Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, О разных видах однородности алгебр
Ли, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 178–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:48:23

О разных видах однородности алгебр Ли

В. В. Горбацевич

В статье рассматриваются несколько различных способов введения понятия однородности для случая конечномерных алгебр Ли. Среди них однородность, почти однородность, слабая однородность, проективная однородность. Приводятся конструкции и примеры алгебр Ли разных видов однородности.

Показывается, что наиболее нетривиальными и интересными для подробного изучения являются понятия слабой однородности и слабой проективной однородности. Для слабо однородных и слабо проективно однородных алгебр Ли доказываются некоторые структурные свойства.

Библиография: 13 названий.

Введение. Прежде чем более конкретно, чем в названии статьи, сформулировать тему данной статьи, приведем нескольких наводящих соображений из геометрии. Риманово многообразие (M, g) называется, как известно, однородным, если группа его автоморфизмов (т.е. гладких изометрий римановой метрики g) – группа $\text{Iso}(M)$ – транзитивна на M (при естественном действии группы $\text{Iso}(M)$ на M). Аналогично, симплектическое многообразие (M, ω) называется однородным, если группа его автоморфизмов (т.е. симплектоморфизмов – диффеоморфизмов, сохраняющих симплектическую форму ω) действует на M транзитивно. По той же схеме вводятся понятие однородности и для некоторых других классов многообразий. Но вот для общих гладких многообразий M (без какой-либо дополнительной геометрической структуры) такая схема не подходит, так как группа $\text{Diff}(M)$ всех его диффеоморфизмов всегда транзитивна на M . Поэтому гладкое многообразие удобно называть однородным, если существует некоторая конечномерная группа Ли, транзитивная на нем. Различие подходов к понятию однородности многообразия указывает на то, что это понятие в разных ситуациях нужно вводить по-разному. Именно это соображение и привело – применительно к алгебрам Ли – автора к написанию данной статьи. В ней понятие однородности для алгебр Ли вводится несколькими различными способами, что дает возможность изучать несколько видов однородности.

Для многообразий, помимо однородности “в чистом виде”, часто вводится и исследуется более слабое понятие – мы его будем здесь называть слабой однородностью. Например, риманово многообразие M называется слабо однородным, если группа его изометрий $\text{Iso}(M)$ имеет на M открытую орбиту (или, как в этом случае иногда

говорят, эта группа слабо транзитивна на M). Аналогичные понятия будут рассмотрены и для алгебр Ли. Наконец, отметим, что буквальное понимание однородности для алгебр Ли оказывается малосодержательным. Но, с другой стороны, для алгебр Ли оказывается интересным и содержательным введение понятия проективной однородности (в нескольких вариантах).

Все алгебры Ли в данной статье предполагаются конечномерными, причем определенными над полем $k = \mathbb{R}$ (или, иногда, над $\mathbb{C}$). Многие утверждения статьи верны и в более общей ситуации – например, для случаев совершенных полей k или алгебраически замкнутых полей характеристики нуля. Само понятие однородности алгебр (не обязательно алгебр Ли) было впервые подробно рассмотрено в работе Кострикина [1], где алгебры рассматривались над конечными полями. Наше рассмотрение имеет другую ориентацию – на алгебры Ли над бесконечными полями, в основном над топологическими полями.

В п. 1 мы рассмотрим несколько разных видов понятия однородности для алгебр Ли. В пп. 2 и 3 более подробно рассмотрены два особенно интересных варианта определения однородности. Там указаны некоторые примеры алгебр Ли, однородных в рассматриваемых смыслах, и доказаны некоторые их структурные свойства.

1. Разные виды однородности алгебр Ли. Пусть L – некоторая конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (хотя многое в этой статье справедливо и для алгебр Ли над более общими полями).

Наше первое определение понятия однородности алгебры Ли копирует понятие однородности многообразий с геометрической структурой, о которых говорилось во введении. А именно, алгебра Ли L называется *однородной*, если группа ее автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ транзитивна на L (при естественном ее действии на алгебре Ли. Но ясно, что в таком понимании алгебра Ли однородной может быть, только если она нулевая. Ведь при автоморфизмах нулевой элемент инвариантен и потому алгебра Ли однородна (т.е. орбита любого – в том числе и нулевого – элемента совпадает со всей алгеброй) тогда и только тогда, когда эта алгебра состоит из одного нулевого элемента.

Следующий вариант понятия однородности уже более содержателен – он учитывает “горький опыт” предыдущего “экстремистского” определения. Алгебру Ли L назовем *почти однородной*, если естественное действие ее группы автоморфизмов транзитивно на $L \setminus \{0\}$ (т.е. это действие имеет ровно две орбиты – нулевой элемент и его дополнение). Именно в таком смысле и рассматривались однородные алгебры в [1] и во многих последующих работах.

Рассмотрим один пример – абелеву алгебру Ли $L = \mathbb{R}^n$. Ее группа автоморфизмов – это полная линейная группа $GL_n(\mathbb{R})$. Очевидно, что естественное действие этой группы на $\mathbb{R}^n$ почти транзитивно, т.е. она транзитивна на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ всех ненулевых векторов. Оказывается, что других почти однородных алгебр Ли не существует. Этот простой факт в разных вариантах уже публиковался ранее (например, для локально компактных групп и групп Ли – в [2]). Для полноты изложения приведем здесь прямое доказательство этого факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Почти однородная алгебра Ли абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – некоторая почти однородная алгебра Ли. Рассмотрим ее коммутант $[L, L]$; он инвариантен относительно действия группы $\text{Aut}(L)$ на L . Но из почти однородности алгебры Ли L следует, что вне нулевого элемента 0

имеется только одна орбита. Поэтому идеал $[L, L]$ должен либо совпадать с L , или же быть нулевым. Если он нулевой, то алгебра Ли L абелева, что и утверждалось выше. Остается только рассмотреть (и отвергнуть) вариант, когда $[L, L] = L$. Для этого применим рассуждение, которое будем использовать и ниже в этой статье.

