D, D_s\}$, $\sum_K P_K = 1$, где

$$P_K := P\{N = K\} := \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N_t = K \mid N_0 = A\}.$$

Наконец, введем меры

$$P_B(y) dy := P\{N = B, Y \in dy\} := \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N_t = B, Y_t \in dy \mid N_0 = A\},$$

$$P_C(x) dx := P\{N = C, X \in dx\} := \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N_t = C, X_t \in dx \mid N_0 = A\},$$

$$P_D(x) dx := P\{N = D, X \in dx\} := \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N_t = D, X_t \in dx \mid N_0 = A\},$$

$$\begin{aligned} P_{D_s}(x, y) dx dy &:= P\{N = D_s, X \in dx, Y \in dy\} \\ &:= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N_t = D_s, X_t \in dx, Y_t \in dy \mid N_0 = A\}. \end{aligned}$$

Заметим, что, например,

$$\begin{aligned} P_{D_s} &= \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy P\{N = D_s, X \leq x, Y \leq y\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty P_{D_s}(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty P_{D_s}(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Введем некоторые обозначения:

- Индикаторная (функция) события $\{N = K\}$ обозначается как $\mathbf{1}\{N = K\}$.
- Комплексная плоскость и действительная прямая, соответственно, обозначаются через $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ с очевидными индексами, как, например, $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$, или, например, $\mathbb{C}^+ := \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im } \omega > 0\}$.

- Часто будет использоваться характеристическая функция

$$\gamma^+(\tau) := \begin{cases} \frac{\mathbb{E}e^{i\tau r} - 1}{i\tau \mathbb{E}r}, & \text{если } \tau \neq 0, \\ 1, & \text{если } \tau = 0, \end{cases}$$

и дуальная ей функция

$$\gamma^-(\tau) := \begin{cases} \frac{1 - \mathbb{E}e^{-i\tau r}}{i\tau \mathbb{E}r}, & \text{если } \tau \neq 0, \\ 1, & \text{если } \tau = 0, \end{cases}$$

с очевидными изменениями в индексах $\gamma_s^+(\tau)$, $\gamma_s^-(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, если r заменяется на r_s .

Заметим, что, например,

$$\gamma^+(\omega) = \frac{1}{\mathbb{E}r} \int_0^\infty e^{i\omega x} (1 - R(x)) dx, \quad \text{Im } \omega \geq 0.$$

Из теоремы Руше следует, что функция $1 + \lambda \mathbb{E}r \gamma^-(\omega)$, $\text{Im } \omega \leq 0$, не имеет нулей в $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$, тогда как функция $1 + \lambda \mathbb{E}r \gamma^+(\omega)$, $\text{Im } \omega \geq 0$, не имеет нулей в $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.

- Напомним, что **T**-система функционирует только в состояниях A , B и C . Следовательно, готовность к длительной эксплуатации **T**-системы, заданной выражением

$$\mathcal{A} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(t) dt,$$

где $\mathcal{A}(t) := \sum_K \mathbf{P}\{N_t = K \mid N_0 = A\}$, $K = A, B, C$, определяется формулой

$$\mathcal{A} = P_A + P_B + P_C.$$

3. Дифференциальные уравнения. Для определения вероятностных функций состояния (далее, p -функций), сначала построим систему связанных стационарных дифференциальных уравнений, используя метод дополнительной переменной Хокштада (см., например, [7]).

