Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Мейли Лианг, Зонгшенг Гао, О сходимости и росте кратных рядов Дирихле, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 759–769

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 08:30:38

О сходимости и росте кратных рядов Дирихле

Мейли Лианг, Зонгшенг Гао

В данной работе формула Валирона для простых рядов Дирихле обобщается на n -кратные ряды Дирихле и выводится эквивалентное соотношение между порядком n -кратного ряда Дирихле, его коэффициентами и показателями.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Рассмотрим n -кратный ряд Дирихле

$$f(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} a_{m_1 m_2 \dots m_n} e^{-\lambda_{m_1} s_1 - \lambda_{m_2} s_2 - \cdots - \lambda_{m_n} s_n}, \quad (1.1)$$

где для любого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено $0 < \{\lambda_{m_j}\} \uparrow +\infty$, $s_j = \sigma_j + i\tau_j$, $\sigma_j, \tau_j \in \mathbb{R}$.

Чтобы упростить выражение (1.1), введем обозначения $S = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\lambda_m = (\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \dots, \lambda_{m_n}) \in \mathbb{R}^n$, и

$$\lambda_m S = (\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \dots, \lambda_{m_n})(s_1, s_2, \dots, s_n) = \lambda_{m_1} s_1 + \lambda_{m_2} s_2 + \cdots + \lambda_{m_n} s_n.$$

Таким образом, (1.1) можно также записать в виде

$$f(S) = \sum_m a_m e^{-\lambda_m S}.$$

Пусть

$$S_m(S) = \sum_m a_j e^{-\lambda_j S} = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} a_{j_1 j_2 \dots j_n} e^{-\lambda_{j_1} s_1 - \lambda_{j_2} s_2 - \cdots - \lambda_{j_n} s_n}.$$

Если множество $\{S_m(S)\}$ ограничено для некоторого множества комплексных чисел $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ в $\mathbb{C}^n$ и существует предел

$$\lim_{\substack{m_j \rightarrow \infty \\ j=1,2,\dots,n}} S_m(S),$$

то будем говорить, что ряд (1.1) ограниченно сходится для этого множества чисел, и этот предел будем называть *суммой ряда* (1.1). Если $\{S_m(\sigma_{10} + i\tau_1, \dots, \sigma_{n0} + i\tau_n)\}$, $m \in \mathbb{N}^n$, ограничено равномерно по $-\infty < \tau_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$, и предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty^n} S_m(\sigma_{10} + i\tau_1, \sigma_{20} + i\tau_2, \dots, \sigma_{n0} + i\tau_n)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального научного фонда Китая (грант № 10271011) и Национальной программы основных фундаментальных исследований Китая (грант № 2005CB321902).

Соответствующие абсциссы ограниченной сходимости на прямой обозначим как

$$\sigma_b(C, \phi) = (\sigma_{1_b}(C, \phi), \sigma_{2_b}(C, \phi), \dots, \sigma_{n_b}(C, \phi)),$$

соответствующие абсциссы равномерной и ограниченной сходимости как

$$\sigma_u(C, \phi) = (\sigma_{1_u}(C, \phi), \sigma_{2_u}(C, \phi), \dots, \sigma_{n_u}(C, \phi)),$$

и соответствующие абсциссы абсолютной сходимости как

$$\sigma_a(C, \phi) = (\sigma_{1_a}(C, \phi), \sigma_{2_a}(C, \phi), \dots, \sigma_{n_a}(C, \phi)),$$

которым соответствуют параметры $r_b = r_b(C, \phi)$, $r_u = r_u(C, \phi)$ и $r_a = r_a(C, \phi)$.

