Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ксиа Джингбо, Джианхуа Чен, Джанг Силан, Упрощенный метод алгебраический аппроксимации некоторых алгебраических чисел, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 426–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 11:30:50

Упрощенный метод алгебраический аппроксимации некоторых алгебраических чисел

Ксиа Джингбо, Чен Джиянхуа, Джанг Силан

В работе для аппроксимации некоторых простых чисел разработан новый простой метод. На основе этого метода найдена эффективная верхняя оценка для целочисленных решений уравнения четвертого порядка с двумя параметрами

$$tx^4 - 4sx^3y - 6tx^2y^2 + 4sxy^3 + ty^4 = N,$$

где $s > 32t^3$. В качестве приложения находится решение уравнения Лjungтрена элементарным способом.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Диофантовы аппроксимации играют важную роль для решения диофантовых уравнений. Обозначим через θ алгебраическое число порядка $n \geq 3$. По теореме Лиувилля [1] существует такая постоянная $c > 0$, что для любых $p, q \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{|q|^n},$$

и улучшение показателя n позволяет решить уравнение Туэ (Thue) $f(x, y) = N$.

Первое эффективное улучшение было получено Бейкером [2], [3], который показал, что

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{10^{-6}}{|q|^{2.955}}.$$

Пользуясь этим неравенством, Бейкер решил диофантово уравнение $x^3 - 2y^3 = N$. Метод Бейкера основан на аппроксимации Падэ и гипергеометрических функциях, что способствовало обоснованию метода Туэ–Зигеля. В 1908 г. Туэ был первым, использовавшим аппроксимации Падэ для нахождения оценок для решений диофантовых уравнений вида $ax^n - by^n = c$ (некоторые эффективные оценки для решений приведены на с. 159 и 565 в [4]; см. также предисловие Зигеля в [5]). Бейкер [3] использовал аппроксимации Падэ для биномиальной функции и тем самым доказал некоторые оценки для решений уравнения $ax^n - by^n = c$.

В качестве литературы по методу Зигеля и диофантовым приближениям укажем на статьи Беннета [6], Беннета и де Вегера [7], Бомбиери [8], Чена [9]–[11], Чудновского [12], Леттла и др. [13], Тогбе [14], Ксиа и др. [15] и Юана [16].

Метод Туэ–Зигеля остается весьма важным в современной теории аппроксимации алгебраических чисел и возникает интересный вопрос, является ли этот метод наиболее эффективным. На самом деле, решение диофантовых уравнений различными способами играет важную иллюстративную роль в математике. Хорошо известным примером является уравнение Лjungгрена (Ljunggren)

$$x^2 + 1 = 2y^4,$$

имеющее только два решения $\pm(x, y) = (1, 1), (239, 13)$.

Данное уравнение заняло особое место в длинной истории диофантовых уравнений и многие пытались дать свои способы доказательства. Лjunggren [17] первый получил сложное решение, основанное на изучении единиц относительной нормы -1 в квадратичном расширении, а также опираясь на p -адические методы Сколема. Штейнер и Тцанакис [18] привел другое доказательство, используя глубокий результат о линейных формах логарифма, полученный Миньотом и Вальдшмитом. В 1994 г. Чен [10] решил уравнение, используя метод Туэ–Зигеля, основанный на аппроксимации Падэ. Далее Чен [9] решил параметрическое уравнение $x^2 + 1 = dy^4$ тем же методом, но весьма трудоемким способом.

Указанные работы ставят вопрос о существовании более простого метода аппроксимации вышеуказанных алгебраических чисел.

2. Основные результаты. Данная работа посвящена упрощению метода диофантовой аппроксимации некоторых алгебраических чисел. Наши методы также основаны на аппроксимации Падэ, но они проще обычных способов. Используются только элементарные результаты из анализа и не используются теорема Туэ и гипергеометрическая функция, которая играет важную роль в методе Туэ–Зигеля.

