Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Балаганский, Об антипроксиминальных выпуклых замкнутых радиально ограниченных множествах в пространстве l_1 , *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 785–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 03:34:00

Об антипроксиминальных выпуклых замкнутых радиально ограниченных множествах в пространстве l_1

В. С. Балаганский

Непустое замкнутое подмножество $A \neq X$ банахова пространства X называется *антипроксиминальным*, если для любой точки $x \in X \setminus A$ в множестве A нет ближайшей точки ($P_M(x) = \emptyset$).

Множество $0 \in M \subset X$ называется *радиально ограниченным*, если для любого $x \in X$, $\|x\| = 1$, найдется число $r > 0$ такое, что $r_1x, -r_1x \notin M$ для любого $r_1 \geq r$.

Кобзаш [1] доказал, что в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, где мера μ имеет атом, нет выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств.

Несколькими авторами [2], [3] доказано, что в банаховом пространстве X , удовлетворяющем условию Радона–Никодима, не существует выпуклого ограниченного замкнутого множества, которое является антипроксиминальным множеством для X . В [4] от условия выпуклости множества удалось отказаться. В настоящей работе показано, что при замене ограниченности на радиальную ограниченность утверждение перестает быть верным.

В работе применяются следующие обозначения:

- X – вещественное банахово пространство,
- $\mathcal{F}(X)$ – семейство непустых замкнутых множеств пространства X .

Для $x, y \in X$, $M \in \mathcal{F}(X)$ полагаем

- $P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}\}$,
- $\mathbb{B}(X) = \{z \in X : \|x - z\| \leq 1\}$ – единичный шар в X ,
- $\mathbb{S}(X) = \{z \in X : \|x - z\| = 1\}$ – единичная сфера в X ,
- $\text{conv } M$ – выпуклая оболочка множества M , $\overline{\text{conv}} M$ – замкнутая выпуклая оболочка множества M , $\Sigma(M) = \{f \in X^* \setminus \{0\} : \exists x \in M f(x) = \sup\{f(z) : z \in M\}\}$.

Для $f \in l_\infty \setminus \{0\}$ введем обозначение $\text{crit } f = \{n \in \mathbb{N} : |f_n| = \|f\|\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеем $\Sigma(\mathbb{B}(l_1)) = \{f \in l_\infty \setminus \{0\} : \text{crit } f \neq \emptyset\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть M – непустое компактное подмножество банахова пространства X и μ – вероятностная мера на M (т.е. неотрицательная регулярная борелевская мера на M и $\mu(M) = 1$). Говорят, что точка x из E *представлена посредством* μ , если $f(x) = \int_M f d\mu$ для любого непрерывного линейного функционала f на M .

Пусть μ – неотрицательная регулярная борелевская мера на компактном хаусдорфовом пространстве M , а S – такое борелевское подмножество M , что $\mu(M \setminus S) = 0$. В этом случае мы будем говорить, что μ *сосредоточена* на S и что S есть носитель меры μ ($S = \text{supp } \mu$).

Точка x выпуклого замкнутого множества K называется *экстремальной*, если из условий $x_1, x_2 \in K$, $x = (x_1 + x_2)/2$ следует, что $x = x_1 = x_2$.

Для дальнейшей работы нам потребуются следующая лемма и теорема (Шоке).

ЛЕММА А [5]. Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathcal{F}(X)$ выпукло, $A \neq X$. Тогда антипроксиминальность множества A эквивалентна условию $\Sigma(A) \cap \Sigma(\mathbb{B}(X)) = \{\emptyset\}$.

ТЕОРЕМА А [6; с. 25]. Предположим, что M – метризуемое компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X и x_0 – элемент M . Тогда существует вероятностная мера μ на M , представляющая x_0 и сосредоточенная на экстремальных точках M .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00320) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1071.2008.1).

Нам потребуются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^+ &= \left(1, 2 - \frac{1}{2}, \dots, 2 - \frac{1}{n}, \dots\right), & \mathbf{e}^- &= -\mathbf{e}^+, \\ \tilde{\mathbf{e}}_n^+ &= \left(1, 2 - \frac{1}{2}, \dots, 2 - \frac{1}{n-1}, \underbrace{0}_{\text{на } n\text{-м месте}}, 2 - \frac{1}{n+1}, \dots\right), & \mathbf{e}_n^+ &= \frac{\tilde{\mathbf{e}}_n^+}{n}, \\ \tilde{\mathbf{e}}_n^- &= \left(-1, -2 + \frac{1}{2}, \dots, -2 + \frac{1}{n-1}, \underbrace{2 - \frac{1}{n}}_{\text{на } n\text{-м месте}}, 2 - \frac{1}{n+1}, \dots\right), & \mathbf{e}_n^- &= \frac{\tilde{\mathbf{e}}_n^-}{n}, \\ N^+ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{e}_n^+\}, \quad N^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{e}_n^-\}, \quad N = \{0\} \cup N^+ \cup N^-, \\ D^+ &= \text{conv } N^+, \quad D^- = \text{conv } N^-, \\ A &= \overline{\text{conv}}(D^+ \cup D^-), \quad M = \{x \in l_1 : f(x) \leq 1 \ \forall f \in A\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. *Множество M выпукло, замкнуто, радиально ограничено и антипроксиминально в $X = l_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что множества N и A компактны по норме пространства l_∞ . Следовательно, множество A w^* -замкнуто в X^* . Тогда по теореме о биполяре множество A является поляркой к выпуклому, замкнутому в l_1 множеству M .

Множество A компактно и является выпуклой замкнутой оболочкой компактного множества N ; тогда, как известно (см., например, [7; с. 89]) все экстремальные точки множества A принадлежат N .