При $n = 1$ ряд (1.1) является простым рядом Дирихле. Для простых рядов Дирихле получено множество результатов, главным образом касающихся таких объектов как сходимость, рост, распределение значений и т. д. (стандартная библиография дана в [1]–[5]). В работе [2] Валирон получил соотношения, связывающие абсциссы сходимости, абсциссы равномерной сходимости и абсциссы абсолютной сходимости, а также соотношения между этими абсциссами и коэффициентами, каждая из которых называется формулой Валирона. Ю Джаиронг распространил эту формулу на случай двойных рядов Дирихле в работе [6]. В данной статье мы обобщим формулу Валирона на случай n -кратных рядов Дирихле и докажем соотношение, связывающее порядок n -кратного ряда Дирихле и его коэффициенты. В работе [7] Ю Джаиронг изучал сходимость кратных рядов Тейлора. Результаты, полученные в данной статье, обобщают некоторые результаты теории рядов Дирихле. Одновременно они обобщают соответствующие результаты для n -кратных рядов Тейлора.

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 2.1. Если $\{S_m(S)\}$, $m \in \mathbb{N}^n$, $S \in \mathbb{C}^n$, ограничено в точке $S_1 = (s_{1_1}, s_{2_1}, \dots, s_{n_1})$ и

$$\operatorname{Re}_1(S_1) = r_1 \Phi_1(\phi), \quad \operatorname{Re}_2(S_1) = r_1 \Phi_2(\phi), \quad \dots, \quad \operatorname{Re}_n(S_1) = r_1 \Phi_n(\phi),$$

$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}) \in (0, \pi/2)^{n-1}$, то при

$$\operatorname{Re}_1(S_2) = r_2 \Phi_1(\phi), \quad \operatorname{Re}_2(S_2) = r_2 \Phi_2(\phi), \quad \dots, \quad \operatorname{Re}_n(S_2) = r_2 \Phi_n(\phi),$$

и $r_2 > r_1 + D_\phi$, ряд (1.1) абсолютно сходится в точке $S_2 = (s_{2_1}, s_{2_2}, \dots, s_{2_n})$, где

$$D_\phi = \limsup_{|m| \rightarrow \infty} \frac{\log m}{\lambda_m \Phi(\phi)}, \quad (2.2)$$

при $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, $\log m = \log(m_1 m_2 \dots m_n)$, $\lambda_m = (\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \dots, \lambda_{m_n})$, $\Phi(\phi) = (\Phi_1(\phi), \Phi_2(\phi), \dots, \Phi_n(\phi))$,

$$\lambda_m \Phi(\phi) = \lambda_{m_1} \Phi_1(\phi) + \lambda_{m_2} \Phi_2(\phi) + \dots + \lambda_{m_n} \Phi_n(\phi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$a_m e^{-\lambda_m S_1} = S_{m_1 m_2 \dots m_n}(S_1) - \sum_1 S_m(S_1) + \sum_2 S_m(S_1) - \dots - (-1)^{n-1} \sum_n S_m(S_1),$$

где суммы $\sum_i S_m(S_1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, понимаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_1 S_m(S_1) &= S_{(m_1-1)m_2\dots m_n}(S_1) \\ &\quad + S_{m_1(m_2-1)m_3\dots m_n}(S_1) + \dots + S_{m_1m_2\dots m_{n-1}(m_n-1)}(S_1), \\ \sum_2 S_m(S_1) &= S_{(m_1-1)(m_2-1)\dots m_n}(S_1) + \dots \\ &\quad + S_{(m_1-1)m_2\dots(m_{n-1}-1)}(S_1) + \dots + S_{m_1m_2\dots(m_{n-1}-1)(m_n-1)}(S_1), \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_n S_m(S_1) &= S_{(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{n-1}-1)}(S_1). \end{aligned}$$

Одним словом, $a_m e^{-\lambda_m S_1}$ является алгебраической суммой конечных членов множества $\{S_m(S_1)\} (m \in \mathbb{N}^n) m$. Если же $\{S_m(S_1)\} (m \in \mathbb{N}^n)$ ограничено, то существует предельная константа $K > 0$ такая, что

$$|a_m e^{-\lambda_m S_1}| < K, \quad m \in \mathbb{N}^n.$$

Пусть $r_2 - r_1 > D_\phi + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Имеем

$$|a_m e^{-\lambda_m S_2}| = |a_m e^{-\lambda_m S_1}| |a_m e^{-\lambda_m (S_2 - S_1)}| < K e^{-(r_2 - r_1) \lambda_m \Phi} < K e^{-(D_\phi + \varepsilon) \lambda_m \Phi}.$$

