Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов, Об интерполяции и теоремах вложения пространств $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\star\sigma q}(\Omega)$, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 788–790

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:17:32

Об интерполяции и теоремах вложения пространств $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\sigma q}(\Omega)$

К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов

1. Интерполяционный метод для анизотропных пространств. Пусть A_1 – банахово пространство, A_2 – функциональная банахова решетка. Через $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1 -значных измеримых функций таких, что $\|f\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\|_{\mathbf{A}} = \|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$.

Пусть $\mathbf{A}_0 = (A_1^0, A_2^0)$ и $\mathbf{A}_1 = (A_1^1, A_2^1)$ – два анизотропных пространства, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, 2\}$. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1}, A_2^{\varepsilon_2})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \|\|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}}\|_{A_2^{\varepsilon_2}}.$$

Пару анизотропных пространств $\mathbf{A}_0 = (A_1^0, A_2^0)$ и $\mathbf{A}_1 = (A_1^1, A_2^1)$ назовем *совместимой*, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$.

Для элемента $a \in \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$ определим функционал

$$K(\mathbf{t}, a; \mathbf{A}) = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon}.$$

Пусть $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \theta_2) < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r_1, r_2) \leq \infty$. Для произвольной перестановки $\star = (j_1, j_2)$ множества $\{1, 2\}$, через $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}\star} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{(\theta_1, \theta_2), (r_1, r_2), \star}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, для элементов которого верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}\star}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty (t_{j_1}^{-\theta_{j_1}} t_{j_2}^{-\theta_{j_2}} K(\mathbf{t}, a; \mathbf{A}))^{r_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} \right)^{r_{j_2}/r_{j_1}} \frac{dt_{j_2}}{t_{j_2}} \right)^{1/r_{j_2}} < \infty.$$

ЛЕММА 1 [1]. Пусть $\mathbf{0} < \theta < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} \leq \infty$, $\star = (j_1, j_2)$ – некоторая перестановка множества $\{1, 2\}$, $\mathbf{A} = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $\mathbf{B} = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – два совместимых семейства банаховых пространств. Если найдутся два вектора $\mathbf{M}_0 = (M_1^0, M_2^0)$, $\mathbf{M}_1 = (M_1^1, M_2^1)$ с положительными компонентами такие, что для линейного оператора имеет место $T: A_\varepsilon \rightarrow B_\varepsilon$ с оценкой нормы $C_\varepsilon \prod_{i=1}^2 M_i^{\varepsilon_i}$ для любого $\varepsilon \in E$, то

$$T: \mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}\star} \rightarrow \mathbf{B}_{\theta\mathbf{r}\star}$$

с нормой $\|T\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}\star} \rightarrow \mathbf{B}_{\theta\mathbf{r}\star}} \leq \max_{\varepsilon \in E} C_\varepsilon \prod_{i=1}^2 (M_i^0)^{1-\theta_i} (M_i^1)^{\theta_i}$.

2. Пространства $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\sigma q}(\Omega)$ и их интерполяция. Для $1 \leq p, \tau \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ пространством Лоренца $L_{pq}(\Omega)$ назовем множество измеримых на Ω функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{p\tau}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^\tau \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau} & \text{при } 1 \leq p, \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & \text{при } 1 \leq p \leq \infty, \tau = \infty, \end{cases}$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x)$.

Пусть $-\infty < \sigma < \infty$, $1 \leq q, p, \tau \leq \infty$ и $\star = (j_1, j_2)$ – некоторая перестановка множества $\{1, 2\}$. Определим пространство $\mathfrak{L}_{p\tau}^{\sigma q}(\Omega)$, как множество последовательностей

$a = \{a_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где $a_k(x)$ – измеримые на Ω функции, для которых конечна норма: при $\star = (1, 2)$

$$\|a\|_{\mathfrak{L}_{p\tau}^{\star q}(\Omega)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (2^{\sigma k} \|a_k\|_{L_{p\tau}})^q \right)^{1/q},$$

а при $\star = (2, 1)$

$$\|a\|_{\mathfrak{L}_{p\tau}^{\star q}(\Omega)} = \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (2^{\sigma k} a_k^*(\cdot))^q \right)^{1/q} \right\|_{L_{p\tau}}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $-\infty < \sigma_0 \neq \sigma_1 < +\infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$, $1 \leq \tau_0, \tau_1 \leq \infty$ и $\star_\varepsilon = (j_1^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}, j_2^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)})$ – некоторые перестановки множества $\{1, 2\}$ для всех $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E$. Тогда для $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $1 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ и $\star = (j_1, j_2)$ – некоторой перестановки множества $\{1, 2\}$, справедливо равенство

$$(\mathfrak{L}_{p\varepsilon_1}^{\star \sigma_\varepsilon q_\varepsilon}(\Omega); \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E)_{(\theta_1, \theta_2), (r_1, r_2), \star} = \mathfrak{L}_{pr_1}^{\star \sigma_{r_2}}(\Omega),$$

где $\sigma = (1 - \theta_2)\sigma_0 + \theta_2\sigma_1$, $1/p = (1 - \theta_1)/p_0 + \theta_1/p_1$.

