Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кручинин, Число разбиений натурального числа n на части, каждая из которых не менее m , *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 538–542

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:18:55

Число разбиений натурального числа n на части, каждая из которых не менее m

В. В. Кручинин

Приводятся рекуррентные формулы для числа разбиений натурального числа n , части которых должны быть не менее m . Дается простой вывод формулы Эйлера для числа разбиений. Построен треугольник разбиений, сформулированы гипотезы относительно свойств треугольника, предложен алгоритм вычисления разбиений. Показана оригинальная графическая интерпретация для функции разбиений.

Библиография: 4 названия.

1. Вывод рекуррентной формулы. Разбиения являются достаточно хорошо изученными комбинаторными объектами [1]–[3]. Однако можно предложить еще несколько рекуррентных формул вычисления разбиений и достаточно простой способ вывода формулы Эйлера для вычисления числа разбиений. Для этого введем ограничение: части разбиения должны быть не менее некоторого числа m . Тогда, число разбиений числа n на части с таким ограничением обозначим как $p_m(n)$. При $m = 1$ получим множество всех разбиений числа n . Очевидно, что с ростом m число $p_m(n)$ уменьшается. При $m = n$ получим $p_m(n) = 1$. Заметим, что при $m = n/2$ (деление нацело) $p_m(n) = 2$ и для четных, и для нечетных n . Наконец, при $m > n$ $p_m(n) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Число разбиений $p_m(n)$ натурального числа n на части, каждая из которых не менее m , равно

$$p_m(n - m) + p_{m+1}(n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два множества P_1 и P_2 : P_1 – множество разбиений числа n , содержащих часть, равную m ; P_2 – множество разбиений числа n , содержащих части большие, чем m . Тогда

- 1) $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ по определению;
- 2) множество P_1 получается из множества всех разбиений числа $n - m$ путем добавления новой части m к каждому разбиению числа $n - m$ и содержит все разбиения числа n , в которых имеется часть m .

Таким образом, множество всех разбиений числа n на части не менее m , состоит $P_1 \cup P_2$. Отсюда

$$p_m(n) = p_m(n - m) + p_{m+1}(n). \quad (1.1)$$

2. Вывод формулы Эйлера. Теперь, используя полученное выражение (1.1), выведем формулу Эйлера. Итак,

$$p_2(n) = p_1(n) - p_1(n-1), \quad p_3(n) = p_2(n) - p_2(n-2).$$

Подставим вместо $p_2(n)$ в предыдущее выражение $p_1(n) - p_1(n-1)$, получим

$$p_3(n) = p_1(n) - p_1(n-1) - p_1(n-2) + p_1(n-3).$$

Затем, в выражении $p_4(n) = p_3(n) - p_3(n-3)$ заменим $p_3(n)$, получим

$$p_4(n) = p_1(n) - p_1(n-1) - p_1(n-2) + p_1(n-3) - p_1(n-3) + p_1(n-4) + p_1(n-5) - p_1(n-6).$$

Сокращая подобные члены, получим

$$p_4(n) = p_1(n) - p_1(n-1) - p_1(n-2) + p_1(n-4) + p_1(n-5) - p_1(n-6).$$

Далее, применяя данную технику для $p_5(n)$, $p_6(n)$, $\dots$, увидим, что первые члены выражения стабилизируются. При $m > n$ $p_m(n) = 0$; таким образом, левая часть равна нулю. Отсюда

$$p_1(n) = p_1(n-1) + p_1(n-2) - p_1(n-5) - p_1(n-7) + \dots.$$

3. Треугольник разбиений и его свойства. Выражение (1.1) можно записать в виде суммы. Последовательно применяя это выражение для $p_{m+1}(n)$, получим

$$p_{m+1}(n) = p_{m+1}(n-m-1) + p_{m+2}(n).$$

Тогда с учетом того, что $p_{n/2}(n) = 2$, запишем

$$p_m(n) = \sum_{k=m}^{n/2} p_k(n-k) + 1.$$

Произведя замену m на 1, получим

$$p_1(n) = \sum_{k=1}^{n/2} p_k(n-k) + 1.$$

Или

$$p_1(n) = p_1(n-1) + p_2(n-2) + \dots + p_{n/2}\left(\frac{n}{2}\right) + 1.$$

Последовательно применяя это выражение, избавляемся от $p_1(n-1)$ в правой части. Получим

$$p_1(n) = n + \sum_2 + \sum_3 + \dots,$$

где $\sum_k$ – сумма разбиений $p_k(n-i)$ по всем i . Используя компьютерное моделирование, мы построили таблицу для распределения разбиений по классам (см. табл. 1).