Почти однородность алгебры Ли L означает, в частности, что для любого ненулевого скаляра λ элементы $X \in L$ и λX сопряжены относительно $\text{Aut } L$. В частности, спектры (наборы собственных значений) присоединенных операторов ad_X и $\text{ad}_{\lambda X}$ должны совпадать. Так как это совпадение должно иметь место для любого ненулевого скаляра λ , то получаем, что спектр оператора ad_X нулевой (т.е. все его собственные значения нулевые). Итак, мы видим, что для любого элемента X почти однородной алгебры Ли L оператор присоединенного представления нильпотентен. В силу теоремы Энгеля получаем, что тогда алгебра Ли L будет нильпотентной. Но у нильпотентных алгебр Ли всегда $[L, L] \neq L$, поэтому случай $[L, L] = L$ для почти однородной алгебры Ли L невозможен. Этим завершается доказательство предложения 1.

Отметим, что для конечных групп подобное утверждение неверно: существует достаточно много неабелевых почти однородных (или “однородных” в другой терминологии) групп – см., например, [2].

Итак, для алгебр Ли и понятие почти однородности не является содержательным (хотя для произвольных конечномерных алгебр оно представляет определенный интерес – см., например, статью [1] и последующие за нею работы). Переходим к следующему варианту понятия однородности алгебр Ли.

Алгебра Ли L называется *слабо однородной*, если естественное действие группы $\text{Aut}(L)$ имеет на L открытую орбиту (в топологии Зарисского или, что в данном случае эквивалентно, в евклидовой топологии). Так как $L \setminus \{0\}$ – открытое подмножество в L (и в евклидовой топологии, и в топологии Зарисского), то понятие слабой однородности есть расширение понятия почти однородности.

Рассмотрим некоторые примеры слабо однородных алгебр Ли.

ПРИМЕР 1. Абелева алгебра Ли $\mathbb{R}^n$ будет, конечно, слабо однородной.

ПРИМЕР 2. Пусть $L = FN_{k,p}$ – свободная нильпотентная алгебра Ли класса нильпотентности k и с p образующими. Покажем, что такая алгебра Ли L (при любых натуральных k, p) слабо однородна.

Для этого заметим, что минимальное число образующих нильпотентной алгебры Ли L равно, как известно, коразмерности ее коммутанта (или числу $\dim L/[L, L]$ – первому числу Бетти алгебры Ли L). Это минимальное число образующих и было выше обозначено через p . Более того, как известно (см., например, [3; гл. 1–3]), любые p элементов свободной нильпотентной алгебры Ли $L = FN_{k,p}$, линейно независимые $\text{mod}[L, L]$ (т.е. такие, что их образы при естественном эпиморфизме $L \rightarrow L/[L, L]$ линейно независимы) являются для этой нильпотентной алгебры Ли L свободными образующими.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_p$ – некоторая фиксированная система свободных образующих алгебры Ли $FN_{k,p}$. Пусть $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ – произвольная линейно независимая $\text{mod}[L, L]$ система элементов нашей алгебры Ли. Тогда в силу сказанного выше отображение $X_i \rightarrow Y_i$ распространяется (причем единственным образом) до автоморфизма алгебры Ли $FN_{k,p}$. Это, в частности, означает, что элемент X_1 при некотором автоморфизме нашей алгебры Ли может переходить в произвольный элемент Y_1 , не

лежащий в $[L, L]$ (ибо этот Y_1 всегда можно дополнить до указанной выше системы элементов $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$). Элементы алгебры Ли, не лежащие в ее коммутанте, образуют, очевидно, открытое подмножество в алгебре Ли (как дополнение до некоторого векторного подпространства). Поэтому $\text{Aut}(FN_{k,p})$ имеет на L открытую орбиту, т.е. алгебра Ли $FN_{k,p}$ слабо однородна.

На самом деле из доказанного выше вытекает, что $\text{Aut}(FN_{k,p})$ в своем естественном действии имеет открытую орбиту не только на L , но и на прямой сумме нескольких (но не более, чем p) экземпляров этой алгебры Ли.

Этот пример показывает, что понятие слабой однородности для алгебр Ли представляет определенный интерес, так как им обладают достаточно нетривиальные алгебры Ли. На самом деле, ниже будет показано, что существует очень много слабо однородных алгебр Ли и потому будет естественно выделять и изучать некоторые специальные классы таких алгебр Ли.

ПРИМЕР 3. Прямая сумма двух слабо однородных алгебр Ли тоже слабо однородна. Это утверждение почти очевидно (так как прямое произведение открытых подмножеств всегда открыто). Оно показывает, что прямые суммы нескольких свободных нильпотентных алгебр Ли тоже слабо однородны.

Более подробно слабо однородные алгебры Ли рассматриваются в следующем пункте этой статьи.

Переходим к следующему варианту понятия однородности алгебры Ли. В [4] было введено понятие, которое мы будем называть проективной однородностью (в [4] соответствующие алгебры Ли назывались однородными). Оно там было связано с некоторыми специальными вопросами теории групп Ли, но потом приобрело самостоятельное значение и подверглось довольно подробному изучению (в том числе и для произвольных алгебр, а не только лиевских – см., например, [5]).

Рассмотрим проективизацию $P(L)$ алгебры Ли – это множество всех прямых в L . Естественное действие группы автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ на L индуцирует, конечно, и действие этой группы на $P(L)$ (получаем алгебраическое действие линейной алгебраической группы на проективном пространстве). Алгебру Ли L назовем *проективно однородной*, если естественное действие группы $\text{Aut}(L)$ на $P(L)$ транзитивно (другими словами, если любые два ненулевых элемента алгебры Ли сопряжены с точностью до пропорциональности некоторым автоморфизмом).

Рассмотрим примеры проективно однородных алгебр Ли.

ПРИМЕР 4. Ясно, что абелева алгебра Ли $\mathbb{R}^n$ проективно однородна.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим трехмерную компактную простую алгебру Ли $L = \mathfrak{so}_3$. Нетрудно понять, что даже группа внутренних автоморфизмов этой алгебры Ли (лишь немногим отличающаяся от полной группы автоморфизмов) транзитивна на множестве прямых в этой алгебре Ли. А именно, группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{so}_3$ изоморфна группе SO_3 , которая действует на трехмерном векторном пространстве вращениями. Но тогда утверждение о транзитивности действия этой группы на прямых в $\mathfrak{so}_3$ очевидно.

На самом деле, перечисленными в примерах 4 и 5 исчерпываются все проективно однородные алгебры Ли [5].

