Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильева, Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на отрезке, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 676–680

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:44:50

Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на отрезке

А. А. Васильева

В работе оценивается асимптотика колмогоровских поперечников классов Соболева с весом в метрике L_p . Устанавливается связь величины поперечника множества $W_{\infty, g}^1$ с приближением первообразной функции g кусочно-постоянными функциями.

Библиография: 18 названий.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство, $M \subset X$ – центрально-симметричное относительно нуля множество. Колмогоровским n -поперечником множества M называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|,$$

где $\mathcal{L}_n$ обозначает множество подпространств в X размерности не выше $n \in \mathbb{Z}_+$.

Для $1 \leq p < \infty$ и измеримых функций $v, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим

$$\|f\|_{p, v} = \|f\|_{L_{p, v}[a, b]} = \|vf\|_{L_p[a, b]}, \quad L_{p, v}[a, b] = \{f: \|f\|_{p, v} < \infty\}.$$

Пусть $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – измеримая функция, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$. Положим

$$W_{q, g}^r[a, b] = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(r-1)} \in AC[a, b], \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_q[a, b]} \leq 1 \right\}$$

(если $g|_T = 0$ для некоторого $T \subset [a, b]$, то в определении $\|f^{(r)}/g\|_{L_q[a, b]}$ полагаем $f^{(r)}(t)/g(t) = 0$ при $t \in T$).

В работе оцениваются порядки поперечников $d_n(W_{q, g}^r[a, b], L_{p, v}[a, b])$ по n и g при достаточно больших n .

Оценки для колмогоровских поперечников классов $W_q^r[a, b]$ в метрике L_p при $r q > 1$ были вычислены в [1]–[5]:

$$d_n(W_q^r[a, b], L_p[a, b]) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } 1 \leq p \leq q \leq \infty \text{ или } 2 \leq q \leq p \leq \infty, \\ n^{-r-1/p+1/q}, & \text{если } 1 \leq q < p \leq 2, \\ n^{-r-1/2+1/q}, & \text{если } 1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

Такая же оценка справедлива при $q = 1$, $r = 1$ и $p \leq 2$. Для малых гладкостей оценки были получены в [6], [7]. В [8] были получены оценки колмогоровских поперечников для классов Соболева на отрезке со степенным весом. В [9] найдены оценки аппроксимативных чисел оператора вложения невесовых классов Соболева на отрезке в пространство L_p с весом, в [10] получены оценки аппроксимативных чисел оператора типа Харди (это соответствует случаю $r = 1$).

Известны также оценки колмогоровских поперечников пересечений соболевских классов [11] других функциональных классов. Для шаров в конечномерных пространствах оценки поперечников были получены в [4], [12]–[14].

Пусть X, Y – множества, $f_1, f_2: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$. Скажем, что $f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y)$, если

$$\forall y \in Y \quad \exists c(y) > 0: \quad \forall x \in X \quad f_1(x, y) \leq c(y)f_2(x, y);$$

$f_1(x, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x, y)$, если $f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y)$ и $f_2(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x, y)$.

При $r = 1$, $q = \infty$ показано, что значение колмогоровского поперечника в метрике L_p совпадает с наилучшим приближением первообразной функции g кусочно-постоянными функциями с нефиксированными узлами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть существуют точки $a < t_1 < \dots < t_{m-1} < b$ такие, что для любого $j = 1, \dots, m-1$ и для любого $\delta > 0$ функция g не интегрируема на отрезке $[t_j - \delta, t_j + \delta]$. Тогда при $n \leq m-1$ выполнено $d_n(W_{\infty, g}^1[a, b], L_p[a, b]) = \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если существует бесконечное число точек, в любой окрестности которых функция g не интегрируема, то $d_n(W_{\infty, g}^1[a, b], L_p[a, b]) = \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{t_k\}_{k=1}^{m-1}$ – множество всех точек из интервала (a, b) , в любой окрестности которых функция g не интегрируема, $t_0 = a$, $t_m = b$, $t_{k-1} < t_k$ для любого $k \in \{1, \dots, m\}$. Выберем $\alpha_k \in (t_k, t_{k+1})$ произвольным образом и положим

$$G(t) = \int_{\alpha_k}^t g(s) ds, \quad t \in (t_k, t_{k+1}).$$

Пусть $n \geq m$. Обозначим через $S_n = S_n[a, b]$ множество функций $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что существует разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$, являющееся измельчением $\{t_k\}_{k=0}^m$ и удовлетворяющее условию $\varphi|_{(\tau_{j-1}, \tau_j)} \equiv \text{const}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq m$. Тогда $d_n(W_{\infty, g}^1[a, b], L_p[a, b]) = \inf_{\varphi \in S_n} \|G - \varphi\|_p$.

