Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Сильниченко, О сходимости порядкосохраняющих
слабых жадных алгоритмов, *Матем. заметки*, 2008,
том 84, выпуск 5, 795–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:29:00

О сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов

А. В. Сильниченко

1. Введение и формулировки основных результатов. В статье речь пойдет о сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов (далее ПСЖА) в различных пространствах. Во второй части мы получим критерий сходимости ПСЖА в произвольном нормированном пространстве. В третьей и четвертой частях мы приведем два следствия из общего критерия: первое будет касаться сходимости ПСЖА в L_p по специальным системам функций, а второе – геометрической интерпретации критерия в гильбертовом пространстве.

Пусть X – квазинормированное пространство. (Вместо неравенства треугольника для любых $x, y \in X$ имеем $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$, где C – абсолютная константа, например, L_p с квазинормой $\|f\|_p = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$ при $0 < p < 1$.)

Пусть $\{L_k\}$ – последовательность линейных подпространств из X , $\{\alpha_k\}$ – последовательность неотрицательных чисел. Определим ПСЖА для любого элемента $f \in X$ с помощью следующей индуктивной процедуры. Пусть $f_0(f) = 0$, $r_0(f) = f$, $k_0(f) = 0$. Если определены $f_n(f)$, $r_n(f)$ и $k_n(f)$, то выберем $k_{n+1} = k_{n+1}(f) > k_n(f)$ и элемент $\varphi_{k_{n+1}} \in L_{k_{n+1}}$ так, чтобы

$$\|r_n(f) - \varphi_{k_{n+1}}\| \leq \inf_{\varphi \in L_k, k > k_n} \|r_n(f) - \varphi\| + \alpha_n.$$

Далее положим $f_{n+1}(f) = f_n(f) + \varphi_{k_{n+1}}$ и $r_{n+1}(f) = f - f_{n+1}(f)$.

В отличие от обычных жадных алгоритмов, мы хотим при приближении сохранять заданный порядок элементов системы (подробнее о жадных алгоритмах можно прочитать в [1]).

Рассмотрим следующую задачу: при каких условиях на систему подпространств $\{L_k\}$ ПСЖА по этой системе сходится для любой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$, стремящейся к 0.

Во второй части статьи мы докажем критерий сходимости ПСЖА в квазинормированном пространстве с равномерно непрерывной квазинормой. А именно, для любых $\varepsilon > 0$, $R > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых векторов x, β , $\|\beta\| < \delta$, $\|x\| < R$, выполнено неравенство $\|x + \beta\| \leq \|x\| + \varepsilon$. Например, квазинорма в пространстве L_p при любом $p > 0$ равномерно непрерывна.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что X – пространство с равномерно непрерывной квазинормой. ПСЖА по системе $\{L_k\}$ сходится для любой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$, $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда существует $\sigma < 1$ такое, что для любых $f \in X$ и N существуют $n > N$ и $\varphi \in L_n$ такие, что*

$$\|f - \varphi\| \leq \sigma \|f\|. \quad (1)$$

В третьей части статьи будет рассмотрена задача о системах представления в L_p , образованных сжатиями и сдвигами фиксированной функции. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ называется *системой представления* в X , если для любого элемента $f \in X$ существует последовательность чисел $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ такая, что $f = \sum_{n=0}^\infty a_n \varphi_n$ (при этом система $\{\varphi_n\}$ может не быть базисом, последовательность может быть не единственной). Пусть $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$. Рассмотрим систему двоичных сжатий сдвигов $\varphi_{k,i}(x) = \varphi(2^k x - i)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $i = 0, \dots, 2^k - 1$. Возникает задача: при каких условиях система $\{\varphi_{k,i}\}$ является системой представления в L_p ?

В [2] доказаны следующие утверждения:

- 1) при $p \geq 1$, $\int_0^1 \varphi(x) dx \neq 0$, $\varphi \in L_p$, система $\{\varphi_{k,i}\}$ является системой представления в L_p ;
- 2) при $p < 1$, $\varphi \neq 0$, $\varphi \in L_2$ система $\{\varphi_{k,i}\}$ является системой представления в L_p .

Позже Ф. П. Назаров показал (устное сообщение), что для любого $p < 1$ существует число $q(p) < 2$ такое, что при $\varphi \in L_q$ система $\{\varphi_{k,i}\}$ является системой представления в L_p .