На основе разработанного метода в статье решены некоторые параметризованные уравнения Туэ. Основной результат изложен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Для $s > 32t^3$, $s > 0$, $t > 0$ и

$$f(x, y) = tx^4 - 4sx^3y - 6tx^2y^2 + 4sxy^3 + ty^4 = N \quad (1)$$

пусть θ корень уравнения $f(x, 1) = 0$. Тогда для любых $p, q \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{c|q|^\lambda},$$

где

$$c = 45.28\epsilon t \left(\frac{0.715\epsilon}{t} \right)^\lambda, \quad \lambda = \frac{\log 8\epsilon t}{\log \epsilon/8t}, \quad \epsilon = \frac{\sqrt{s^2 + t^2} + s}{t}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть (x, y) решение уравнения (1). Тогда имеем

$$|y| \leq \left(181.28N \left(\frac{0.715\epsilon}{t} \right)^\lambda \right)^{1/(3-\lambda)}.$$

В качестве приложения нашего метода мы приводим простой способ решения уравнения

$$x^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \pm 1, \quad (2)$$

а также уравнения Лjungгрена

$$x^2 + 1 = 2y^4. \quad (3)$$

Важный момент заключается в том, что наш метод является относительно простым и более элементарным, чем метод Туэ–Зигеля, а результат применения нашего метода чрезвычайно эффективный. По нашему мнению данный метод является существенным продвижением в теории диофантовой аппроксимации.

3. Предварительные сведения. В этом разделе мы приводим леммы, которые будут использованы при доказательстве теорем.

ЛЕММА 1. *Предположим, что $n \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n-\alpha}{n-k} \binom{n+\alpha}{k} x^k \quad \text{и} \quad q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n-\alpha}{k} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k.$$

Пусть x – комплексное число и пусть c – путь интегрирования от 1 до x . Если 0 не находится на c , то

$$x^\alpha q_n(x) - p_n(x) = (n+1) \binom{n+\alpha}{n} \binom{\alpha}{n+1} \int_c t^{(\alpha-n-1)} (1-t)^n (x-t)^n dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$R_n(x) = x^\alpha q_n(x) - p_n(x).$$

Имеем

$$\frac{R_n^{(r)}(x)}{r!} = \sum_{k=0}^n \binom{n-\alpha}{k} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{k+\alpha}{r} x^{k+\alpha-r} - \sum_{k=r}^n \binom{n-\alpha}{n-k} \binom{n+\alpha}{k} \binom{k}{r} x^{k-r},$$

где $r = 0, 1, 2, \dots, n$. Так как

$$\begin{aligned} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{k+\alpha}{r} &= \binom{n+\alpha}{r} \binom{n+\alpha-r}{n-k}, \\ \binom{n+\alpha}{s+r} \binom{s+r}{r} &= \binom{n+\alpha}{r} \binom{n+\alpha-r}{s}, \quad \text{где } s = k-r, \end{aligned}$$

из формулы Вандермонда следует, что

$$\begin{aligned} R_n^{(r)}(1) &= \sum_{k=0}^n \binom{n-\alpha}{k} \binom{n+\alpha}{r} \binom{n+\alpha-r}{n-k} \\ &\quad - \sum_{s=0}^{n-r} \binom{n-\alpha}{n-s-r} \binom{n+\alpha}{r} \binom{n+\alpha-r}{s} \\ &= \binom{n+\alpha}{r} \sum_{k=0}^n \binom{n-\alpha}{k} \binom{n+\alpha-r}{n-k} \\ &\quad - \binom{n+\alpha}{r} \sum_{s=0}^{n-r} \binom{n-\alpha}{n-s-r} \binom{n+\alpha-r}{s} \end{aligned}$$

$$= \binom{n+\alpha}{r} \binom{2n-r}{n} - \binom{n+\alpha}{r} \binom{2n-r}{n} = 0.$$