Следуя общей схеме введения определений, использованной выше, естественно ввести здесь и еще одно понятие однородности. Алгебру Ли L назовем *слабо проективно однородной*, если действие группы ее автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ на $P(L)$ имеет открытую орбиту.

Приведем примеры слабо проективно однородных алгебр Ли.

ПРИМЕР 6. Ясно, что проективно однородная алгебра Ли будет и слабо проективно однородной. Поэтому алгебры Ли $\mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{so}_3$ слабо проективно однородны.

Но наш интерес к понятию слабой проективной однородности вызван тем, что имеются и многочисленные другие – нетривиальные – примеры слабо проективно однородных алгебр Ли.

ПРИМЕР 7. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ слабо проективно однородна. Для доказательства заметим, что все полупростые элементы этой алгебры сопряжены между собой с точностью до пропорциональности (это следует из сопряженности всех расщепимых – одномерных для $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ – подалгебр Картана). А так как полупростые элементы образуют открытое по Зарисскому подмножество, то отсюда вытекает слабая проективная однородность рассматриваемой нами алгебры Ли.

Отметим, что как и всякий другой нетривиальный пример, алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ не является проективно однородной. Она не будет и слабо однородной.

ПРИМЕР 8. Разрешимая двумерная алгебра Ли R_2 (в подходящем базисе X, Y она задается коммутационным соотношением $[X, Y] = Y$) является слабо проективно однородной. Для того чтобы показать это, отметим, что группа автоморфизмов этой алгебры Ли двумерна (ее алгебра Ли изоморфна R_2) и состоит из таких линейных преобразований:

$$X \rightarrow X + \alpha Y, \quad Y \rightarrow \beta Y, \quad \beta \neq 0.$$

Ясно, что слабо однородной эта алгебра Ли не является, так как орбита любого элемента не более чем одномерна. Но вот если рассматривать элементы этой алгебры Ли с точностью до пропорциональности (это еще одно понимание перехода к проективизации), то элемент X можно автоморфизмами перевести практически в любой элемент этой алгебры Ли R_2 (за исключением элементов, пропорциональных Y). Поэтому R_2 слабо проективно однородна.

Итак, нами введены 4 различных варианта понятия однородности для алгебр Ли. Между ними есть вполне очевидные серии импликаций:

$$\begin{aligned} \text{почти однородна} &\Rightarrow \text{слабо однородна} \Rightarrow \text{слабо проективно однородна,} \\ \text{почти однородна} &\Rightarrow \text{проективно однородна} \Rightarrow \text{слабо почти однородна.} \end{aligned}$$

Понятия слабой однородности и слабой проективной однородности для алгебр Ли представляются нам наиболее интересными и они будут изучены в последующих пунктах. В этом же пункте мы теперь рассмотрим некоторые простейшие свойства алгебр Ли, однородных в том или ином смысле.

ЛЕММА 1. Пусть L – некоторая алгебра Ли, а I – ее характеристический идеал (т.е. подалгебра, инвариантная относительно всех автоморфизмов алгебры Ли L).

1. Если алгебра Ли L почти однородна, то идеал I и фактор-алгебра L/I тоже почти однородны. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

2. Если L слабо однородна, то и фактор-алгебра L/I тоже слабо однородна. Сам идеал I при этом не обязательно будет слабо однородным. Если I и L/I слабо однородны, то алгебра Ли L в общем случае не обязательно слабо однородна.

3. Если алгебра Ли L проективно однородна, то I и L/I тоже проективно однородны. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

4. Если L слабо проективно однородна, то L/I тоже слабо проективно однородна. Идеал I при этом не обязательно будет слабо проективно однородным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Утверждение очевидно в силу предложения 1 (тут даже не нужна характеристичность идеала). Что касается обратного утверждения, то рассмотрим алгебру Ли R_2 , а в ней идеал $I = [R_2, R_2]$. Имеем $I \simeq \mathbb{R}$, $L/I \simeq \mathbb{R}$, поэтому алгебры Ли I и L/I почти однородны. А вот сама алгебра Ли R_2 почти однородной не будет (что очевидно; см. также предложение 1).

2. Если орбита элемента $X \in L$ под действием $\text{Aut}(L)$ открыта, то открытой будет и орбита образа этого элемента при естественном эпиморфизме $L \rightarrow L/I$. Это следует из того, что любой автоморфизм алгебры Ли L сохраняет I и потому порождает автоморфизм алгебры Ли L/I .

Тот факт, что идеал I не всегда будет слабо однороден, можно обосновать на конкретном примере. Но такого рода примеры должны использовать нильпотентные алгебры Ли размерности не меньше чем 7 (так как только начиная с размерности 6 существуют нильпотентные алгебры Ли, не являющиеся слабо однородными – см. ниже). Поэтому здесь мы в подробности входить не будем.

Рассмотрев снова алгебру Ли R_2 и $I = [R_2, R_2]$, получаем пример, в котором I и L/I слабо однородны, а сама алгебра Ли L – нет.

3. Утверждение мгновенно вытекает из описания проективно однородных алгебр Ли, указанного выше (следуя [4]). Так как so_3 – проективно однородная алгебра Ли, а $\text{so}_3 \oplus \text{so}_3$ – нет (что следует из того же описания), то, взяв $L = \text{so}_3 \oplus \text{so}_3$, $I = \text{so}_3$ и имея тогда $L/I = \text{so}_3$, убеждаемся в неверности обратного утверждения.

4. Если L слабо проективно однородна, то слабая проективная однородность фактор-алгебры L/I доказывается тем же методом, что и аналогичное утверждение в п. 2 настоящей леммы. Что же касается характеристического идеала I в слабо проективно однородной алгебре Ли L , то это тоже показывается указанием подходящего, хотя и довольно громоздкого, примера. Подробности здесь мы приводить не будем.

Лемма доказана.

Рассмотрим разложение Леви $L = S + R$ для алгебры Ли L (здесь R – радикал в L , а S – полупростая часть). Для почти однородных, слабо однородных и проективно однородных алгебр Ли изучение разложения Леви не представляет особого интереса: слабо однородные и почти однородные алгебры Ли имеют тривиальную полупростую часть, а проективно однородная алгебра Ли, как было указано выше, абелева или же изоморфна полупростой алгебре Ли so_3 . Но вот для слабо проективно однородных алгебр Ли из леммы 1 получаем такое полезное

СЛЕДСТВИЕ 1. Если алгебра Ли $L = S + R$ слабо проективно однородна, то и ее полупростая часть S тоже слабо проективно однородна.