Используя теорему 1, мы уточняем данный результат и получаем верхнюю границу для $q(p)$.

Пусть L_k – подпространства, натянутые на вектора $\{\varphi_{k,i}\}$, где k – фиксировано, а $i = 0, \dots, 2^k - 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \in (0, 1)$ и φ – действительная функция с носителем на отрезке $[0, 1]$, $\varphi \neq 0$. Если $\varphi \in L_{p+1}[0, 1]$, то для любой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$, $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, ПСЖА по системе подпространств L_k , $k \geq 0$, сходится для любой функции $f \in L_p[0, 1]$.

Также будут получены условия, достаточные для сходимости ПСЖА почти всюду.

ТЕОРЕМА 3. В условиях теоремы 2 ПСЖА сходится почти всюду на $[0, 1]$, если $\sum_{i=0}^\infty \alpha_n < \infty$.

В четвертой части работы будут в некоторых частных случаях получены геометрические формулировки критерия сходимости ПСЖА. В случае гильбертова пространства из теоремы 1 удастся получить критерий сходимости ПСЖА в геометрических терминах. Пусть H – гильбертово пространство. Точку $\psi \in H$ будем называть пределом в слабом смысле для последовательности $\{\varphi_n\}$, если для любого $g \in H$ выполнено: $(g, \varphi_n) \rightarrow (g, \psi)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть B – множество точек ψ , для которых существует последовательность $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in L_n$, $\|\varphi_n\| = 1$, слабо сходящаяся к ψ . Пусть A – замыкание выпуклой оболочки множества B .

ТЕОРЕМА 4. ПСЖА по системе $\{L_n\}$ сходится для любой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$, $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда внутренность множества A не пуста.

2. Доказательство теоремы 1. Начнем со следующей простой леммы.

ЛЕММА 1. Пусть для норм остатков верно следующее неравенство:

$$\|r_n\| \leq \sigma^n \|f\| + \sum_{i=1}^n \sigma^{n-i} \alpha_i. \quad (2)$$

Тогда $\|r_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\|r_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует N такое, что $\sigma^N \|f\| < \varepsilon$ и для любого $n > N$ выполнено $|\alpha_n| < \varepsilon$. Существует $K \geq 0$ такое, что $\sum_{i=1}^N \sigma^{K+N-i} \alpha_i < \varepsilon$. Тогда для любого $n > N + K$ имеем

$$\begin{aligned} \|r_n\| &\leq \sigma^n \|f\| + \sum_{i=1}^n \sigma^{n-i} \alpha_i \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^N \sigma^{K+N-i} \alpha_i + \sum_{i=N+1}^n \sigma^{n-i} \alpha_i \leq \varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{1-\sigma} \varepsilon = \left(2 + \frac{1}{1-\sigma}\right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Утверждение “тогда” вытекает из леммы 1. Если выполнено условие (1), то для норм остатка на каждом шаге алгоритма верна оценка (2) и, как следствие, $\|r_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В обратную сторону будем доказывать теорему методом от противного. Пусть ПСЖА сходится для любого элемента $f \in X$, но условие (1) не выполнено. Тогда для любого $\sigma < 1$ существуют $f \in X$ и N такие, что для любых $n > N$ и $\varphi \in L_n$ справедливо неравенство $\|f - \varphi\| > \sigma \|f\|$. В частности, существуют последовательность $\{f_k\}$, $\|f_k\| = 1$ и числа N_k такие, что для любых $n > N_k$ и $\varphi \in L_n$ выполнено $\|f_k - \varphi\| > (1 - 1/k)$. Ошибкой n -го шага ПСЖА будем называть величину

$$E_n = \|r_n - \varphi_{n+1}\| - \inf_{\varphi \in L_{k,k} > n} \|r_n - \varphi\|.$$

