Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, Оценка снизу L_1 -нормы ряда Фурье степенного типа, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 951–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:25:07

ОЦЕНКА СНИЗУ L_1 -НОРМЫ РЯДА ФУРЬЕ СТЕПЕННОГО ТИПА

Р. М. Тригуб

В 1981 г. Конягин [1] и независимо Мак-Гее, Пиньо и Смит [2] доказали гипотезу Литтлвуда: существует абсолютная положительная константа C такая, что для любого набора натуральных чисел $\{m_k\}_1^n$ выполнена оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^n e^{im_k x} \right| dx \geq C \log n.$$

В статье [2] доказано неравенство (при $1 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{im_k x} \right| dx \geq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k}.$$

См. также, например, [3, гл. 4].

Используя редакцию Виноградова (устное сообщение 1983 г.) доказательства этого неравенства, автором получен следующий более точный результат (анонсирован в [4]).

ТЕОРЕМА 1. *Существует абсолютная положительная константа C такая, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{m_k\}_1^{\infty}$ и для любой последовательности коэффициентов $\{c_k\}_1^{\infty}$ выполнено неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{im_k x} \right| dx \geq C \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{2^{s-1} \leq k < 2^s} \frac{|c_k|^2}{k} \right)^{1/2}.$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что это неравенство более общее:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{2^{s-1} \leq k < 2^s} \frac{|c_k|}{k} \right) \leq \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{2^{s-1} \leq k < 2^s} \frac{|c_k|^2}{k} \right)^{1/2} \left(\sum_{2^{s-1} \leq k < 2^s} \frac{1}{k} \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{2^{s-1} \leq k < 2^s} \frac{|c_k|^2}{k} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Как показывает следующий простой пример, эта теорема усиливает классическое неравенство Харди ($m_k = k$). При $c_k = 2^k$, $1 \leq k \leq n$, и $c_k = 0$, $k > n$, имеем две разные оценки снизу: $c2^n/n$ и $c2^n/\sqrt{n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $T = [-\pi, \pi]$, а $\|f\|_p$ – норма функции f в $L_p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$. Построим функцию $f \in L_{\infty}(T)$ с коэффициентами Фурье c_{m_k} , обладающими нужными свойствами. Для любой последовательности $a = \{a_k\}_1^{\infty}$ с конечной нормой

$$\|a\| = \sup_k \left(2^k \sum_{2^{k-1} \leq s < 2^k} |a_s|^2 \right)^{1/2}$$

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Украины, проект 01.07/00241.

и любого $\varepsilon > 0$ положим

$$f_k(x) = \sum_{2^{k-1} \leq s < 2^k} a_s e^{i m_s x}, \quad h_k = |f_k| - i \widetilde{|f_k|},$$

$$f = f_{a, \varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp\left(-\varepsilon \sum_{j \geq k} h_j\right).$$

Очевидно, что $|f_k| \in \text{Lip } 1$, но тогда тригонометрически сопряженная к ней функция $\widetilde{|f_k|} \in \text{Lip}(1-\delta)$ при любом $\delta > 0$. Ясно, что

$$\sum_j \|h_j\|_2 \leq 2 \sum_j \|f_j\|_2 = 2\sqrt{2\pi} \sum_j \left(\sum_{2^{j-1} \leq s < 2^j} |a_s|^2 \right)^{1/2} \leq 2\sqrt{2\pi} \|a\| \sum_j 2^{-j/2} < \infty.$$

Проверим, что $f \in L_{\infty}(T)$. Полагая $x_k = -\sum_{j \geq k} |f_j|$, получаем

$$|f| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \exp\left(-\varepsilon \sum_{j \geq k} |f_j|\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\varepsilon x_k} (x_{k+1} - x_k) \leq \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon x} dx = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ниже будет показано, что $\|b - a\| \leq C\varepsilon \|a\|^2$, где $b = \{b_k\}_1^{\infty}$, $b_k = c_{m_k}(f)$. Спектром функции f называют множество целых чисел k , для которых коэффициенты Фурье $c_k(f) \neq 0$. Следующие свойства спектров очевидны:

$$\text{spec}(f + g) \subset \text{spec } f \cup \text{spec } g; \quad \text{spec } f_n \subset E, \quad f_n \xrightarrow{L_1(T)} f \implies \text{spec } f \subset E;$$