При $x > 0$, $y > 0$, получим

$$(\lambda + \lambda_s)P_A = P_B(0) + P_C(0), \tag{1}$$

$$\left(\lambda - \frac{d}{dy}\right)P_B(y) = \lambda_s P_A \frac{dR_s}{dy}(y) + P_{D_s}(0, y),$$

$$\left(\lambda - \frac{d}{dx}\right)P_C(x) = (\lambda P_A + P_D(0)) \frac{dR}{dx}(x) + P_{D_s}(x, 0),$$

$$-\frac{d}{dx}P_D(x) = \lambda P_C(x),$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)P_{D_s}(x, y) = \lambda P_B(y) \frac{dR}{dx}(x).$$

4. Функциональное уравнение. Следует заметить, что наши дифференциальные уравнения удобны для проведения интегральных преобразований. Действительно, из интегрируемости p -функций и функции плотности времени ремонта следует, что соответствующие p -производные также интегрируемы на $[0, \infty)$. Следовательно, каждая p -функция обращается в нуль на бесконечности. Применяя технику

преобразований Фурье к нашим уравнениям, получим при $\text{Im } \omega \geq 0$, $\text{Im } \eta \geq 0$

$$(\lambda + i\eta)\mathbb{E}(e^{i\eta Y} \mathbf{1}\{N = B\}) + P_B(0) = \lambda_s P_A \mathbb{E}e^{i\eta r_s} + \int_0^\infty e^{i\eta y} P_{D_s}(0, y) dy, \quad (2)$$

$$(\lambda + i\omega)\mathbb{E}(e^{i\omega X} \mathbf{1}\{N = C\}) + P_C(0) = (\lambda P_A + P_D(0))\mathbb{E}e^{i\omega r} + \int_0^\infty e^{i\omega x} P_{D_s}(x, 0) dx, \quad (3)$$

$$i\omega\mathbb{E}(e^{i\omega X} \mathbf{1}\{N = D\}) + P_D(0) = \lambda\mathbb{E}(e^{i\omega X} \mathbf{1}\{N = C\}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (i\omega + i\eta)\mathbb{E}(e^{i\omega X} e^{i\eta Y} \mathbf{1}\{N = D_s\}) + \int_0^\infty e^{i\omega x} P_{D_s}(x, 0) dx + \int_0^\infty e^{i\eta y} P_{D_s}(0, y) dy \\ = \lambda\mathbb{E}(e^{i\eta Y} \mathbf{1}\{N = B\})\mathbb{E}e^{i\omega r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя $\omega = 0$ в уравнение (4), получим $P_D(0) = \lambda P_C$.

Складывая уравнения (1)–(5), приходим к функциональному уравнению

$$\begin{aligned} \lambda(1 - \mathbb{E}e^{i\omega r})(P_A + P_C) + [\lambda(1 - \mathbb{E}e^{i\omega r}) + i\eta]\mathbb{E}(e^{i\eta Y} \mathbf{1}\{N = B\}) \\ + \lambda_s(1 - \mathbb{E}e^{i\eta r_s})P_A + i\omega[\mathbb{E}(e^{i\omega X} \mathbf{1}\{N = C\}) + \mathbb{E}(e^{i\omega X} \mathbf{1}\{N = D\})] \\ + (i\omega + i\eta)\mathbb{E}(e^{i\omega X} e^{i\eta Y} \mathbf{1}\{N = D_s\}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

5. Процедура решения задачи. Подставляя $\omega = -\tau$, $\eta = \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$ в уравнение (6), получим уравнение Гильберта

$$\Psi^+(\tau) - \Psi^-(\tau) = \lambda_s E r_s P_A \varphi(\tau), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi^+(\tau) &:= \mathbb{E}(e^{i\tau Y} \mathbf{1}\{N = B\}), \\ \Psi^-(\tau) &:= \frac{\mathbb{E}(e^{-i\tau X} \mathbf{1}\{N = C\}) + \mathbb{E}(e^{-i\tau X} \mathbf{1}\{N = D\}) - \lambda E r \gamma^-(\tau)(P_A + P_C)}{1 + \lambda E r \gamma^-(\tau)}, \\ \varphi(\tau) &:= \frac{\gamma_s^+(\tau)}{1 + \lambda E r \gamma^-(\tau)}. \end{aligned}$$