Построим реализацию ПСЖА, которая не будет сходиться. Воспользуемся методом математической индукции. Возьмем $r_0 = f_1$ и последовательность $\{\delta_k\}$ такую, что $\delta_k < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, причем для x , $x + \beta$, $\|x\| < 2$, $\|\beta\| < \delta_k$, выполнено $\|x + \beta\| \leq \|x\| + 1/k$. Пусть после $n_{k,0}$ шагов алгоритма имеем $r_{n_{k,0}} = f_k + \gamma_{k,0}$, где $\|\gamma_{k,0}\| < \delta_k/2$. Докажем, что от f_k можно перейти к f_{k+1} за конечное число шагов алгоритма, причем ошибка на каждом шаге не превосходит $4/k$. Так как ПСЖА сходится для любого элемента из X , для любых $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{\alpha_i\}$, $\alpha_i \rightarrow 0$, через конечное число шагов получим $\|r_i\| < \varepsilon$. Взяв числа $\alpha_i = 1/(i+k)$, получим $r_{n_{k,1}} = \gamma_{k,1}$, $\|r_{n_{k,1}}\| < \delta_k/2$. Рассмотрим $r_{n_{k,1}} = (1/2)\delta_k f_{k+1} + \gamma_{k,1} - (1/2)\delta_k f_{k+1}$. Заметим, что $\|\gamma_{k,1} - (1/2)\delta_k f_{k+1}\| < 2/k$. Приближим с помощью ПСЖА по системе $\{L_n\}_{n > n_{k,1}}$ вектор $\gamma_{k,1} - (1/2)\delta_k f_{k+1}$. Возьмем коэффициенты приближения $\alpha_j = 2^{-(j+k)}$. Тогда

$$\left\| r_j(\gamma_{k,1} - \frac{1}{2}\delta_k f_{k+1}) \right\| \leq \left\| \gamma_{k,1} - \frac{1}{2}\delta_k f_{k+1} \right\| + \sum_{i=1}^j \alpha_i \leq \frac{3}{k}.$$

Так как ПСЖА сходится, существует J такое, что $\|r_J\| < \delta_k$.

Вычислим максимальную ошибку ПСЖА, если для приближения $r_{n_{k,1}}$ брать последовательно те же приближающие элементы, что и для $\gamma_{k,1} - (1/2)\delta_k f_{k+1}$. Так как $\|(1/2)\delta_k f_{k+1}\| < \delta_k$, получим $\|r_{n_{k,1+j}}\| \leq \|r_J(\gamma_{k,1} - (1/2)\delta_k f_{k+1})\| + 1/k < 4/k$. При этом суммарная ошибка не превзойдет $4/k$, так как ничего лучше нулевого вектора получить нельзя. Таким образом, на $n_{k,2}$ шаге ПСЖА имеем $r_{n_{k,2}} = (1/k)f_{k+1} + \gamma_{k,2}$. Воспользуемся методом математической индукции по второму индексу. Пусть построена реализация ПСЖА такая, что $r_{n_{k,i}} = (i-1)\delta_k f_{k+1} + \gamma_{k,i}$, $\|\gamma_{k,i}\| < \delta_k$. Покажем, что от $r_{n_{k,i}}$ можно с помощью некоторого числа шагов перейти к $r_{n_{k,i+1}}$, и ошибка на каждом шаге не превысит $7/k$. Рассмотрим $r_{n_{k,i}} = i\delta_k f_{k+1} + \gamma_{k,i} - \delta_k f_{k+1}$. Приближим $\gamma_{k,i} - \delta_k f_{k+1}$ с помощью ПСЖА по системе $\{L_n\}_{n > n_{k,i}}$ с $\alpha_j = 2^{-(k+j)}$. Так как ПСЖА сходится, существует J такое, что $\|r_J(\gamma_{k,i} - \delta_k f_{k+1})\| < \delta_k$. Вычислим максимальную ошибку ПСЖА для элемента $r_{n_{k,i}}$, если в качестве приближающих векторов брать те же векторы, что и для $\gamma_{k,i} - \delta_k f_{k+1}$. Из непрерывности квазинормы и выбора f_{k+1} имеем

$$i\delta_k \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \|f_{k+1}\| \leq \|i\delta_k f_{k+1} - \varphi\| \leq \frac{1}{k} + \|i\delta_k f_{k+1} + \gamma_{k,i} - \varphi\|.$$

Следовательно, $\|(i/k)f_{k+1} + \gamma_{k,i} - \varphi\| \geq (i-2)/k$. Значит, нельзя уменьшить норму остатка за один шаг больше, чем на $2/k$. Тогда суммарная ошибка не превосходит $2/k + \|\gamma_{k,i}\| + 1/k < 4/k$, где последнее слагаемое отвечает за точность приближения $\gamma_{k,i}$. Получили реализацию ПСЖА, для которой $r_{n_{k,0}} = f_k + \gamma_{k,0}$, где $\|\gamma_{k,0}\| < \delta_k$ для всех k .