Подробнее о полупростой части слабо проективно однородных алгебр Ли будет сказано в п. 3 ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $L_i, i = 1, \dots, l$, – некоторые алгебры Ли.

1. Если все алгебры Ли L_i слабо однородны, то и их прямая сумма $\oplus L_i$ тоже слабо однородна.

2. Если все алгебры Ли L_i слабо проективно однородны, то и их прямая сумма $\oplus L_i$ тоже слабо проективно однородна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1 принцип доказательства был уже описан выше (см. пример 3). Для случая 2 этот принцип тоже применим: пусть $X_i \in L_i$ – такие элементы, что их орбиты относительно групп автоморфизмов $\text{Aut}(L_i)$ открыты в L_i . Тогда и для элемента $(X_1, X_2, \dots, X_l) \in L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_l$ орбита относительно естественного действия группы $\times_i \text{Aut}(L_i)$ (являющейся подгруппой в $\text{Aut}(\oplus L_i)$) открыта в $\oplus L_i$. Тем более, открыта орбита группы $\text{Aut}(\oplus L_i)$.

Отметим, что прямая сумма почти однородных алгебр Ли тоже почти однородна (это вытекает из описания почти однородных алгебр Ли – все они абелевы). А вот прямая сумма проективно однородных алгебр Ли уже не обязательно будет проективно однородна. Например, алгебры Ли $\mathbb{R}$ и so_3 проективно однородны, а вот алгебра Ли $\mathbb{R} \oplus \text{so}_3$ проективно однородной не будет (как это следует из [4]).

Предложение 2 позволяет значительно расширить классы примеров слабо однородных и слабо проективно однородных алгебр Ли. Например, прямая сумма свободных нильпотентных алгебр Ли слабо однородна (это уже было отмечено выше). Далее, прямая сумма $\bigoplus_i R_2$ нескольких экземпляров двумерной разрешимой алгебры Ли R_2 является в силу предложения 2 слабо проективно однородной.

Переходим теперь к более подробному рассмотрению слабо однородных алгебр Ли (в п. 2) и слабо проективно однородных (в п. 3).

2. О слабо однородных алгебрах Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Слабо однородная алгебра Ли L нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим тот же прием, что и в доказательстве предложения 1. Пусть орбита элемента $X \in L$ открыта в L . Другими словами, в силу слабой однородности алгебры Ли L почти все элементы алгебры Ли L сопряжены с X относительно действия группы автоморфизмов $\text{Aut}(L)$. Рассмотрим элемент λX при некотором ненулевом $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажем, что элементы X и λX лежат в одной орбите группы автоморфизмов. Если это не так, то орбита элемента λX – еще одна открытая орбита (ее открытость вытекает из того, что открыта орбита пропорционального ей элемента X). Открытые по Зарисскому орбиты обязательно плотны в L , поэтому не может существовать более одной открытой орбиты. Получаем противоречие.

Итак, для любого $\lambda \neq 0$ элементы X и λX сопряжены относительно группы автоморфизмов. Поэтому спектры соответствующих им линейных операторов присоединенного представления $\text{ad}: L \rightarrow \text{End}(L)$ совпадают. А так как эти спектры подобны (с коэффициентом подобия λ), то эти операторы должны быть нильпотентными.

Мы доказали, что для элементов из открытого подмножества в L операторы присоединенного представления нильпотентны. Если бы это было установлено для всех элементов алгебры Ли L , то ее нильпотентность вытекала бы сразу из теоремы Энгеля. В нашем случае мы можем прийти к тому же заключению как минимум двумя путями. Во-первых, нетрудно доказать небольшое обобщение теоремы Энгеля, в котором нильпотентность алгебры Ли вытекает из нильпотентности операторов присоединенного представления для всех элементов из некоторого открытого в этой

алгебре Ли подмножества (схема рассуждений тут та же, что и при доказательстве теоремы Энгеля, нужны только небольшие модификации). Второй путь – это использование обобщения теоремы Энгеля, полученного Джекобсоном, – нильпотентность алгебры Ли вытекает из нильпотентности операторов присоединенного представления для семейства векторов, порождающих эту алгебру Ли (например, образующих ее базис), – см. [6]. Но ясно, что в любом открытом подмножестве алгебры Ли можно найти векторы, образующие базис алгебры Ли. Итак, мы получаем возможность сделать заключение о нильпотентности нашей слабо однородной алгебры Ли L . Предложение доказано.

Отметим, что при доказательстве предложения 3 было существенно, что алгебра Ли L конечномерна (ибо только в этом случае справедлива теорема Энгеля). Для случая нильпотентных групп Ли подобное предположению 3 утверждение было доказано в [2].

Рассмотрим теперь конструкцию, которая дает очень много примеров нильпотентных алгебр Ли, которые являются слабо однородными.

Пусть I – некоторый характеристический идеал в свободной нильпотентной алгебре Ли $FN_{k,p}$ (класса нильпотентности k и с p образующими). Так как алгебра Ли $FN_{k,p}$ слабо однородна, то и фактор-алгебра $L = FN_{k,p}/I$ в силу леммы 1 тоже будет слабо однородна.

Теперь остается рассмотреть вопрос о конструкции характеристических идеалов в свободной нильпотентной алгебре Ли. Многие из них можно получить как вербальные идеалы (т.е. как подалгебры, порожденные значениями некоторого слова относительно свободных образующих) и их пересечения. Например, таковы члены ряда коммутантов. Тем самым, класс характеристических идеалов весьма широк (континуален, так как существует континуум однородных слов – сумм однородных одночленов). Поэтому получаем, что и семейство слабо однородных алгебр Ли довольно обширно.

Отметим, что приведенная выше конструкция всегда дает конечномерные алгебры Ли, так как мы исходим из свободной нильпотентной алгебры Ли, которая конечномерна, если имеет конечное число образующих. Если же исходить из свободной алгебры Ли (которая в определенном смысле тоже является слабо однородной), то мы будем в виде фактор-алгебр часто получать бесконечномерные алгебры Ли, что находится вне области рассмотрения данной статьи.