Уравнение (7) представляет задачу Сохоцкого–Племеля на действительной прямой, которая решается с помощью теории кусочно голоморфных функций. Сначала заметим, что $|\varphi'(\tau)|$ ограничена на $\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме о среднем значении, $\varphi(\tau)$ Липшиц-непрерывна (**L**-непрерывна) на $\mathbb{R}$, т.е. Гёльдер-непрерывна с показателем $\beta = 1$. Кроме того, $\varphi(\tau)$ **L**-непрерывна на бесконечности, т.е.

$$|\varphi(\tau)| = O\left(\frac{1}{|\tau|}\right), \quad |\tau| \rightarrow \infty.$$

Следовательно, интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}$$

существует при всех $\omega \in \mathbb{C}$ при условии, что сингулярный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - u}, \quad u \in \mathbb{R},$$

определен как главное значение Коши в двойственном смысле (см. приложение). Следовательно, интеграл типа Коши представляет в $\mathbb{C}$ кусочно голоморфную функцию, обращающуюся в нуль на бесконечности.

Применяя теорию кусочно голоморфных функций, получим, что при $\omega \in \mathbb{C}^+$

$$\Psi^+(\omega) = \lambda_s \text{Er}_s P_A \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}.$$

Следовательно,

$$P_B = \lambda_s \text{Er}_s P_A \tau_B,$$

где

$$\tau_B := \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \omega \in \mathbb{C}^+}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}.$$

Из формулы Сохоцкого–Племеля следует, что

$$\tau_B = \frac{1}{2} \varphi(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

С другой стороны, при $\omega \in \mathbb{C}^-$ имеем

$$\Psi^-(\omega) = \lambda_s \text{Er}_s P_A \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}. \quad (8)$$

Однако в силу уравнения (4) имеем

$$\text{E}(e^{-i\omega X} \mathbf{1}\{N = D\}) = \lambda \frac{P_C - \text{E}(e^{-i\omega X} \mathbf{1}\{N = C\})}{i\omega}, \quad \omega \in \mathbb{C}^-. \quad (9)$$

Подставляя уравнение (9) в уравнение (8), получим, что $\omega \in \mathbb{C}^-$,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda P_C + (i\omega - \lambda) \text{E}(e^{-i\omega X} \mathbf{1}\{N = C\})}{i\omega} \\ &= \lambda \text{Er} \gamma^-(\omega) (P_A + P_C) + \lambda_s \text{Er}_s P_A (1 + \lambda \text{Er} \gamma^-(\omega)) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}. \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы найти P_C , подставим $\omega = -i\lambda$ в уравнение (10). Проводя несложные алгебраические выкладки, получим, что $P_C = \tau_C P_A$, где

$$\tau_C := \frac{1 - \text{E}e^{-\lambda r} + \lambda_s \text{Er}_s (2 - \text{E}e^{-\lambda r}) \tau_{\lambda}}{\text{E}e^{-\lambda r}}, \quad \tau_{\lambda} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau + i\lambda}.$$

Наконец, чтобы вычислить P_A , подставим $\eta = 0$ в уравнение (6). При $\text{Im} \omega \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \text{E}(e^{i\omega X} \mathbf{1}\{N = C\}) + \text{E}(e^{i\omega X} \mathbf{1}\{N = D\}) + \text{E}(e^{i\omega X} \mathbf{1}\{N = D_s\}) \\ &= \lambda \text{Er} (P_A + P_B + P_C) \gamma^+(\omega). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_C + P_D + P_{D_s} = \lambda \text{Er} (P_A + P_B + P_C).$$

Применяя тождество $\sum_K P_K = 1$, получим

$$(1 + \lambda \mathbf{E}r)(P_A + P_B) + \lambda \mathbf{E}r P_C = 1.$$

Итак, мы пришли к следующим результатам:

$$\begin{cases} (1 + \lambda \mathbf{E}r)(P_A + P_B) + \lambda \mathbf{E}r P_C = 1, \\ P_B = \lambda_s \mathbf{E}r_s \tau_B P_A, \quad P_C = \tau_C P_A. \end{cases} \quad (11)$$