Полученная реализация не сходится, так как норма остатка не стремится к 0. Данное противоречие доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 для скорости сходимости ПСЖА верна оценка

$$\|r_n\| \leq \sigma^n \|f\| + \sum_{i=1}^n \sigma^{n-i} \alpha_i.$$

3. ПСЖА в функциональных пространствах. Перед доказательством теоремы 2 сделаем несколько замечаний.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 2 $\{\varphi_{k,i}\}$ является системой представления в L_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как носители функций $\{\varphi_{k,i}\}$ не пересекаются при любом фиксированном k и $i = 0, \dots, 2^k - 1$, из сходимости ПСЖА следует сходимость порожденного им ряда.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 не улучшаема в данных терминах. А именно, для любого $q < p + 1$ существуют функции $\varphi \in L_q$ и $f \in L_p$ такие, что ПСЖА для f по системе двоичных сжатий и целых сдвигов функции φ не сходится к f ни для какой последовательности $\{\alpha_k\}$.

ПРИМЕР 1. Возьмем $f(x) = 1$ для любого x , $\varphi(x) = x^{-1/(p+1)}$, $x \in [0, 1/2]$ и $\varphi(x) = -(1-x)^{-1/(p+1)}$, $x \in [1/2, 1]$. В работе [3] показано, что $\|1 - \lambda\varphi\|_p \geq 1$ для любого λ . Следовательно, на каждом шаге алгоритма может быть взято нулевое приближение и алгоритм сойдется к тождественному нулю.

Доказательству теоремы предположим лемму.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 1 существует λ такое, что

$$\|1 - \lambda\varphi\|_p \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} (|1 + \lambda\varphi(x)|^p + |1 - \lambda\varphi(x)|^p - 2) \lambda^{-p-2} d\lambda \right) dx. \quad (3)$$

Очевидно, что внутренний интеграл сходится абсолютно. Заметим, что

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} (|1 + \lambda|\varphi(x)||^p + |1 - \lambda|\varphi(x)||^p - 2) \lambda^{-p-2} d\lambda \right) dx.$$

Сделав замену $\mu = \lambda|\varphi(x)|$ (так как в точках x , для которых $\varphi(x) = 0$, исходный и полученный после замены интегралы равны 0, такая замена возможна), получим

$$I = \int_0^{+\infty} (|1 + \mu|^p + |1 - \mu|^p - 2) \mu^{-p-2} d\mu \int_0^1 |\varphi(x)|^{p+1} dx.$$

Докажем, что это произведение равно 0. Сделав замену $t = 1/\mu$ в первом интеграле произведения получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} (|1 + t|^p + |1 - t|^p - 2t^p) dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M (|1 + t|^p + |1 - t|^p - 2t^p) dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} ((1+M)^{p+1} + (M-1)^{p+1} - 2M^{p+1} - 2) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} M^{p+1} ((1+1/M)^{p+1} + (1-1/M)^{p+1} - 2) = 0. \end{aligned}$$

Перепишав интеграл (3) в виде

$$0 = \int_0^{+\infty} \lambda^{-p-2} d\lambda \left(\left(\int_0^1 |1 + \lambda\varphi(x)|^p dx - 1 \right) + \left(\int_0^1 |1 - \lambda\varphi(x)|^p dx - 1 \right) \right),$$

получим: или существует λ , при котором $\int_0^1 |1 + \lambda\varphi(x)|^p dx < 1$, или при любом λ имеем $\int_0^1 |1 + \lambda\varphi(x)|^p dx = 1$. Но второй случай не может выполняться, так как $\int_0^1 |1 + \lambda\varphi(x)|^p dx > 1$ при достаточно больших λ . Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть функция $\varphi(x) \in L_p$, $\varphi \neq 0$, удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда для любой $f \in L_p$ и для любого N существуют $n > N$ и набор чисел $\{c_{n,i}\}$ такие, что $\|f - \sum_{i=0}^{2^n-1} c_{n,i}\varphi_{n,i}\|_p < \sigma\|f\|_p$, где $\sigma < 1$.

Доказательство леммы 3 содержится в работе [2].

Из леммы 3 следует выполнение условий теоремы 1. Следовательно, ПСЖА сходится. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся следующей простой леммой.