Так как

$$\binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n-\alpha}{k} \binom{k+\alpha}{n+1} = (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+\alpha}{n} \binom{\alpha}{n+1},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{R_n^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n-\alpha}{k} \binom{k+\alpha}{n+1} x^{k+\alpha-n-1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+\alpha}{n} \binom{\alpha}{n+1} x^{k+\alpha-n-1} \\ &= x^{\alpha-n-1} \binom{n+\alpha}{n} \binom{\alpha}{n+1} (1-x)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, используя разложение Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_1^x R^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\ &= (n+1) \binom{n+\alpha}{n} \binom{\alpha}{n+1} \int_1^x t^{\alpha-n-1} (1-t)^n (x-t)^n dt. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $q_n(x)$ такое же, как в лемме 1, $0 < \alpha < 1$, а s – путь интегрирования, обходящий начало координат один раз в положительном направлении. Тогда

- (i) $p_n(x) = x^n q_n(x^{-1})$;
- (ii) $q_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_c (1-xt)^{n-\alpha} (1-t)^{n+\alpha} t^{-n-1} dt$;
- (iii) $q_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{n-k} \binom{n-\alpha}{k} (1-x)^k$;
- (iv) если $x = w = (si-t)/(si+t) = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi/2$, то $|q_n(w)| \leq 4|1+\sqrt{w}|^{2(n-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Доказательство легко получается непосредственной проверкой.

(ii) Нетрудно проверить, что

$$(1-xt)^{n-\alpha} (1-t)^{n+\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k,$$

где

$$p_k(x) = \sum_{s=0}^k \binom{n-\alpha}{s} \binom{n+\alpha}{k-s} x^s (-1)^k.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\oint_c (1-xt)^{n-\alpha} (1-t)^{n+\alpha} t^{-n-1} dt \\ &= \oint_c \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k \binom{n-\alpha}{s} \binom{n+\alpha}{k-s} x^s (-1)^k \right) t^{k-n-1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^k \binom{n-\alpha}{s} \binom{n+\alpha}{k-s} x^s (-1)^k \oint_c t^{k-n-1} dt \\
&= \sum_{s=0}^n \binom{n-\alpha}{s} \binom{n+\alpha}{n-s} x^s (-1)^n 2\pi i.
\end{aligned}$$

Итак, получаем

$$q_n(x) = \sum_{s=0}^n \binom{n-\alpha}{s} \binom{n+\alpha}{n-s} x^s = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_c (1-xt)^{n-\alpha} (1-t)^{n+\alpha} t^{-n-1} dt.$$

(iii) С учетом (ii), подставляя $x = 1 - y$, находим

$$\begin{aligned}
q_n(x) &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_c (1-xt)^{n-\alpha} (1-t)^{n+\alpha} t^{-n-1} dt \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_c (1-t+yt)^{n-\alpha} (1-t)^{n+\alpha} t^{-n-1} dt \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_c (1-t)^{n+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{k} (1-t)^{n-\alpha-k} (yt)^k t^{-n-1} dt \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_c (1-t)^{2n-k} \binom{n-\alpha}{k} y^k t^{-n+k-1} dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом теоремы Коши имеем

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{n-k} \binom{n-\alpha}{k} (1-x)^k.$$

(iv) Пусть

$$f(t) = \frac{(1-t)(1-wt)}{t} \quad \text{и} \quad g(t) = \frac{(1-wt)^{0.75}(1-t)^{1.25}}{t^2}.$$

Положив $t = e^{i\theta}$, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
|f(t)| &= |(1 - e^{i\theta})(1 - e^{i(\theta+\varphi)})| = \sqrt{(2 - 2\cos\theta)(2 - 2\cos(\theta + \varphi))} \\
&= 2 \left| \cos\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\frac{\varphi}{2} \right| \leq \left| 2 + 2\cos\frac{\varphi}{2} \right| = |1 + \sqrt{w}|^2,
\end{aligned}$$

а также

$$|g(t)| = |1 - wt|^{0.75} |1 - t|^{1.25} < 4.$$

Из (ii) следует лемма.