С другой стороны, для некоторого ε , существует положительное целое число N такое, что при $|m| > N$

$$\frac{\log m}{\lambda_m \Phi(\phi)} < D_\phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$|a_m e^{-\lambda_m S_2}| < K e^{-\frac{D_\phi + \varepsilon}{D_\phi + \frac{\varepsilon}{2}} \log m} = K \cdot (m_1 \cdot m_2 \dots m_n)^{-(1+h)}, \quad h > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{|m|=N}^\infty |a_m e^{-\lambda_m S_2}| &\leq K \cdot \sum_{|m|=N}^\infty \frac{1}{m_1^{1+h}} \cdot m_2^{1+h} \dots m_n^{1+h} \\ &\leq K \cdot \sum_{m_1=1}^\infty \frac{1}{m_1^{1+h}} \cdot \sum_{m_2=1}^\infty \frac{1}{m_2^{1+h}} \dots \sum_{m_n=1}^\infty \frac{1}{m_n^{1+h}} < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, видно, что ряд (1.1) абсолютно сходится на S_2 . Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Имеем*

$$0 \leq r_a - r_b \leq D_\phi, \quad \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^{n-1}.$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Имеем*

$$\limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_m| - \lambda_m C}{\lambda_m \Phi(\phi)} \leq r_b \leq r_u \leq r_a \leq \limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_m| - \lambda_m C}{\lambda_m \Phi(\phi)} + D_\phi, \quad (2.3)$$

где D_ϕ определено в (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства $r_b \leq r_u \leq r_a$ очевидны. Теперь докажем последнее неравенство. Нам нужно рассмотреть только случай $D_\phi < +\infty$. Пусть

$$l = l(C, \phi) = \limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_m| - \lambda_m C}{\lambda_m \Phi(\phi)}. \quad (2.4)$$

Предположим, что l – ограниченное число. Нужно показать, что если

$$\operatorname{Re}_1(S_0) = r_0 \Phi_1(\phi) + c_1, \quad \dots, \quad \operatorname{Re}_{(n-1)}(S_0) = r_0 \Phi_{n-1}(\phi) + c_{n-1}, \quad \operatorname{Re}_n(S_0) = r_0 \Phi_n(\phi),$$

$r_0 > l + D_\phi$, то ряд (1.1) сходится абсолютно при $S = S_0$.

Пусть $r_0 = l + D_\phi + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу (2.4) при достаточно большом $|m|$ (пусть $|m| > N_1$) имеем

$$\frac{\log |a_m| - \lambda_m C}{\lambda_m \Phi(\phi)} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Одновременно имеем

$$\begin{aligned} |a_m e^{-\lambda_m S_0}| &= |a_m| e^{-r_0 \lambda_m \Phi(\phi) - \lambda_m C} \\ &< e^{(l+\varepsilon/2)\lambda_m \Phi(\phi) - (l+D_\phi+\varepsilon)\lambda_m \Phi(\phi)} = e^{-(D_\phi+\varepsilon/2)\lambda_m \Phi(\phi)}. \end{aligned}$$

С другой стороны, при достаточно большом $|m|$ (пусть $|m| > N_2$) из определения D_ϕ немедленно следует, что

$$\frac{\log m}{\lambda_m \Phi(\phi)} < D_\phi + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так, при $|m| > \max\{N_1, N_2\}$ имеем

$$|a_m e^{-\lambda_m S_0}| < e^{-(D_\phi+\varepsilon/2)/(D_\phi+\varepsilon/4) \cdot \log m}.$$

Аналогично последнему этапу в доказательстве теоремы 2.1 легко видеть, что ряд (1.1) абсолютно сходится в S_0 , что доказывает наше утверждение в случае $l < +\infty$. Кроме того, последнее неравенство в (2.3) также выполняется в случае $l = +\infty$.