Подставляя P_B и P_C в уравнение (11), получим

$$P_A = \frac{1}{(1 + \lambda \mathbf{E}r)(1 + \lambda_s \mathbf{E}r_s \tau_B) + \lambda \mathbf{E}r \tau_C}.$$

Следовательно, готовность к длительной эксплуатации для **T**-системы определяется формулой

$$\mathcal{A} = \frac{1 + \lambda_s \mathbf{E}r_s \tau_B + \tau_C}{(1 + \lambda \mathbf{E}r)(1 + \lambda_s \mathbf{E}r_s \tau_B) + \lambda \mathbf{E}r \tau_C}.$$

6. Замечания. Следует заметить, что ядро $\varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, сохраняет все свойства, необходимые для обеспечения существования интеграла типа Коши для *произвольных* распределений времени ремонта с конечными средним и дисперсией. Прежде всего, отношение упорядоченности $|\varphi(\tau)| = O(1/|\tau|)$, $|\tau| \rightarrow \infty$, также выполняется для любых *произвольных* характеристических функций. Кроме того, **L**-непрерывность функции φ на $\mathbb{R}$ не зависит от разложения Лебега функции R или R_s . Например, неравенство Гёльдера

$$|\mathbf{E}e^{i\tau_2 r} - \mathbf{E}e^{i\tau_1 r}| \leq \mathbf{E}r |\tau_2 - \tau_1|$$

всегда выполняется для *любой* r с конечным средним.

Требование конечности дисперсии очень слабое. По существу, распределения вероятностей, моделирующих время ремонта (см., например, [8]–[10]), могут даже иметь момент любого порядка!

Следовательно, наши первоначальные предположения относительно существования плотностей времен ремонта являются избыточными для обеспечения существования инвариантной меры.

7. Пример. В качестве примера, рассмотрим случай детерминистического ремонта (постоянная замена). Пусть соотношения $r_s = \beta_s$, $r = \beta$ выполняются **P**-почти наверное, и пусть $\beta_s < \beta$. Ясно, что $\mathbf{E}e^{i\omega r_s} = e^{i\omega\beta_s}$ и $\mathbf{E}e^{-i\omega r} = e^{-i\omega\beta}$. Применяя формулу Коши в областях $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$, получим при $\omega \in \mathbb{C}^+$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega} = \begin{cases} i \frac{e^{-\lambda\beta_s} - e^{i\omega\beta_s}}{\beta_s(\omega - i\lambda)}, & \text{если } \omega \neq i\lambda, \\ e^{-\lambda\beta_s}, & \text{если } \omega = i\lambda, \end{cases}$$

тогда как

$$\tau_\lambda = \frac{(1 - e^{-\lambda\beta_s})(2 - e^{-\lambda\beta} - e^{-\lambda(\beta - \beta_s)})}{2\lambda\beta_s(2 - e^{-\lambda\beta})}.$$

Заметим, что

$$\tau_B = \frac{1 - e^{-\lambda\beta_s}}{\lambda\beta_s}, \quad \tau_C = \frac{2\lambda(1 - e^{-\lambda\beta}) + \lambda_s(1 - e^{-\lambda\beta_s})(2 - e^{-\lambda\beta} - e^{-\lambda(\beta-\beta_s)})}{2\lambda e^{-\lambda\beta}}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} = \frac{1 + \lambda_s\beta_s\tau_B + \tau_C}{(1 + \lambda\beta)(1 + \lambda_s\beta_s\tau_B) + \lambda\beta\tau_C}.$$

8. Заключение. Мы проанализировали готовность **Т**-системы к длительной эксплуатации с помощью мощных методов теории кусочно голоморфных функций. Анализируя зависящую от времени **Т**-систему (т.е. точечную готовность), мы получаем все еще нерешенную (довольно трудную) задачу в области прикладной математики.