Итак, в силу сказанного выше слабо однородных алгебр Ли весьма много, и потому полное их описание, видимо, весьма затруднительно. Поэтому естественно изучать различные специальные классы слабо однородных алгебр Ли. Например, можно рассматривать алгебры Ли L , для которых действие $\text{Aut}(L)$ имеет конечное число орбит. Интерес к этому классу можно обосновать так. Условие наличия одной единственной орбиты – это в точности условие однородности в чисто формальном (“экстремальном”) понимании этого слова. Наличие ровно двух орбит эквивалентно условию почти однородности (так как одной орбитой является всегда нулевой элемент, поэтому второй орбитой должно быть дополнение к нему). Итак, два упоминавшихся варианта определения однородности соответствуют существованию ровно одной или двух орбит для естественного действия группы $\text{Aut}(L)$. В связи с этим естественно возникает вопрос об описании алгебр Ли, для которых действие группы автоморфизмов имеет ровно 3 орбиты, ровно 4 орбиты и, вообще, некоторое конечное число орбит.

Отметим, что рассмотрение трехорбитных конечных групп уже имело место в [7]. При этом даже в абелевом случае (т.е. для коммутативных конечных групп) имеются довольно нетривиальные примеры групп, для которых группа автоморфизмов имеет ровно 3 орбиты [7]. Но для алгебр Ли в абелевом случае ситуация тривиальна – тут группа автоморфизмов имеет ровно две орбиты. Поэтому изучение алгебр Ли с тремя орбитами не выглядит параллельным изучению аналогичного вопроса для абстрактных групп.

Итак, рассмотрим алгебры Ли L , для которых действие группы $\text{Aut}(L)$ имеет ровно три орбиты. Одна из них – это нулевой элемент. Из двух остальных одна орбита обязательно открыта (и потому такая алгебра Ли L обязательно будет слабо однородна), а другая имеет некоторую промежуточную размерность (расположенную строго между 0 и $\dim(L)$). Двух открытых орбит тут быть не может, так как пространство $L \setminus \{0\}$ связно (см. рассуждение выше). Обе орбиты не быть открытыми тоже не могут, так как их объединение тогда не может дать всё $L \setminus \{0\}$. Итак, мы видим, что алгебры Ли, для которых группа автоморфизмов имеет ровно 3 орбиты, являются слабо однородными (то же верно и для случая любого другого конечного числа орбит, что показывается совершенно аналогично).

Пусть L – слабо однородная алгебра Ли с тремя орбитами. Если I – некоторый собственный характеристический идеал в L , то именно он и будет третьей (ненулевой и неоткрытой) орбитой. При этом в нашей алгебре Ли L не может быть более одного характеристического идеала. А так как такая (слабо однородная) алгебра Ли L нильпотентна, то получаем, что она будет обязательно 2-нильпотентной, ибо ее коммутант $[L, L]$ – характеристический идеал и потому все остальные члены центрального ряда должны быть тривиальны (в частности, $[[L, L], L] = \{0\}$, т.е. L 2-нильпотентна).

Пусть G – связная односвязная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна нашей алгебре Ли L . Тогда группа $\text{Aut}(L)$ естественно изоморфна группе $\text{Aut}(G)$ автоморфизмов группы Ли G . При этом если $\text{Aut}(L)$ имеет ровно 3 орбиты, то ровно 3 орбиты имеет и действие $\text{Aut}(G)$ на G . Для случая групп Ли вопрос о трех орбитах был решен в [8]. Там было показано, что все такие группы Ли G являются обобщенными группами Гейзенберга (в частности, все они 2-нильпотентны). Более того, там были в явном виде перечислены все возможные обобщенные группы Гейзенберга, которые имеют ровно 3 орбиты. Это дает нам полное описание всех алгебр Ли, имеющих ровно 3 орбиты – тут есть 3 бесконечных семейства (размерностей $2k + 2$, $4k + 2$, $4k + 3$ при всех $k \geq 1$) и 6 исключительных случаев (размерностей 6, 12, 13, 14, 14, 15).

Далее, можно было бы рассмотреть алгебры Ли, для которых имеется ровно 4 орбиты. Для таких алгебр Ли в них имеется не более чем 2 собственных характеристических идеала.

Продолжим рассмотрение отдельных классов слабо однородных алгебр Ли.

Пусть L – алгебра Ли небольшой размерности. В [9] для неразложимых (в прямые суммы) вещественных нильпотентных алгебр Ли размерностей ≤ 6 указаны в явном виде их группы автоморфизмов. Из их явного вида очень легко определять, имеют ли эти группы автоморфизмов открытые орбиты. Для этого достаточно посмотреть на первый или какой-либо другой столбец матриц, из которых составлены группы автоморфизмов в [9]. Если там стоят попарно различные и произвольные константы, то алгебра Ли слабо однородна. Если же в каждом столбце имеется нулевой элемент

или же некоторое соотношение между элементами, то алгебра Ли слабо однородной не будет (так как тут не будет открытых орбит).

Из изучения таблиц, приведенных в [9], можно сделать такие выводы:

- 1) все нильпотентные алгебры Ли размерностей ≤ 5 слабо однородны;
- 2) среди нильпотентных алгебр Ли размерности 6 имеется примерно поровну слабо однородных и не являющихся таковыми.

Следующий интересный класс нильпотентных алгебр Ли – это нильрадикалы в параболических подалгебрах полупростых алгебр Ли (комплексных или вещественных). Для случая комплексных простых алгебр Ли группы автоморфизмов нильрадикалов параболических подгрупп были описаны в [10] (для вещественных полупростых это можно сделать аналогично). На самом деле в [10] описывались не группы автоморфизмов, а алгебры Ли их дифференцирований. Но очевидно, что понятие слабо однородной алгебры Ли L можно сформулировать и в терминах алгебр Ли дифференцирований $\text{Der}(L)$. А именно, как нетрудно понять, алгебра Ли L почти однородна (т.е. $\text{Aut}(L)$ имеет на L открытую орбиту) тогда и только тогда, когда $\text{Der}(L)(L) = L$, т.е. когда образ алгебры Ли при действии на нее ее алгебры дифференцирований совпадает с самой L .