Далее приведем доказательство первого неравенства в (2.3). Предположим, что если

$$\operatorname{Re}_1(S_1) = r_1 \Phi_1(\phi) + c_1, \quad \dots, \quad \operatorname{Re}_{(n-1)}(S_1) = r_1 \Phi_{n-1}(\phi) + c_{n-1}, \quad \operatorname{Re}_n(S_1) = r_1 \Phi_n,$$

то ряд (1.1) ограниченно сходится в $S = S_1$. Тогда, так же как и в начале доказательства теоремы 2.1, существует ограниченная константа $K > 0$ такая, что

$$|a_m e^{-\lambda_m S_1}| < K, \quad m \in \mathbb{N}^n.$$

Так как

$$a_m = a_m e^{-\lambda_m S_1} \cdot e^{\lambda_m S_1},$$

имеем

$$|a_m| < K \cdot |e^{\lambda_m S_1}| = K \cdot e^{\lambda_m C} e^{r_1(\lambda_m \Phi(\phi))}.$$

Проводя простые выкладки и вычисляя $\limsup$, получим

$$l = \limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_n| - \lambda_m C}{\lambda_m \Phi(\phi)} \leq r_1.$$

Следовательно, если $l = -\infty$ и l ограничено, то выполняется первое неравенство в (2.3).

Для завершения доказательства надо рассмотреть случай $l = +\infty$. В этом случае для любых положительных ограниченных чисел r_2 и K_1 можно получить следующее неравенство:

$$l = \limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_n| - \lambda_m C}{\lambda_m \Phi(\phi)} > r_2 + K_1.$$

Так можно найти n рядов, состоящих из целых чисел $\{m_{j_i}\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, 3, \dots$, и таких, что $|m_i| = m_{1_i} + m_{2_i} + \dots + m_{n_i} \rightarrow +\infty$ и

$$|a_{m_i}| e^{-\lambda_{m_i} C} \geq e^{(r_2 + K_1) \lambda_{m_i} \Phi(\phi)}.$$

Это значит, что

$$|a_{m_i} e^{-\lambda_{m_i} S_2}| \geq e^{K_1 \lambda_{m_i} \Phi(\phi)},$$

откуда следует, что $\{a_m e^{-\lambda_m S_2}\}$, $m \in \mathbb{N}^n$, ограничено. Итак, $\{S_m(S)\}$, $m \in \mathbb{N}^n$, ограничено, а ряд (1.1) не сходится ограниченно в S_2 , что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 2.3. Для ряда (1.1), если $\sigma_{j_u} < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, n$, то для любого произвольного $\sigma_j > \sigma_{j_u}$ и любого произвольного $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, n$, выполняется соотношение

$$a_m e^{-\lambda_m \sigma} = \lim_{\substack{T_j \rightarrow +\infty \\ j=1,2,\dots,n}} \frac{1}{\prod_j T_j} \int_{t_1}^{T_1} \int_{t_2}^{T_2} \dots \int_{t_n}^{T_n} f(S_1) e^{i \lambda_m \tau} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n, \quad (2.5)$$

где $\lambda_m = (\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \dots, \lambda_{m_n}) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$S_1 = (s_{1_1}, s_{2_1}, \dots, s_{n_1}) = (\sigma_{1_1} + i\tau_{1_1}, \sigma_{2_1} + i\tau_{2_1}, \dots, \sigma_{n_1} + i\tau_{n_1}) \in \mathbb{C}^n,$$

$\sigma_{j_1}, \tau_{j_1} \in \mathbb{R}$, $j_1 = 1, 2, \dots, n$, и t_j , $j = 1, 2, \dots, n$, — произвольные фиксированные действительные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m_{j_0} \neq m_{j_1}$, $j = 1, 2, \dots, n$, то

$$\lim_{\substack{T_j \rightarrow +\infty \\ j=1,2,\dots,n}} \frac{1}{\prod_j T_j} \int_{t_1}^{T_1} \int_{t_2}^{T_2} \dots \int_{t_n}^{T_n} e^{i(\lambda_m^0 - \lambda_m^1) \tau} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n = 0,$$