если $f, g \in L_2(T)$, то $\text{spec}(fg) \subset \text{spec } f + \text{spec } g$; если $f \in L_{\infty}(T)$, $\text{spec } f \subset E$, $E + E \subset E$, а g — целая функция, то спектр суперпозиции $g(f)$ содержится в E . Так как для $\text{Re } z_1 \leq 0$ и $\text{Re } z_2 \leq 0$ выполнено неравенство $|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|$, то

$$\|e^{-\varepsilon \sum_s^{\infty} h_j} - e^{-\varepsilon \sum_s^N h_j}\|_1 \leq \varepsilon \left\| \sum_{j=N+1}^{\infty} h_j \right\|_1 \leq \varepsilon \sum_{j=N+1}^{\infty} \|h_j\|_1 \leq \sqrt{2\pi} \varepsilon \sum_{j=N+1}^{\infty} \|h_j\|_2 \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Но для любого j $\text{spec } h_j \subset (-\infty, 0]$. Поэтому $\text{spec } \exp(-\varepsilon \sum h_j) \subset (-\infty, 0]$ и $\text{spec } f_k \exp(-\varepsilon \sum h_j) \subset (-\infty, m_{2^k}]$. Следовательно, если $p \in [2^{s-1}, 2^s]$, то

$$b_p = c_{m_p}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{m_p}(f_k e^{-\varepsilon \sum h_j}) = \sum_{k=s}^{\infty} c_{m_p}(f_k e^{-\varepsilon \sum h_j}).$$

Принимая во внимание определение f_k и неравенство $|c_k(g)| \leq \|g\|_1 / (2\pi)$, получаем

$$|b_p - a_p| = \left| \sum_{k=s}^{\infty} c_{m_p}(f_k e^{-\varepsilon \sum h_j} - f_k) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=s}^{\infty} \|f_k (e^{-\varepsilon \sum h_j} - 1)\|_1.$$

Используя еще раз свойство экспоненты в левой полуплоскости и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |b_p - a_p| &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=s}^{\infty} \left\| f_k \varepsilon \sum_{j \geq k} h_j \right\|_1 \leq 2 \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{k \geq s} \|f_k\|_2 \sum_{j \geq k} \|f_j\|_2 \\ &= 2\varepsilon \sum_{k \geq s} \left(\sum_{2^{k-1} \leq s < 2^k} |a_s|^2 \right)^{1/2} \sum_{j \geq k} \left(\sum_{2^{j-1} \leq s < 2^j} |a_s|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2\varepsilon \|a\|^2 \sum_{k \geq s} 2^{-k/2} \sum_{j \geq k} 2^{-j/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для $p \in [2^{s-1}, 2^s)$ выполнено неравенство

$$|b_p - a_p| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \varepsilon \|a\|^2 \frac{1}{2^s}$$

и, значит,

$$\|b - a\| = \sup_s \left(2^s \sum_{2^{s-1} \leq p < 2^s} |b_p - a_p|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \varepsilon \|a\|^2 < 14\varepsilon \|a\|^2.$$

Как показано выше, $\|f\|_\infty \leq 1/\varepsilon$. Поэтому

$$2\pi\varepsilon \left| \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k} c_k \right| = \left| \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{im_k x} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{im_k x} \right| dx.$$

Если теперь $c = \{c_k\}_1^\infty$ и $\|c\|' = \sup_{a: \|a\| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k \right| < \infty$, то выбирая a специальным образом при $\|a\| = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{im_k x} \right| dx &\geq 2\pi\varepsilon \left| \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} c_k \right| - 2\pi\varepsilon \sum |b_k - a_k| |c_k| \\ &\geq 2\pi\varepsilon \|c\|' - 2\pi\varepsilon \|c\|' \|b - a\| \geq \|c\|' 2\pi\varepsilon (1 - 14\varepsilon). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \|c\|' &= \sup_{\|a\| \leq 1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} |a_k| |c_k| \\ &= \sum_s 2^{-s/2} \left(\sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} |c_k|^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \frac{|c_k|^2}{k} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Положив $\varepsilon = 1/28$, получаем нужное неравенство (с константой $C = 1/13$). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конягин С.В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №2. С. 243–265. 2. McGehee O.C., Pigno L., Smith B. // Annals of Math. 1981. V. 113. №3. P. 613–618. 3. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 4. Тригуб Р.М. // Междунар. симпозиум по рядам Фурье и их приложениям, 26.05–1.06 1999 г. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, 1999. С. 345–346.

Донецкий национальный университет
E-mail: postmaster@ok.donbass.com

Поступило
30.10.2001