В [10] показано, что в большинстве случаев (исключения там явно указаны) алгебра дифференцирований $\text{Der}(N)$ нильрадикала N некоторой параболической подалгебры в простой комплексной алгебре Ли L совпадает с ее нормализатором $\text{Norm}_L(N)$ в L (в исключительных случаях есть еще дополнительные дифференцирования). При этом легко проверить, что этот нормализатор “транзитивен” на N , т.е. $\text{Der}(N)(N) = N$. Поэтому все нильрадикалы в параболических подалгебрах комплексных простых алгебр Ли слабо однородны. То же верно и в вещественном случае, но это требует более тщательного рассмотрения.

Можно рассматривать не только сами нильрадикалы параболических подалгебр полупростых алгебр Ли, но и идеалы в этих нильрадикалах. Однако тут могут появляться и алгебры Ли, которые не являются слабо однородными. Но все же этот класс нильпотентных алгебр тоже заслуживает более подробного изучения.

Вообще, можно изучать слабо однородные алгебры Ли, принадлежащие к тому или другому уже изученному классу нильпотентных алгебр Ли. Например, можно рассматривать с точки зрения слабой однородности филиформные алгебры Ли (т.е. алгебры Ли, имеющие максимально возможную степень нильпотентности – они довольно подробно изучены в последние десятилетия) и всевозможные их обобщения (которые в последние годы появилось немало – квази-филиформные и др.).

Рассмотрим теперь, что происходит со слабо однородными алгебрами Ли при их сжатии. Напомним, что алгебра Ли L' называется *сжатием* алгебры Ли L , если $L' \in \overline{O_L}$, т.е. если L' принадлежит замыканию $\overline{O_L}$ орбиты алгебры Ли под действием линейной группы GL_n в пространстве Lie_n n -мерных алгебр Ли (подробнее см. [11]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть L – слабо однородная алгебра Ли, а алгебра Ли L' получается из нее сжатием. Тогда L' тоже слабо однородна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\text{Der}(L)(L) = L$, т.е. $\text{Der}(L)$ имеет максимальный возможный образ. При переходе к пределу это свойство сохраняется: алгебра Ли $\text{Der}(L)$, как полученная решением системы линейных уравнений, при сжатии свою размерность не уменьшает и размерность образа общего элемента – тоже. Предложение доказано.

Отметим, что деформации слабо однородной алгебры Ли не обязательно дают тоже слабо однородные алгебры Ли. Например, как известно, любая алгебра Ли есть деформация абелевой (которая, конечно, слабо однородна), но далеко не каждая алгебра Ли является слабо однородной.

3. О слабо проективно однородных алгебрах Ли. Напомним, что алгебра Ли L называется *слабо проективно однородной*, если естественное действие группы ее автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ на проективизации $P(L)$ этой алгебры Ли имеет открытую орбиту. Это условие означает, что группа $\text{Aut}(L)$ действует почти транзитивно на пространстве прямых в L . Отметим, что любая слабо однородная алгебра Ли будет, очевидно, и слабо проективно однородной. Поэтому, как видно из примеров, приведенных выше, существует очень много нильпотентных слабо проективно однородных алгебр Ли. Однако слабо проективно однородные алгебры Ли далеко не всегда будут нильпотентны, более того, они не всегда разрешимы. Поэтому нужно исследовать возможный вид разложения Леви для таких алгебр Ли, в частности, их полупростую часть.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть L – это некоторая слабо проективно однородная простая алгебра Ли над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда если L – вещественная алгебра Ли, то она изоморфна $\mathfrak{so}_3$ (и тогда она даже проективно однородна) или $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Если же L – комплексная алгебра Ли, то она изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простой алгебры Ли ее группа автоморфизмов почти совпадает с группой $\text{Int}(G)$ внутренних автоморфизмов соответствующей односвязной простой группы Ли G (слово “почти” здесь означает, что группа внутренних автоморфизмов может рассматриваться как подгруппа конечного индекса в $\text{Aut}(L)$). Отсюда очевидно, что простая алгебра Ли L слабо проективно однородна тогда и только тогда, когда группа $\text{Int}(G)$ имеет на $P(L)$ орбиту размерности $n - 1$ (где $n = \dim(L)$ и потому $\dim P(L) = n - 1$). Наличие же орбиты такой размерности у группы внутренних автоморфизмов эквивалентно существованию такого элемента $X \in L$, что его нормализатор $N_L(X)$ в L одномерен. Именно из этого условия мы и будем исходить в дальнейшем. При этом мы будем использовать технику алгебраических групп и алгебр Ли, которая подробно изложена, например, в [12].

Вначале рассмотрим случай, когда L – вещественная алгебра Ли.

Положим $F = N_L(X)$, тогда F – одномерная (и потому абелева) алгебраическая алгебра Ли (алгебраическим тут будет любой нормализатор, если вспомнить, что любая простая алгебра Ли может рассматриваться как алгебраическая алгебра Ли). Элемент X порождает подалгебру Ли F в силу ее одномерности. Применим к F некоторые хорошо известные структурные результаты об абелевых алгебраических алгебрах Ли.

Алгебра Ли F имеет разложение Шевалле $F = F_{\Gamma} + F_{\mathfrak{n}}$ – это прямая сумма редуktивной части F_{Γ} и нильпотентной части $F_{\mathfrak{n}}$ (т.е. двух подалгебр в F). Так как подалгебра Ли F одномерна, то одна из указанных двух подалгебр Ли тривиальна, а другая совпадает с F . Поэтому имеем $F = F_{\Gamma}$ или же $F = F_{\mathfrak{n}}$. Далее, редуktивная абелева алгебра Ли F_{Γ} (состоящая из полупростых элементов) разлагается над полем $\mathbb{R}$ в прямую сумму $F_{\Gamma} = F_{\mathfrak{c}} + F_{\mathfrak{a}}$ компактной и расщепимой над $\mathbb{R}$ подалгебр (такого рода разложения более привычны на уровне соответствующих алгебраических групп Ли, но нам удобнее использовать тут язык алгебр Ли). Опять в силу

одномерности подалгебры F_r получаем, что $F_r = F_c$ (т.е. F – компактная подалгебра) или же $F_r = F_a$ (т.е. F – расщепимая одномерная абелева подалгебра).