Докажем, что множество M радиально ограничено. Так как A полярна к M , достаточно доказать, что для любого элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_1 \setminus \{0\}$ справедливо неравенство

$$\sup \left\{ \langle x, f \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n : f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots) \in A \right\} > 0. \quad (1)$$

Если $\langle x, \mathbf{e}^+ \rangle \geq \varepsilon > 0$, то в силу слабой сходимости $\tilde{\mathbf{e}}_n^+ \xrightarrow{w^*} \mathbf{e}^+$ найдется номер n такой, что справедливо неравенство $\langle x, \tilde{\mathbf{e}}_n^+ \rangle \geq \varepsilon/2 > 0$; тогда $\langle x, \mathbf{e}_n^+ \rangle \geq \varepsilon/2n > 0$ и неравенство (1) доказано. Аналогично, если $\langle x, \mathbf{e}^- \rangle \geq \varepsilon > 0$, то справедливо неравенство (1). Остался случай, когда $\langle x, \mathbf{e}^+ \rangle = \langle x, \mathbf{e}^- \rangle = 0$. Так как $x \neq 0$, $\langle x, \mathbf{e}^+ \rangle = 0$, найдется номер k такой, что $x_k < 0$. Тогда $\langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle > 0$, неравенство (1) доказано и множество M радиально ограничено.

Докажем, что множество M антипроксиминально. В силу леммы А и замечания достаточно доказать, что для любого элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_1 \setminus \{0\}$, для любого элемента $f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots) \in A$ таких, что справедливо равенство $\langle x, f \rangle = \sup \{ \langle x, g \rangle : g \in A \}$, выполняется соотношение $\text{crit } f = \emptyset$. Рассматривая x как элемент второго сопряженного пространства $(l_1)''$, получаем, что x — линейный непрерывный функционал на l_∞ . По теореме А найдется вероятностная мера μ , представляющая x , носитель которой принадлежит множеству экстремальных точек. По доказанному ранее множество экстремальных точек множества A принадлежит N ; следовательно, $\text{supp } \mu \subset N$. Так как множество N имеет единственную предельную точку, то

$$\mu = \rho_0 \delta_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^1 \delta_{\{\mathbf{e}_k^+\}} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \delta_{\{\mathbf{e}_k^-\}},$$

где $\rho_0 \geq 0$, $\rho_k^1 \geq 0$, $\rho_k^2 \geq 0$ при $k \in \mathbb{N}$, $\rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 = 1$, $\delta_{\{\cdot\}}$ — точечная мера Дирака.

Имеем

$$\sup\{\langle x, g \rangle\} = \langle x, f \rangle = \int_A x \, d\mu = \int_N x \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^1 \langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \langle x, \mathbf{e}_k^- \rangle.$$

Поскольку $\langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle \rightarrow 0$, $\langle x, \mathbf{e}_k^- \rangle \rightarrow 0$, $\langle x, f \rangle = \sup\{\langle x, g \rangle : g \in A\} > 0$, найдутся номер k_0 и число $\varepsilon > 0$ такие, что при $k > k_0$ справедливы неравенства $\langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle + \varepsilon < \langle x, f \rangle$, $\langle x, \mathbf{e}_k^- \rangle + \varepsilon < \langle x, f \rangle$.

Следовательно, справедливы равенства

$$\langle x, f \rangle = \sum_{k=1}^{k_0} \rho_k^1 \langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle + \sum_{k=1}^{k_0} \rho_k^2 \langle x, \mathbf{e}_k^- \rangle, \quad f = \sum_{k=1}^{k_0} \rho_k^1 \mathbf{e}_k^+ + \sum_{k=1}^{k_0} \rho_k^2 \mathbf{e}_k^-,$$

где

$$\rho_k^1 \geq 0, \quad \rho_k^2 \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n_0} \rho_k^1 + \sum_{k=1}^{n_0} \rho_k^2 = 1.$$

В силу определения элементов $\mathbf{e}_k^+$ и $\mathbf{e}_k^-$ получаем следующие соотношения:

а) при $n > k_0$

$$|f_n| = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k};$$

б) при $n = k_0$

$$|f_n| = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left| \frac{\rho_n^2}{n} + \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k} \right| \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left| \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k} \right|;$$

в) при $n < k_0$

$$|f_n| = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left| \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1}{k} - \frac{\rho_n^1}{n} - \sum_{k=n}^{k_0} \frac{\rho_k^2}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho_k^2}{k} \right| \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k}.$$

Из соотношений а), б) и в) получаем, что

$$|f_n| < 2 \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| = 2 \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k};$$

следовательно, $\text{crit } f = \emptyset$ и M антипроксимально.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что пространство l_1 удовлетворяет условию Радона–Никодима, в частности, по теореме Данфорда–Петтиса (см., например, [8; с. 174]) это следует из того, что l_1 – сопряженное, сепарабельное пространство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Cobzaş, *Math. Balkanica*, **4** (1974), 79–82. [2] M. Edelstein, *J. Approx. Theory*, **18**:1 (1976), 1–8. [3] J. Borwein, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **73**:1 (1981), 5–8. [4] В. С. Балаганский, *Матем. заметки*, **60**:5 (1996), 643–657. [5] M. Edelstein, A. C. Thompson, *Pacific J. Math.*, **40**:3 (1972), 553–560. [6] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968. [7] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971. [8] Д. Дистель, *Геометрия банаховых пространств. Избранные главы*, Вища школа, Киев, 1980.

В. С. Балаганский

Институт математики и механики УрО РАН

E-mail: Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Поступило

07.04.2008