где $\lambda_m^0 = (\lambda_{m_{10}}, \lambda_{m_{20}}, \dots, \lambda_{m_{n0}})$, $\lambda_m^1 = (\lambda_{m_{11}}, \lambda_{m_{21}}, \dots, \lambda_{m_{n1}})$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{T_j \rightarrow +\infty \\ j=1,2,\dots,n}} \frac{1}{\prod_j T_j} \int_{t_1}^{T_1} e^{i(\lambda_{m_{10}} - \lambda_{m_{11}})\tau_1} d\tau_1 \\ & \quad \times \int_{t_2}^{T_2} e^{i(\lambda_{m_{20}} - \lambda_{m_{21}})\tau_2} d\tau_2 \dots \int_{t_n}^{T_n} e^{i(\lambda_{m_{n0}} - \lambda_{m_{n1}})\tau_n} d\tau_n \\ & = \lim_{\substack{T_j \rightarrow +\infty \\ j=1,2,\dots,n}} \frac{1}{\prod_j T_j} \left[\frac{e^{i(\lambda_{m_{10}} - \lambda_{m_{11}})\tau_1}}{i(\lambda_{m_{10}} - \lambda_{m_{11}})} \Big|_{t_1}^{T_1} \dots \frac{e^{i(\lambda_{m_{n0}} - \lambda_{m_{n1}})\tau_n}}{i(\lambda_{m_{n0}} - \lambda_{m_{n1}})} \Big|_{t_n}^{T_n} \right] = 0. \end{aligned}$$

Теперь положим $\sigma_1 > \sigma_{1_u}, \sigma_2 > \sigma_{2_u}, \dots, \sigma_n > \sigma_{n_u}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\prod_j T_j} \int_{t_1}^{T_1} \int_{t_2}^{T_2} \dots \int_{t_n}^{T_n} f(S) e^{\lambda_m^1 S} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \\ & = \frac{1}{\prod_j T_j} \int_{t_1}^{T_1} \int_{t_2}^{T_2} \dots \int_{t_n}^{T_n} \sum_m a_m e^{(\lambda_m - \lambda_m^1)S} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n. \end{aligned}$$

Покажем, что интеграл существует. Разделим каждое $m_j \in \mathbb{N}^+$, $j = 1, 2, \dots, n$, на три части, именно, $1 \leq m_j \leq m_{j_1}$, $m_j = m_{j_1}$ и $m_{j_1} + 1 \leq m_j < \infty$. Тогда вышеупомянутый интеграл можно записать как сумму 3^n членов, каждый из которых ограничен. Следовательно, если $T_j \rightarrow +\infty$, $j = 1, 2, \dots, n$, то каждый член стремится к нулю, за исключением одного члена, где $m_j = m_{j_1}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$; предел этого члена равен a_m . Таким образом, уравнение (2.5) выполняется.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для ряда (1.1)

$$m(\sigma, f) \leq M(\sigma, f).$$

Здесь

$$m(\sigma, f) = m(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, f) = \max_{m \in \mathbb{N}^n} \{|a_m| e^{-\lambda_m \sigma}\}$$

называется *максимальным членом n -кратного ряда Дирихле*, а

$$\begin{aligned} M(\sigma, f) &= M(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, f) \\ &= \sup \{|f(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2 + i\tau_2, \dots, \sigma_n + i\tau_n)| : -\infty < \tau_j < +\infty, j = 1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

называется *максимальным модулем n -кратного ряда Дирихле*.

Предположим, что для любого фиксированного $\phi \in (0, \pi/2)^{n-1}$

$$l = l(c, \phi) = \lim_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_m| - \lambda_m C}{\lambda_m \Phi} = 0, \quad (2.6)$$

$$\limsup_{m_j \rightarrow +\infty} \frac{m_j}{\lambda_{m_j}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что $D_\phi = 0$. Это значит, что $r_b = r_u = r_a = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{b_1} = \sigma_{u_1} = \sigma_{a_1} = c_1, \quad \dots, \quad \sigma_{b_{(n-1)}} = \sigma_{u_{(n-1)}} = \sigma_{a_{(n-1)}} = c_{(n-1)}, \\ \sigma_{b_n} = \sigma_{u_n} = \sigma_{a_n} = 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем полагать, что $c = 0$. В противном случае нужно применить только преобразование переноса.