ЛЕММА 3. Пусть w, φ такое же, как в лемме 2. Тогда

$$|R_n(w)| \leq \frac{1}{4} |\varphi| |1 - \sqrt{w}|^{2n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \varphi$. Из леммы 1 очевидно, что

$$R_n(w) \leq \left| (n+1) \binom{n+1/4}{n} \binom{1/4}{n+1} \right| \int_0^\varphi |t|^{(1/4-n-1)} |(1-t)(w-t)|^n dt.$$

Пусть

$$f(t) = (1-t)(w-t).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |(1 - e^{i\theta})(1 - e^{i(\theta-\varphi)})| = \sqrt{(2 - 2\cos\theta)(2 - 2\cos(\theta - \varphi))} \\ &= 2 \left| \cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\frac{\varphi}{2} \right| \leq \left| 2 - 2\cos\frac{\varphi}{2} \right| = |1 - \sqrt{w}|^2. \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление дает

$$\left| (n+1) \binom{n+1/4}{n} \binom{1/4}{n+1} \right| \leq \frac{1}{4}.$$

Таким образом, лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для $k, n \in \mathbb{Z}^+$ выполняется $8^k \binom{n-1/4}{k} \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k! = 2^s M$, где $(2, M) = 1$. Так как

$$\binom{n-1/4}{k} = \frac{(4n-1)(4(n-1)-1)\cdots(4(n-k+1)-1)}{4^k k!},$$

существует такое t , что $4t \equiv 1 \pmod{M}$ и

$$\begin{aligned} &t^k (4n-1)(4(n-1)-1)\cdots(4(n-k+1)-1) \\ &\equiv (n-t)\cdots(n-k+1-t) \equiv \binom{n-t}{k} k! \equiv 0 \pmod{M}. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$M \mid (4n-1)\cdots(4(n-k+1)-1).$$

При этом

$$s = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + \cdots < k.$$

Отсюда следует лемма.

ЛЕММА 5. Имеем

$$p_n(x)q_{n+1}(x) \neq q_n(x)p_{n+1}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное соотношение легко проверить непосредственным вычислением (см. [9]).

ЛЕММА 6. Пусть θ – алгебраическое число. Предположим, что существуют такие $k_0 > 0$, $l_0, Q > 1$, $E > 1$, что для всех n существуют рациональные целые x_n и y_n , где $|y_n| < k_0 Q^n$ и $|y_n \theta - x_n| \leq l_0 E^{-n}$, и предположим далее, что $x_n y_{n+1} \neq y_n x_{n+1}$. Тогда для любых рациональных целых x и y , $y \geq e/(2l_0)$, имеем

$$|\theta y - x| > \frac{1}{cy^\lambda}, \quad \text{где } c = 2k_0 Q(2l_0 E)^\lambda, \quad \lambda = \frac{\log Q}{\log E}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. работу Чена [9].

4. Семейство уравнений Туэ четвертого порядка. Пусть функция $f(x, y)$ такая же, как в (1), и предположим $s > 32t^3$, где $s > 0$, $t > 0$ без потери общности. Тогда имеем

$$f(x, 1) = tx^4 - 4sx^3 - 6tx^2 + 4sx + t,$$

обозначаемую сокращенно $f(x)$. Пусть θ корень уравнения $f(x) = 0$; тогда легко видеть, что θ удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{\theta + i}{\theta - i}\right)^4 = \frac{si - t}{si + t}.$$

Пусть $w = z/u$, $z = si - t$, $u = si + t$. Нетрудно получить

$$\sqrt{w} = \pm \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} + i \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \right).$$

Отсюда

$$\left(\frac{\theta + i}{\theta - i}\right)^2 = \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} + i \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \quad \text{или} \quad -\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} - i \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}.$$

Из вышеприведенных двух уравнений непосредственным вычислением получим

$$\theta_0 = \varepsilon + \rho, \quad \theta_1 = \varepsilon - \rho, \quad \theta_2 = \frac{-1 + \rho}{\varepsilon}, \quad \theta_3 = \frac{-1 - \rho}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = (\sqrt{s^2 + t^2} + s)/t$ и $\rho = \sqrt{\varepsilon^2 + 1}$.

Следовательно, получены следующие грубые оценки для четырех корней: $\theta_2 \approx 1$, $\theta_3 \approx -1$, $\theta_1 \approx 0$, $\theta_0 \approx 2\varepsilon$.