Для $-\infty < \sigma < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q$, $\tau \leq \infty$ и $\star = (j_1, j_2)$ – некоторой перестановки множества $\{1, 2\}$, пространство $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\star q}(\Omega)$ определим как множество функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\mathfrak{B}_{p\tau}^{\star q}(\Omega)} = \|\{f * \varphi\}\|_{\mathfrak{B}_{p\tau}^{\star q}(\Omega)},$$

где $\varphi(\xi) = \{\varphi_k(\xi)\}_{k=0}^{\infty}$ – разбиение единицы на области Ω , $(f * \varphi)(x) = \int_{\Omega} f(x - y)\varphi(y) dy$ – свертка функций f , φ .

Пространство $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\star q}(\Omega)$ при $\star = (1, 2)$ является пространством типа пространства Бесова $B_{pq(\tau)}^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (см. [2], [3]), а при $\star = (2, 1)$ – несколько схоже по определению с пространством типа Лизоркина–Трибеля $F_{pq(\tau)}^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (см. [3]), однако в отличие от него, операция взятия невозрастающей перестановки применена не к функции $f_{\sigma q}(x) = (\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\sigma k} \times |(\varphi_k * f)(x)|)^q)^{1/q}$, а к каждой из функций $(\varphi_k * f)(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $W_{p\varepsilon_1}^{\sigma_\varepsilon \varepsilon_2}(\Omega)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E$, – пространства Соболева, и $\sigma_0 \neq \sigma_1 \in \mathbb{N}$, $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$. Тогда для $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $1 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ и $\star = (j_1, j_2)$ – некоторой перестановки множества $\{1, 2\}$, справедливо равенство

$$(W_{p\varepsilon_1}^{\sigma_\varepsilon \varepsilon_2}(\Omega); \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E)_{(\theta_1, \theta_2), (r_1, r_2), \star} = \mathfrak{B}_{pr_1}^{\star \sigma_{r_2}}(\Omega),$$

где $\sigma = (1 - \theta_2)\sigma_0 + \theta_2\sigma_1$, $1/p = (1 - \theta_1)/p_0 + \theta_1/p_1$.

Теорема 2 показывает, что результат интерполяции пространств Соболева приводит к пространствам типа пространств Бесова и типа пространств Лизоркина–Трибеля в зависимости от параметра $\star$. Этот факт позволяет нам рассматривать эти пространства как единную шкалу пространств.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $-\infty < \sigma_0 \neq \sigma_1 < +\infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$, $1 \leq \tau_0, \tau_1 \leq \infty$ и $\star_\varepsilon = (j_1^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}, j_2^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)})$ – некоторые перестановки множества $\{1, 2\}$ для всех $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E$. Тогда для $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $1 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ и $\star = (j_1, j_2)$ – некоторой перестановки множества $\{1, 2\}$, справедливо равенство

$$(\mathfrak{B}_{p\varepsilon_1}^{\star \sigma_\varepsilon q_\varepsilon}(\Omega); \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E)_{(\theta_1, \theta_2), (r_1, r_2), \star} = \mathfrak{B}_{pr_1}^{\star \sigma_{r_2}}(\Omega),$$

где $\sigma = (1 - \theta_2)\sigma_0 + \theta_2\sigma_1$, $1/p = (1 - \theta_1)/p_0 + \theta_1/p_1$.

Теорема 3 показывает, что шкала пространств $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\sigma q}(\Omega)$ замкнута относительно данного интерполяционного метода, т.е. результат интерполяции пространств описывается пространством из этой же шкалы. Здесь следует отметить, что шкалы пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля не замкнуты относительно вещественного интерполяционного метода.

3. Теоремы вложения разных метрик и измерений для пространств $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\sigma q}(\mathbb{R}^n)$. Применяя теоремы 2, 3 к теоремам вложения разных метрик и измерений для пространств Соболева, Бесова или Лизоркина–Трибеля [2]–[4], получаем соответствующие теоремы для пространств $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\sigma q}(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $-\infty < \sigma_0 < \sigma_1 < \infty$, $1 < p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leq q$, $\tau \leq \infty$ и $\star = (j_1, j_2)$ – некоторая перестановка множества $\{1, 2\}$. Тогда при $\sigma_0 - n/p_0 \leq \sigma_1 - n/p_1$ справедливо вложение

$$\mathfrak{B}_{p_1\tau}^{\sigma_1 q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{B}_{p_0\tau}^{\sigma_0 q}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$; положим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Для функций f из пространств $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\sigma q}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор $\mathfrak{R}$, действующий по следующему правилу:

$$\mathfrak{R}f(x') = \left\{ f(x', 0), \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', 0), \dots, \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x', 0) \right\}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q$, $\tau \leq \infty$ и $\star = (j_1, j_2)$ – некоторая перестановка множества $\{1, 2\}$; тогда при $\sigma > r + 1/p$ оператор $\mathfrak{R}$ является ретракцией $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\sigma q}(\mathbb{R}^n)$ на $\prod_{j=0}^r \mathfrak{B}_{p\tau}^{(\sigma-1/p-j)q}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Отметим, что в отличие от пространств Лизоркина–Трибеля введенная шкала пространств $\mathfrak{B}_{p\tau}^{\sigma q}(\Omega)$ замкнута относительно теорем вложения разных измерений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. Д. Нурсултанов, *Докл. РАН*, **394**:1 (2004), 22–25. [2] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980. [3] Х. Трибель, *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980. [4] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

К. А. Бекмаганбетов

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.ru

Поступило
15.05.2008

Е. Д. Нурсултанов

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: er-nursul@yandex.ru