ЛЕММА 2.1. Если выполнены условия (2.6) и (2.7), при любом $\varepsilon > 0$ и любом $\sigma_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, ряд (1.1) имеет следующее свойство:

$$m(\sigma, f) \leq M(\sigma, f) \leq K(\varepsilon) \frac{m((1-\varepsilon)\sigma, f)}{\prod_{j=1}^n \sigma_j},$$

где $K(\varepsilon)$ – константа относительно ε и $f(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство выводится из следствия 2.2, и нам остается доказать только второе неравенство.

В силу (2.7) для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $N_j = N_j(\varepsilon)$ такие, что

$$m_j < (D_j + \varepsilon)\lambda_{m_j} \leq (D + \varepsilon)\lambda_{m_j}, \quad m_j > N_j,$$

где $D = \max\{D_j, j = 1, 2, \dots, n\}$.

Выберем $\sigma_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, и получим

$$\begin{aligned} M(\sigma, f) &\leq \sum_{|m|=n}^{N_0} |a_m| e^{-\lambda_m \sigma} + \sum_{|m|=N_0+1}^{+\infty} |a_m| e^{-\lambda_m \sigma} \\ &= \sum_{|m|=n}^{N_0} |a_m| e^{-\lambda_m \sigma} + \sum_{|m|=N_0+1}^{+\infty} |a_m| e^{-\lambda_m (1-\varepsilon)\sigma} \cdot e^{-\lambda_m \varepsilon \sigma} \\ &\leq K_0 m(\sigma, f) + m((1-\varepsilon)\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon \sigma_j / (D+\varepsilon)}}, \end{aligned}$$

где $K_0 = \sum_{|m|=n}^{N_0} 1 = \binom{N_0}{n}$. Из этого неравенства следует искомое утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если выполняются условия (2.6) и (2.7) и если

$$\limsup_{\substack{\sigma_j \rightarrow 0^+ \\ j=1,2,\dots,n}} \frac{\log^+ \log^+ M(\sigma, f)}{\log(1/\sigma_1 + 1/\sigma_2 + \dots + 1/\sigma_n)} = \rho,$$

то будем говорить, что $f(S)$ имеет порядок ρ в области $\sigma_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$.

ЛЕММА 2.2. В условиях леммы 2.1,

$$\limsup_{\substack{\sigma_j \rightarrow 0^+ \\ j=1,2,\dots,n}} \frac{\log^+ \log^+ m(\sigma, f)}{\log(1/\sigma_1 + 1/\sigma_2 + \dots + 1/\sigma_n)} = \rho. \quad (2.8)$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $c \in (0, 1)$ и $\sigma_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, – константы. Тогда функция

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^c + x_2^c + \dots + x_n^c - x_1 \sigma_1 - x_2 \sigma_2 - \dots - x_n \sigma_n,$$

$x_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, достигает максимума

$$(1-c) \left[\left(\frac{c}{\sigma_1} \right)^{c/(1-c)} + \left(\frac{c}{\sigma_2} \right)^{c/(1-c)} + \dots + \left(\frac{c}{\sigma_n} \right)^{c/(1-c)} \right]$$

в точке

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\left(\frac{c}{\sigma_1} \right)^{1/(1-c)}, \left(\frac{c}{\sigma_2} \right)^{1/(1-c)}, \dots, \left(\frac{c}{\sigma_n} \right)^{1/(1-c)} \right).$$

ЛЕММА 2.4. Пусть b и $x_1, x_2, \dots, x_n$ – положительные константы. Тогда функция

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sigma_1^{-c} + \sigma_2^{-c} + \dots + \sigma_n^{-c} + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + \dots + x_n\sigma_n,$$

$\sigma_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$, достигает минимума

$$(1+c) \left[\left(\frac{x_1}{c} \right)^{c/(1+c)} + \left(\frac{x_2}{c} \right)^{c/(1+c)} + \dots + \left(\frac{x_n}{c} \right)^{c/(1+c)} \right]$$

в точке

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \left(\left(\frac{c}{x_1} \right)^{1/(1+c)}, \left(\frac{c}{x_2} \right)^{1/(1+c)}, \dots, \left(\frac{c}{x_n} \right)^{1/(1+c)} \right).$$