Равенство получено с помощью результатов Маковского [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – измеримые функции и существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $d_n(W_{q, g}^r[a, b], L_{p, v}[a, b]) < \infty$. Тогда существует разбиение отрезка $[a, b]$ на конечное число отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, удовлетворяющих одному из следующих условий:

- 1) $g|_{[\alpha_i, \beta_i]} = 0$;
- 2) $v|_{[\alpha_i, \beta_i]} = 0$;
- 3) $g \in L_{q/(q-1)}[\alpha_i + \delta, \beta_i - \delta]$ и $v \in L_p[\alpha_i + \delta, \beta_i - \delta]$ для любого $\delta > 0$.

Доказательство проводится от противного. По каждой паре точек $\alpha \leq \beta$ и неотрицательной интегрируемой функции w строится функция $w_{\alpha, \beta}$ с носителем

в $[\alpha, \beta]$ такая, что $w_{\alpha, \beta}^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна и $|w_{\alpha, \beta}^{(r)}(t)| = |w^{(r)}(t)|$ п.в. Специальным образом выбираются функции $0 \leq g_M \leq g$, $0 \leq v_M \leq v$, и $w(t) = \|g_M\|_{q/(q-1)}^{-1/(q-1)} \times g_M^{q/(q-1)}(t)$. Затем методом Маковского показывается, что при подходящем выборе g_M и v_M значение $d_n(W_{q,g}^r[a, b], L_{p,v}[a, b])$ может быть сколь угодно большим.

В следующей теореме приводится верхняя оценка для колмогоровских поперечников.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $g, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, для любого $c \in (a, b)$ выполнено $g \in L_{q/(q-1)}[a, c]$, $v \in L_p[c, b]$. Положим

$$G(x) = \int_a^x g(t)^{q/(q-1)} dt, \quad V(x) = \int_x^b v^p(t) dt.$$

Пусть $\rho_g, \rho_v > 1$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ выберем ξ_k и η_k так, чтобы $G(\xi_k) = \rho_g^{k(q/(q-1))}$ (если $G(x) < \rho_g^{k(q/(q-1))}$ для любого x , то полагаем $\xi_k = b$) и $V(\eta_k) = \rho_v^{kp}$ (если $V(x) < \rho_v^{kp}$ для любого x , то полагаем $\eta_k = a$). Рассмотрим множество концов непустых интервалов $(\xi_j, \xi_{j+1}) \cap (\eta_{l+1}, \eta_l)$ и обозначим их ζ_k , $k \in \mathbb{Z}$, при этом $\zeta_k < \zeta_{k+1}$. Числа j_k и l_k зададим равенством $[\zeta_k, \zeta_{k+1}] = [\xi_{j_k}, \xi_{j_k+1}] \cap [\eta_{l_k+1}, \eta_{l_k}]$. Положим

$$\varkappa = \frac{1}{r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, \quad \sigma = \frac{1}{r + \frac{1}{p} - 1}, \quad \tau = \frac{1}{r - \frac{1}{q}}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $g, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- 1) функция g возрастает, функция v убывает и $gv \in L_\varkappa[a, b]$;
- 2) $r = 1$ или функция v убывает; существует такое $\rho_g > 1$, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|v\|_{L_\sigma[\xi_k, \xi_{k+1}]}^\varkappa \rho_g^{k\varkappa} < \infty;$$

- 3) $r = 1$ или функция g возрастает; существует такое $\rho_v > 1$, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|g\|_{L_\tau[\eta_{k+1}, \eta_k]}^\varkappa \rho_v^{k\varkappa} < \infty;$$

- 4) $r \geq 2$ и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\zeta_{k+1} - \zeta_k|^{(r-1)\varkappa} \rho_g^{j_k \varkappa} \rho_v^{l_k \varkappa} < \infty$.

Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(W_{q,g}^r[a, b], L_{p,v}[a, b])}{d_n(W_q^r[0, 1], L_p[0, 1])} \underset{p, q, r}{\lesssim} \|gv\|_\varkappa.$$

Оценка получена методом дискретизации Майорова [5] при выборе подходящих разбиений отрезка $[a, b]$. На каждом отрезке функции приближаются многочленом Тейлора степени $r-1$, и приближение оценивается с помощью результатов [15]–[17].

Следующая теорема дает нижнюю оценку поперечников.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $qr > 1$ или $p \leq 2$, $g, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $gv \in L_{1/(r+1/p-1/q)}[a, b]$. Тогда

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(W_{q,g}^r[a, b], L_{p,v}[a, b])}{d_n(W_q^r[0, 1], L_p[0, 1])} \underset{p, q, r}{\gtrsim} \|gv\|_{1/(r+1/p-1/q)}.$$

В случае кусочно-постоянных функций оценка получается методом дискретизации. Общий случай сводится к этому с помощью сравнения значений поперечников для различных g, v .