Итак, мы получили, что подалгебра Ли F равна F_n , F или F_a . Мы будем рассматривать эти случаи по отдельности. Но вначале отметим, что если алгебра Ли L слабо проективно однородна, то нормализатор в L одномерен не только для X , но и для общего элемента этой алгебры Ли (т.е. для всех элементов из некоторого открытого подмножества в L). Но тогда получаем, что L – простая алгебра Ли ранга 1, при этом можно считать, что подалгебра $\langle X \rangle$, натянутая на X (и совпадающая с $F = N_L(X)$), картановская.

1. Пусть подалгебра $\langle X \rangle$ компактна в L . Так как она картановская, то из классификации простых вещественных алгебр Ли вытекает, что алгебра Ли L изоморфна $\mathfrak{so}_3$ или $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (других простых вещественных алгебр Ли, имеющих одномерную компактную подалгебру Картана, не существует).

2. Если подалгебра $\langle X \rangle$ расщепима, то из той же классификации получаем, что L изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (других вещественных простых алгебр Ли с одномерной расщепимой подалгеброй Картана не существует).

3. Если подалгебра Ли $\langle X \rangle$ нильпотентна (т.е. элемент X нильпотентен), то ее нормализатор не может совпадать с ней (в силу теоремы Энгеля). Поэтому в нашей ситуации этот случай невозможен.

Разобрав все возможные случаи, мы и приходим к утверждению нашего предложения: L изоморфна $\mathfrak{so}_3$ или $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Для случая комплексных алгебр Ли применимы подобные же рассуждения, причем они даже упрощаются. Тут компактных алгебр нет (т.е. случай $\mathfrak{so}_3$ исключается) и получаем, что L изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $L = S + R$ – разложение Леви некоторой слабо проективно однородной алгебры Ли L . Тогда если алгебра Ли L задана над полем $\mathbb{R}$, то

$$S = \mathfrak{so}_3 \oplus \mathfrak{so}_3 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{so}_3 \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}),$$

а если она задана над $\mathbb{C}$, то

$$S = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

(число прямых слагаемых может быть и нулевым).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как L слабо проективно однородна, а R (радикал) есть ее характеристический идеал, то слабо однородной будет и $L/R = S$ (см. следствие 1). Рассмотрим разложение полупростой части S в прямую сумму простых идеалов $S = \bigoplus_i S_i$. Пусть $p_i: S \rightarrow S_i$ – естественные проекции. Тогда если элемент

$$X = X_1 + X_2 + \cdots, \quad X_i \in S_i,$$

имеет открытую орбиту при действии группы автоморфизмов алгебры Ли S на $P(S)$, то все X_i имеют открытые орбиты в $P(S_i)$ при действии на них соответствующих групп автоморфизмов $\text{Aut}(S_i)$ (так как $\text{Aut}(S)$ содержит $\times_i \text{Aut}(S_i)$ в качестве подгруппы конечного индекса). Поэтому все простые прямые слагаемые S_i должны быть слабо проективно однородными. Но теперь утверждение следствия 2 вытекает из предложения 5.

Некоторые примеры слабо проективно однородных алгебр Ли были приведены выше. Рассмотрим некоторые новые примеры.

ПРИМЕР 9. Если N – любая нильпотентная слабо однородная алгебра Ли (примеры таковых см. выше), то ее прямая сумма с несколькими экземплярами алгебр Ли $\mathfrak{so}_3$ и $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ будет слабо проективно однородна. Тут получаем алгебры Ли, для которых разложение Леви прямое.

ПРИМЕР 10. Существуют и слабо проективно однородные алгебры Ли с нетривиальным (т.е. не прямым) разложением Леви. Например, рассмотрим полупрямую сумму $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) +_{\phi} \mathbb{R}^n$, соответствующую некоторому линейному представлению ϕ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Предположим дополнительно, что представление ϕ неприводимо, а также что оно не имеет нулевых весов (последнее возможно, только если $n = 2k$ четно). Тогда нетрудно проверить, что алгебра Ли L слабо проективно однородна.

Изучение слабо проективно однородных алгебр Ли можно связать с изучением некоторых специальных разложений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ (мы ограничимся при этом рассмотрением вещественных алгебр Ли и их разложений, комплексный же случай рассматривается аналогично и даже проще).

Напомним, что разложение алгебры Ли L – это представление ее в виде суммы (не обязательно прямой) двух подалгебр $L = U + V$. Разложения полупростых алгебр Ли довольно подробно изучены, особенно в некоторых специальных случаях (например, когда одна из подалгебр полупроста или параболична и др.). Разложения алгебр Ли тесно связаны с локальными разложениями соответствующих групп Ли. В частности, если тройка G, F, H – это группа Ли с алгеброй Ли L и две ее подгруппы Ли F, H , соответствующие подалгебрам U, V , то если, например, подгруппа H замкнута в G , то равенство $L = U + V$ имеем тогда и только тогда, когда естественное действие подгруппы F на однородном пространстве G/H имеет открытую орбиту (подробнее см. [13]).

Пусть L – некоторая слабо проективно однородная алгебра Ли. Тогда ее группа автоморфизмов имеет на $P(L)$ открытую орбиту. При этом $\text{Aut}(L)$ порождает подгруппу $\text{PAut}(L)$ (группу проективных автоморфизмов) в $\text{PSL}_n(\mathbb{R})$ (полной группе проективных преобразований проективного пространства $P(L)$). Соответствующую ей подалгебру Ли в $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ (алгебре Ли группы Ли $\text{PSL}_n(\mathbb{R})$) обозначим через U . Далее, пусть H – это стационарная подгруппа некоторой точки в $P(L)$ (т.е. группа проективных преобразований, сохраняющих эту точку), соответствующую ей подалгебру Ли обозначим через V . Явное описание подалгебры V и соответствующей подгруппы хорошо известно из геометрии. Подгруппа H – параболическая подгруппа в $\text{PSL}_n(\mathbb{R})$.