ТЕОРЕМА 2.4. Предположим, что ряд (1.1) удовлетворяет условиям (2.6), (2.7). Тогда в области $\operatorname{Re}(s_1) > 0, \operatorname{Re}(s_2) > 0, \dots, \operatorname{Re}(s_n) > 0$

$$f(S) \text{ имеет порядок } \rho \iff \limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ \log^+ |a_m|}{\log(\sum_{j=1}^n \lambda_{m_j})} = \begin{cases} \frac{\rho}{\rho+1}, & \text{если } \rho < +\infty, \\ 1, & \text{если } \rho = +\infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $\rho < +\infty$.

Теперь надо доказать, что правая часть предыдущей формулы является необходимым условием для того, чтобы $f(S)$ имела порядок ρ в области $\operatorname{Re}(s_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n$.

В силу леммы 2.2 для произвольных достаточно малых $\sigma_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$, и для любых $m_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$|a_m| e^{-\lambda_m \sigma} \leq m(\sigma, f) < \exp \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n} \right)^{\rho+\varepsilon} \right\},$$

так что

$$\begin{aligned} \log |a_m| &< \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n} \right)^{\rho+\varepsilon} + \lambda_{m_1}\sigma_1 + \lambda_{m_2}\sigma_2 + \dots + \lambda_{m_n}\sigma_n \\ &< n^{(\rho+\varepsilon)} (\sigma_1^{-(\rho+\varepsilon)} + \sigma_2^{-(\rho+\varepsilon)} + \dots + \sigma_n^{-(\rho+\varepsilon)}) + \lambda_{m_1}\sigma_1 + \lambda_{m_2}\sigma_2 + \dots + \lambda_{m_n}\sigma_n. \end{aligned}$$

Таким образом, для достаточно больших $m_j, j = 1, 2, \dots, n$, если мы возьмем

$$\sigma_1 = \left(\frac{\rho+\varepsilon}{\lambda_{m_1}} \right)^{1/(\rho+\varepsilon+1)}, \quad \sigma_2 = \left(\frac{\rho+\varepsilon}{\lambda_{m_2}} \right)^{1/(\rho+\varepsilon+1)}, \quad \dots, \quad \sigma_n = \left(\frac{\rho+\varepsilon}{\lambda_{m_n}} \right)^{1/(\rho+\varepsilon+1)},$$

то в силу леммы 2.4 получим

$$\begin{aligned} \log |a_m| &< n^{\rho+\varepsilon} (\rho+\varepsilon+1) \left[\left(\frac{\lambda_{m_1}}{\rho+\varepsilon} \right)^{(\rho+\varepsilon)/(\rho+\varepsilon+1)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\lambda_{m_2}}{\rho+\varepsilon} \right)^{(\rho+\varepsilon)/(\rho+\varepsilon+1)} + \dots + \left(\frac{\lambda_{m_n}}{\rho+\varepsilon} \right)^{(\rho+\varepsilon)/(\rho+\varepsilon+1)} \right] \\ &< n^{\rho+\varepsilon+1} (\rho+\varepsilon+1) \left[\frac{\lambda_{m_1}}{\rho+\varepsilon} + \frac{\lambda_{m_2}}{\rho+\varepsilon} + \dots + \frac{\lambda_{m_n}}{\rho+\varepsilon} \right]^{(\rho+\varepsilon)/(\rho+\varepsilon+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ \log^+ |a_m|}{\log(\sum_{j=1}^n \lambda_{m_j})} \leq \frac{\rho + \varepsilon}{\rho + \varepsilon + 1}.$$

Так как ε выбран произвольным образом, имеем

$$\limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ \log^+ |a_m|}{\log(\sum_{j=1}^n \lambda_{m_j})} \leq \frac{\rho}{\rho + 1}.$$

Предположим, что неравенство в предыдущей формуле сохраняет знак. Тогда $\rho > 0$ и существует $\delta \in (0, \rho)$ такая, что

$$\limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ \log^+ |a_m|}{\log(\sum_{j=1}^n \lambda_{m_j})} \leq \frac{\rho - \delta}{\rho - \delta + 1}.$$