Таблица 1. Представление разбиения в виде ряда

$p_1(n)$	$\sum_1$	$\sum_2$	$\sum_3$	$\sum_4$	$\sum_5$	$\sum_6$	$\sum_7$	$\sum_8$	$\sum_9$	$\sum_{10}$	$\sum_{11}$	$\sum_{12}$	$\sum_{13}$	$\sum_{14}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	7	6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	8	9	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	9	12	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	10	16	11	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56	11	20	16	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
77	12	25	23	12	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
101	13	30	31	18	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0
135	14	36	41	27	12	4	1	0	0	0	0	0	0	0
176	15	42	53	38	19	7	2	0	0	0	0	0	0	0
231	16	49	67	53	29	12	4	1	0	0	0	0	0	0
297	17	56	83	71	42	19	7	2	0	0	0	0	0	0
385	18	64	102	94	60	30	12	4	1	0	0	0	0	0
490	19	72	123	121	83	44	19	7	2	0	0	0	0	0
627	20	81	147	155	113	64	30	12	4	1	0	0	0	0
792	21	90	174	194	150	90	45	19	7	2	0	0	0	0
1002	22	100	204	241	197	125	66	30	12	4	1	0	0	0
1255	23	110	237	295	254	169	94	45	19	7	2	0	0	0
1575	24	121	274	359	324	227	132	67	30	12	4	1	0	0
1958	25	132	314	431	408	298	181	96	45	19	7	2	0	0
2436	26	144	358	515	509	388	246	136	67	30	12	4	1	0
3010	27	156	406	609	628	498	328	188	97	45	19	7	2	0
3718	28	169	458	717	769	634	433	258	138	67	30	12	4	1
4565	29	182	514	837	933	797	564	347	192	97	45	19	7	2
5604	30	196	575	973	1125	996	728	463	265	139	67	30	12	4

В первом столбце записано значение функции разбиения. Во втором столбце значение $\sum_1 = n$. В третьем столбце $\sum_2$ и т.д. Сумма элементов строки, начиная со второго столбца, дает значение функции разбиения, записанное в первом.

Интересные результаты получаются при использовании сайта “Энциклопедия целых последовательностей” [4]. Например, $\sum_2$ дает последовательность A002620, для которой $a_n = [n^2/4]$. Класс $\sum_3$ дает последовательность A000601, класс $\sum_4$ – A002621 и т.д. Используя приведенную табл. 1, можно выдвинуть первую гипотезу: ненулевые последовательности, записанные в столбцах, описываются следующим классом производящих функций:

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{(1-s) \prod_{i=1}^k (1-s^i)},$$

где k – номер столбца $\sum_k$.

Вторая гипотеза заключается в том, что число разбиений можно представить членами последовательностей $\sigma_k(s)$. Анализ приведенной таблицы показывает, что

$$p_1(n) = a_1(n) + a_2(n-3) + a_3(n-5) + a_4(n-7) + \dots + a_k(n-2k+1) + \dots + 1,$$

где $a_i(j)$ – j -й член последовательности $\sigma_i(s)$. Число членов последовательности для четных и нечетных n одинаково и равно $\lceil n/2 \rceil$. Это условие не выполняется только для $n = 1$. Используя приведенные гипотезы, можно построить алгоритм вычисления функции разбиений. Этот алгоритм базируется на свойстве класса производящих функций

$$\sigma_k(s) = \sigma_{k-1}(s) \cdot \frac{1}{1 - s^k}.$$

Это означает, что при умножении ряда

$$\sigma_{k-1}(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

на ряд

$$1 + s^k + s^{2k} + s^{3k} + \dots$$

можно задать алгоритм пересчета членов ряда $\sigma_k(s)$, используя члены ряда $\sigma_{k-1}(s)$. Получим следующее рекуррентное выражение:

$$a_k(n) = \sum_{l=0}^{n/k} a_{k-1}(n - k \cdot l).$$

Отсюда алгоритм вычисления числа разбиений будет следующий:

```

algorithm  $p(n)$ 
begin
   $s := n$   {для первого столбца}
   $n := n - 3$   {первое смещение на 3}
  for ( $k := 2; n < 1; k := k + 1$ )
    begin
       $s := s + a(n, k)$   {вычисление  $k$ -го члена}
       $n := n - 2$   {смещение на ряд следующего столбца}
    end
  end
end
    
```

С учетом того, что для некоторых последовательностей $\sigma_k(s)$ имеются закрытые выражения ($a_1(n) = n$, $a_2(n) = n^2/4$), то можно задать эффективный алгоритм вычисления разбиений.

Наконец, можно заметить, что начальные ненулевые числа в последовательностях $\sum_k$ стабилизируются и имеют значения 1, 2, 7, 12, 19, 30, 45, ... – это последовательность A000070 и $s_n = \sum_{k=1}^n p_1(k)$ [4]. Из анализа табл. 1 следует гипотеза, что

$$s_n = a_n(n).$$

Все приведенные выше гипотезы были проверены численным моделированием для вычисления разбиений от 1 до 500.

4. Графическая интерпретация функции разбиений. Представим приведенную таблицу в графическом виде (см. рис. 1). По оси абсцисс записаны номера классов 1–14, по оси ординат – значения их для разбиений. Проведя интерполяцию, получим набор кривых $K(n, s)$, где n – число для разбиения, s – непрерывная

Рис. 1. Графики распределения разбиений

величина, при совпадении с целым значением обозначает номер класса. Очевидно, что

$$p_1(n) \approx \int_s K(n, s) ds.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Наука, М., 1969.
- [2] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
- [3] Г. Эндрюс, *Теория разбиений*, Наука, М., 1982.
- [4] J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <http://www.research.att.com/~njas/sequences>.

В. В. Кручинин

Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники
E-mail: kru@ie.tusur.ru

Поступило

08.09.2008