В случае $p \leq q$ из результатов Буслаева [18] следует

ТЕОРЕМА 5. В условиях теоремы 3 при $p \leq q$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r d_n(W_{q,g}^r[a, b], L_{p,v}[a, b]) = \lambda_{rpq} \|gv\|_{1/(r+1/p-1/q)},$$

где λ_{rpq} – точная константа из [18].

В следующей теореме рассматривается класс функций g , для которых порядки $d_n(W_{q,g}^r[a, b], L_p[a, b])$ отличаются от порядков $d_n(W_q^r[0, 1], L_p[0, 1])$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 \leq p < \infty, 1 < q \leq \infty$,

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, & \text{если } p \leq q, \\ 0, & \text{если } 1 \leq q < p \leq 2, \\ \frac{1}{p}, & \text{если } 1 < q \leq 2 < p < \infty, \\ \frac{1}{p} \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, & \text{если } 2 < q < p < \infty. \end{cases}$$

Пусть $\rho: [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $\lim_{y \rightarrow \infty} (y\rho'(y)/\rho(y)) = 0$, $\alpha_{pq} < \alpha < r + 1/p - 1/q$, $g(x) = x^{-r-1/p+1/q} |\ln x|^{-\alpha} \rho(|\ln x|)$, $x \in (0, e^{-1})$. Тогда

$$d_n(W_{q,g}^r[0, e^{-1}], L_p[0, e^{-1}]) \underset{p,q,r,\alpha,\rho}{\asymp} n^{-\alpha+r+1/p-1/q} \rho(n) d_n(W_q^r[0, 1], L_p[0, 1]).$$

Если $g(x) = x^{-r-1/p+1/q} |\ln x|^{-r-1/p+1/q}$, то

$$d_n(W_{q,g}^r[0, e^{-1}], L_p[0, e^{-1}]) \underset{p,q,r}{\asymp} (\ln n)^{r+1/p-1/q} d_n(W_q^r[0, 1], L_p[0, 1]).$$

Доказательство проводится методом дискретизации с учетом оценок нормы интегрального оператора Римана–Лиувилля [16]–[18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. И. Маковоз, “Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве”, *Матем. сб.*, **87**:1 (1972), 136–142.
- [2] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120.
- [3] Р. С. Исмаилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178.
- [4] Б. С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 334–351.
- [5] В. Е. Майоров, “Дискретизация задачи о поперечниках”, *УМН*, **30**:6 (1975), 179–180.

- [6] Б. С. Капин, “О поперечниках классов Соболева малой гладкости”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1981, № 5, 50–54.
- [7] Е. Д. Куланин, *Оценки поперечников функциональных классов малой гладкости*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1986.
- [8] V. N. Konovalov, D. Leviatan, “Kolmogorov and linear widths of weighted Sobolev-type classes on a finite interval”, *Anal. Math.*, **28**:4 (2002), 251–278.
- [9] Е. Н. Ломакина, В. Д. Степанов, “Асимптотическая оценка аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана–Лиувилля”, *Матем. тр.*, **9**:1 (2006), 52–100.
- [10] J. Lang, O. Mendez, A. Nekvinda, “Asymptotic behavior of the approximation numbers of the Hardy-type operator from L^p into L^q ”, article 18, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **5**:1 (2004).
- [11] Э. М. Галеев, “Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными”, *Матем. заметки*, **23**:2 (1978), 197–212.
- [12] Е. Д. Глускин, “Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств”, *Матем. сб.*, **120**:2 (1983), 180–189.
- [13] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.
- [14] Е. Д. Глускин, “О некоторых конечномерных задачах теории поперечников”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, 1981, № 3, 5–10.
- [15] V. D. Stepanov, *Two-Weighted Estimates For Riemann–Liouville Integrals*, Rept. 39, Českoslov. Akad. Věd. Mat. Ústav., Praha, 1988.
- [16] Э. Н. Батуев, В. Д. Степанов, “О весовых неравенствах типа Харди”, *Сиб. матем. журн.*, **30**:1 (1989), 13–22.
- [17] В. Д. Степанов, “Двухвесовые оценки интегралов Римана–Лиувилля”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 645–656.
- [18] А. П. Буслаев, “Об асимптотике поперечников и спектров нелинейных дифференциальных уравнений”, *Алгебра и анализ*, **3**:6 (1991), 108–118.

А. А. Васильева

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

Поступило

06.06.2008