Следовательно, при достаточно большом $|m|$ в силу леммы 2.3 имеем

$$\begin{aligned} \log |a_m| e^{-\lambda_m \sigma} &\leq \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{m_j} \right)^{(\rho-\delta)/(\rho-\delta+1)} - \lambda_m \sigma \\ &\leq \lambda_{m_1}^{(\rho-\delta)/(\rho-\delta+1)} + \lambda_{m_2}^{(\rho-\delta)/(\rho-\delta+1)} + \dots + \lambda_{m_n}^{(\rho-\delta)/(\rho-\delta+1)} - \lambda_m \sigma \\ &\leq \frac{1}{\rho - \delta + 1} \left[\left(\frac{1}{\sigma_1} \frac{\rho - \delta}{\rho - \delta + 1} \right)^{\rho-\delta} + \left(\frac{1}{\sigma_2} \frac{\rho - \delta}{\rho - \delta + 1} \right)^{\rho-\delta} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sigma_n} \frac{\rho - \delta}{\rho - \delta + 1} \right)^{\rho-\delta} \right] \\ &\leq \frac{1}{\rho - \delta + 1} \left[\left(\frac{1}{\sigma_1} \right)^{\rho-\delta} + \left(\frac{1}{\sigma_2} \right)^{\rho-\delta} + \dots + \left(\frac{1}{\sigma_n} \right)^{\rho-\delta} \right] \\ &\leq \frac{n}{\rho - \delta + 1} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n} \right)^{\rho-\delta}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\limsup_{\substack{\sigma_j \rightarrow 0^+ \\ j=1,2,\dots,n}} \frac{\log^+ \log^+ m(\sigma, f)}{\log(1/\sigma_1 + 1/\sigma_2 + \dots + 1/\sigma_n)} \leq \rho - \delta < \rho,$$

что противоречит предположению. Следовательно, в случае $\rho < \infty$ соотношение

$$\limsup_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ \log^+ |a_m|}{\log(\sum_{j=1}^n \lambda_{m_j})} = \frac{\rho}{\rho + 1} \quad (2.9)$$

является необходимым условием для того, чтобы $f(S)$ имела порядок ρ в области $\operatorname{Re}(s_1) > 0, \operatorname{Re}(s_2) > 0, \dots, \operatorname{Re}(s_n) > 0$.

Применяя леммы 2.3 и 2.4, можно доказать, что (2.9) является и достаточным условием.

Доказательство в случае $\rho = \infty$ аналогично. Таким образом, теорема полностью доказана.

Авторы выражают искреннюю благодарность проф. Сун Даочун за помощь и ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Daochun Sun, Jiarong Yu, “Sur la distribution des valeurs de certaines séries aléatoires de Dirichlet. II”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **1989**:7 (308), 205–207.
- [2] G. Valiron, “Entire functions and Borel’s directions”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **20**:3 (1934), 211–215.
- [3] Chia-Yung Yu, “Sur la croissance de certaines séries de Dirichlet sur des demi-droites horizontales”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **296**:4 (1983), 187–190.
- [4] Jia-rong Yu, “Julia lines of random Dirichlet series”, *Bull. Sci. Math.*, **128**:5 (2004), 341–353.
- [5] Jiarong Yu, “On the growth and the distribution of values of exponential series convergent only in the right half-plane”, *Chinese Ann. Math.*, **3**:4 (1982), 545–554.
- [6] Yu Chia-yung, “On the convergence of double Dirichet series and double Laplace transform”, *J. Wuhan Univ. (Natural Sc. Ed.)*, **1**:1 (1962), 1–16 (in Chinese).
- [7] Yu Jiarong, “Some properties of multiple Taylor series and random Taylor series”, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, **26**:3 (2006), 568–576.

Мейли Лианг

Beihang University, Beijing, Китай

E-mail: liangmeili2004@163.com

Поступило

28.08.2009

Зонгшенг Гао

Beihang University, Beijing, Китай

E-mail: zshgao@buaa.edu.cn