ЛЕММА 4. Пусть Ω – пространство с мерой μ , $\mu(\Omega) < \infty$, $\{f_n\}$ – последовательность функций из $L_p(\Omega)$, сходящаяся к некоторой функции f . Если $\sum_{n=1}^{\infty} \|f - f_n\|_p < \infty$, то последовательность f_n сходится к f почти всюду на Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие леммы 4 не может быть усилено в данных терминах, а именно, для любой последовательности $r_n \rightarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$, существует последовательность функций f_n , сходящаяся к функции f по норме L_p , $\|f - f_n\|_p \leq r_n$, и расходящаяся всюду на Ω .

ПРИМЕР 2. Возьмем $\Omega = [0, 1)$, $f_n = 1$ при $x \in [\max(0, \{\sum_{k=1}^n r_k\} - r_n), \{\sum_{k=1}^n r_k\}]$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа, и $f_n(x) = 0$ при других $x \in [0, 1)$.

Доказательство леммы 4. Обозначим $r_n = \|f - f_n\|_p$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Рассмотрим множества $E_n = \{x : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$. Очевидно, что $\mu(E_n) \leq \varepsilon^{-p} r_n$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. Следовательно, для любого $\delta > 0$ существует N и множество Q , $\mu(Q) < \delta$, такие, что для любого $x \in \Omega \setminus Q$ и $n > N$ верно $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Возьмем последовательность $\varepsilon_n = 1/n$ и найдем по ней множества Q_n , $\mu(Q_n) < \delta/2^n$. Рассмотрим множество $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Его мера меньше δ , и для любого $x \in \Omega \setminus Q$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$. Из условия произвольности δ получим утверждение леммы.

Утверждение теоремы 3, очевидно, следует из леммы 4 и оценки (2).

4. Критерий сходимости ПСЖА в гильбертовом пространстве. Доказательству теоремы 4 предположим лемму.

ЛЕММА 5. ПСЖА по системе $\{L_k\}$ сходится для любой последовательности $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, для любого $f \in H$ тогда и только тогда, когда

$$\inf_{f \in H \|f\|=1} \sup_{\psi \in A} |(f, \psi)| > 0.$$

Доказательство. Пусть

$$q = \inf_{f \in H \|f\|=1} \sup_{\psi \in A} |(f, \psi)| > 0. \quad (4)$$

Тогда

$$q = \inf_{f \in H \|f\|=1} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\varphi \in L_k} |(f, \varphi)|$$

и, значит, условие (1) выполнено с $\sigma = \sqrt{1 - q^2/4}$, и по теореме 1 ПСЖА сходится.

Докажем лемму в другую сторону. Так как ПСЖА сходится, по теореме 1 выполнено условие (1). Найдется $q > 0$ такое, что для любых $f \in H$ и N существуют $n > N$ и $\varphi \in L_n$ такие, что $|(f, \varphi)| > q$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$, $\varphi_{n_k} \in L_{n_k}$, для которой выполнено $|(f, \varphi_{n_k})| > q$. Пусть ψ – слабая предельная точка последовательности $\{\varphi_{n_k}\}$. Тогда $|(f, \psi)| > q$, и в силу произвольности f выполнено условие (4). Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4. Если внутренность A не пуста, то, поскольку множество A симметрично относительно 0, в нем содержится шар с центром в нуле и некоторым радиусом $q > 0$. Тогда для множества A выполнено условие (4) и по лемме 5 ПСЖА сходится.

Пусть внутренность множества A пуста. Тогда для любого $n = 1, 2, \dots$ найдется элемент $g_n \in H$ такой, что $\|g_n\| < 1/n$ и g_n не принадлежит A . По теореме отделимости существует элемент $f_n \in H$ такой, что $\|f_n\| = 1$ и $(f_n, g_n) > \sup_{\psi \in A} (f_n, \psi)$. Учитывая симметричность множества A , выводим отсюда, что $\sup_{\psi \in A} |(f_n, \psi)| < 1/n$. Следовательно, условие (4) не выполнено и по лемме 4 ПСЖА не сходится. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. N. Temlyakov, *Foundations of Computational Mathematics* (Santander, 2005), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **331**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, 371–394.
[2] V. I. Filippov, P. Oswald, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29. [3] В. И. Иванов, *Тезисы докладов Всероссийской конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики”*, ТулГУ, Тула, 2000, 33–34.

А. В. Сильниченко

Российский университет дружбы народов

Поступило

24.03.2008