Условие слабой проективной однородности алгебры Ли L в точности эквивалентно тому, что подалгебры U и V дают разложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. Причем тут имеется не просто разложение, а разложение весьма специального вида, когда одна из подалгебр параболична. К сожалению, даже такие специальные разложения описаны только в некоторых частных случаях – в [13] это сделано, например, для случаев, когда U полупроста или сама параболична. Но предполагать, что подалгебра U полупроста или параболична, мы при изучении произвольных слабо проективно однородных алгебр Ли не можем. Поэтому прямого применения результаты из [13] в нашей ситуации не имеют. Можно применить обходной маневр – рассмотреть некоторую максимальную подалгебру, содержащую U . Такая подалгебра, как

известно, всегда полупроста или же параболична. Если она полупроста, то обязательно изоморфна комплексной или симплектической линейной алгебрам Ли, т.е. рассмотрение разложения алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ сводится к разложению комплексной линейной или симплектической алгебр Ли. На уровне групп Ли для слабо проективно однородной L мы имеем почти транзитивное действие группы $P\text{Aut}(L)$ на проективном пространстве $P(L) = \mathbb{R}P^{n-1}$. Но таких действий очень много (о чем, в частности, говорит большое число слабо однородных алгебр Ли – см. выше).

Изучим в связи со слабо проективно однородными алгебрами Ли еще один вид однородности алгебр Ли – внутреннюю слабую проективную однородность. Алгебру Ли L назовем *внутренне слабо проективно однородной* (сокращенно ВСПО), если группа внутренних автоморфизмов этой алгебры Ли (точнее, группа внутренних автоморфизмов $\text{Int}(G)$ соответствующей этой алгебре Ли односвязной группы Ли G) имеет на $P(L)$ открытую орбиту. Ясно, что свойство ВСПО для L эквивалентно тому, что для некоторого элемента $X \in L$ размерность централизатора $Z_L(X)$ элемента X в L равна 1 (или, что эквивалентно, размерность образа $\dim \text{Im}(\text{ad}_X) = n - 1$, где $n = \dim L$). Ясно, что из условия ВСПО вытекает условие слабой проективной однородности. Но свойство ВСПО проще проверять при построении примеров. Проиллюстрируем это.

Рассмотрим алгебры Ли вида $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) + N$ – полупрямые суммы простой слабо проективно однородной алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ и некоторой нильпотентной алгебры Ли N . Предположим, что $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ – такой полупростой расщепимый над $\mathbb{R}$ элемент, что все корни его действия на N (автоматически вещественные) будут ненулевыми. Тогда $\dim \text{Im}(\text{ad}_X) = n - 1$ и соответствующая алгебра Ли L будет слабо проективно однородна. Остается только выяснить, как строить такие N и ϕ . Вот некоторые возможные пути для этого.

Рассмотрим свободную 2-нильпотентную алгебру Ли $FN_2 = U + \Lambda^2 U$, порожденную векторным пространством U (операция коммутирования определяется стандартно: $X, Y \rightarrow X \wedge Y$). Пусть $\phi_0: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(U)$ – неприводимое представление, которое не имеет инвариантов (это возможно, если $\dim U = 2k$ – четно). Корни действия подходящего базисного элемента X расщепимой подалгебры Картана в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ в этом случае будут равны $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$. Представление ϕ_0 естественным образом продолжается до представления ϕ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Der } FN_2$. Теперь в $\Lambda^2 U$ выберем подходящий для наших целей идеал.

Пусть $X_{\pm 1}, X_{\pm 2}, \dots, X_{\pm k}$ – некоторый базис в U . Тогда базисом в $\Lambda^2 U$ будут элементы $X_i \wedge X_j$ при $i < j$. Так вот, выберем в $\Lambda^2 U$ такой идеал I , который не содержит элементы $X_i \wedge X_j$ при $i + j = 0$. Ясно, что такие идеалы существуют и их достаточно много. Вот, например, один из них: $I = \{X_i \wedge X_j \mid i, j < 0\}$. Положим $N = FN_2/I$. Как нетрудно понять, полученная алгебра Ли N в силу приведенных выше соображений даст нам слабо проективно однородную алгебру Ли $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) +_\phi N$, причем для нее разложение Леви нетривиально, а радикал, в отличие от приведенного выше примера, неабелев. Тем самым показано, что существует немало новых (по сравнению со слабо однородными алгебрами Ли) примеров слабо проективно однородных алгебр Ли. Далее, можно расширить семейство примеров, беря прямые суммы уже построенных алгебр Ли. Можно и обобщить приведенную выше конструкцию, беря в качестве полупростой части не алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, а прямую сумму двух или более экземпляров этой простой алгебры Ли. Как и для случая слабо однородных алгебр Ли, можно также рассматривать слабо проективно однородные алгебры Ли, для ко-

торых группа автоморфизмов имеет на $P(L)$ конечное число орбит и описывать эти алгебры Ли для малого числа орбит. Если число орбит конечно, то из них ровно одна открытая. Две орбиты – для $\mathfrak{so}_3$, $\mathfrak{sl}_2$. Других алгебр Ли L ровно с 2 орбитами на $P(L)$ нет.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Кострикин, “Об однородных алгебрах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:2 (1965), 471–484.
- [2] M. Stroppel, “Homogeneous locally compact groups”, *J. Algebra*, **199**:2 (1998), 528–543.
- [3] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли*, Элементы математики, Мир, М., 1976.
- [4] S. Świerczkowski, “Homogeneous Lie algebras”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **4** (1971), 349–353.
- [5] D. Ž. Djoković, “Real homogeneous algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41**:2 (1973), 457–462.
- [6] Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*, Мир, М., 1964.
- [7] H. Mäurer, M. Stroppel, “Groups that are almost homogeneous”, *Geom. Dedicata*, **68**:2 (1997), 229–243.
- [8] M. Stroppel, “Homogeneous symplectic maps and almost homogeneous Heisenberg groups”, *Forum Math.*, **11**:6 (1999), 659–672.
- [9] M.-P. Gong, *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7*, Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1998.
- [10] Ю. Б. Хахимджанов, “О дифференцированиях некоторых нильпотентных алгебр Ли”, *Изв. вузов. Матем.*, 1976, № 1, 100–110.
- [11] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Строение групп и алгебр Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **41**, ВИНТИ, М., 1990, 5–253.
- [12] А. Бореель, *Линейные алгебраические группы*, Мир, М., 1972.
- [13] А. Л. Онищик, “Разложения редуктивных групп Ли”, *Матем. сб.*, **80**:4 (1969), 553–599.

В. В. Горбацевич

Российский государственный технологический университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ)
E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступило

23.10.2008

Исправленный вариант

12.02.2010