Приложение.

• Пусть $\varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, – ограниченная непрерывная функция. Функция φ называется Γ -интегрируемой, если существует предел

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \int_{\Gamma_{T,\varepsilon}} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - u}, \quad u \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma_{T,\varepsilon} := (-T, u - \varepsilon] \cup [u + \varepsilon, T)$. Соответствующий интеграл, который мы обозначим через

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - u},$$

называется *главным значением Коши в двойственном смысле*.

• Функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, называется Гёльдер-непрерывной на $\mathbb{R}$, если $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R} \exists (\beta, A)$, $0 < \beta \leq 1$, $A > 0$:

$$|\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)| \leq A|\tau_2 - \tau_1|^\beta.$$

Функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ называется *Гёльдер-непрерывной на бесконечности*, если $\exists \gamma > 0$:

$$|\varphi(\tau)| = O\left(\frac{1}{|\tau|^\gamma}\right), \quad |\tau| \rightarrow \infty.$$

• Заметим, что Гёльдер-непрерывности функции $\varphi(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ и на бесконечности достаточно для существования интеграла типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}, \quad \omega \in \mathbb{C}$$

(более подробно, см. [5]).

• Здесь мы непосредственно приведем так называемые формулы Сохоцкого–Племеля для областей $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$. Пусть

$$\psi^+(u) := \lim_{\substack{\omega \rightarrow u \\ \omega \in \mathbb{C}^+}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$\psi^-(u) := \lim_{\substack{\omega \rightarrow u \\ \omega \in \mathbb{C}^-}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\psi^+(u) &= \frac{1}{2}\varphi(u) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - u}, \\ \psi^-(u) &= -\frac{1}{2}\varphi(u) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - u}.\end{aligned}$$

Следовательно, при $u \in \mathbb{R}$ получим

$$\begin{aligned}\psi^+(u) - \psi^-(u) &= \varphi(u), \\ \frac{\psi^+(u) + \psi^-(u)}{2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - u}.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\psi^+(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}, & \omega \in \mathbb{C}^+, \\ \psi^-(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}, & \omega \in \mathbb{C}^-.\end{aligned}$$

Окончательно, заметим, что функция

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau - \omega}, \quad \omega \in \mathbb{C},$$

порождает (регулярную) *кусочно* голоморфную функцию в $\mathbb{C}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. J. Vanderperre, V. S. S. Yadavalli, S. S. Makhanov, “On Gaver’s parallel system”, *South African J. Indust. Eng.*, **15** (2004), 141–147.
- [2] A. Birolini, *On the Use of Stochastic Processes in Modelling Reliability Problems*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, **252**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1985.
- [3] M. Shaked, I. G. Shanthikumar, *Stochastic Models*, Handbooks Oper. Res. Management Sci., **2**, North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [4] J. Shao, L. R. Lamberson, “Impact of BIT design parameters on systems RAM”, *Reliab. Eng. & Syst. Safety*, **23**:3 (1988), 219–246.
- [5] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, ГИФМЛ, М., 1958.
- [6] L. Gertsbakh, *Statistical Reliability Theory*, Probab. Pure Appl., **4**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.
- [7] S. A. Attahiru, T. S. S. Srinivasa Rao, “Supplementary variable technique in stochastic models”, *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, **14**:2 (2000), 203–218.
- [8] A. Birolini, *Quality and Reliability of Technical Systems: Theory – Practice – Management*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1994.
- [9] B. Gnedenko, I. A. Ushakov, *Probabilistic Reliability Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [10] E. J. Vanderperre, “On hazard rates modelled by mixtures of exponential distributions”, *Belg. J. Oper. Res. Statist. Comput. Sci.*, **39**:1 (1999), 31–38.

Э. Дж. Вандерпер

Университет Южной Африки, Pretoria

E-mail: evanderperre@yahoo.com

Поступило

14.05.2008