Без потери общности положим $|x - y\theta_k| = \min\{|x - y\theta_j|\}$, $j = 0, 1, 2, 3$, где θ_j корни полинома $f(x)$. Имеем

$$2|x - y\theta_j| > |x - y\theta_j| + |x - y\theta_k| > |y||\theta_k - \theta_j| \quad \text{для} \quad j \neq k.$$

Так как

$$f(x, y) = t(x - y\theta_0)(x - y\theta_1)(x - y\theta_2)(x - y\theta_3) = N,$$

и

$$\min_{k=0,1,2,3} \left\{ \prod_{j \neq k} |\theta_k - \theta_j| \right\} > 2\rho,$$

имеем

$$|x - y\theta_k| = \frac{N}{t \prod_{j \neq k} |x - y\theta_j|} \leq \frac{8N}{t|y|^3 \prod_{j \neq k} |\theta_k - \theta_j|} \leq \frac{4N}{t\rho|y|^3}. \quad (4)$$

Таким образом, находим верхнюю оценку для $|x - y\theta_k|$. В дальнейшем получим нижнюю оценку для $|x - y\theta_k|$ при доказательстве теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как

$$\left(\frac{\theta + i}{\theta - i}\right)^4 = \frac{si - t}{si + t} = \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2} + i \frac{2st}{s^2 + t^2} = w,$$

имеем

$$\theta = i \frac{w^{1/4} + 1}{w^{1/4} - 1}.$$

С учетом $|w| = 1$, полагая $w = e^{i\varphi}$, получим

$$\theta_k = i \frac{e^{((\varphi+2k\pi)/4)i} + 1}{e^{((\varphi+2k\pi)/4)i} - 1}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Также данные четыре корня можно представить в виде

$$\theta_k = i \frac{v_k e^{(\varphi/4)i} + v'_k}{v_k e^{(\varphi/4)i} - v'_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

где $v_k = \sqrt{2} e^{(k\pi i)/4}$, причем v_k и v'_k сопряженные величины. Отметим, что v_k алгебраическое целое в $Z[i]$.

Теперь используем метод аппроксимации Падэ для формулировки аппроксимации рациональных целых с целью получения корректной меры иррациональности для θ .

Пусть $p_n(w)$, $q_n(w)$, $R_n(w)$ такие же, как в лемме 1, и θ одно из θ_k . По лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \theta &= i \frac{v e^{(\varphi/4)i} + v'}{v e^{(\varphi/4)i} - v'} = i \frac{v e^{(\varphi/4)i} q_n(w) + v' q_n(w)}{v e^{(\varphi/4)i} q_n(w) - v' q_n(w)} \\ &= \frac{iv p_n(w) + iv' q_n(w) + iv R_n(w)}{v p_n(w) - v' q_n(w) + v R_n(w)} = \frac{S + iv R_n(w)}{T + v R_n(w)}, \end{aligned}$$

где

$$S = iv p_n(w) + iv' q_n(w), \quad T = v p_n(w) - v' q_n(w).$$

Итак,

$$T\theta - S = iv R_n(w) - v\theta R_n(w).$$

В результате простого умножения немедленно получаем

$$Q_n \theta - P_n = R_n,$$

где $Q_n = i^{n+1} 4^n u^n T$, $P_n = i^{n+1} 4^n u^n S$, $R_n = i^{n+1} 4^n u^n (iv R_n(w) - v\theta R_n(w))$.

Так как

$$1 - w = \frac{2t}{si + t} = \frac{2t}{u},$$

из леммы 2 (iii) имеем

$$q_n(w) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{n-k} \binom{n-1/4}{k} \left(\frac{2t}{u}\right)^k.$$

Отметим, что $\binom{2n-k}{n-k}$ рациональное целое и u алгебраическое целое в $Q(i)$; из леммы 4, видим, что $4^n u^n q_n(w)$ алгебраическое целое в $Q(i)$, а Q_n и P_n также алгебраические целые.

Так как $u' = -z$, $(u^n p_n(w))' = (-1)^n (u^n q_n(w))$, нетрудно проверить, что

$$(Q_n)' = Q_n, \quad (P_n)' = P_n.$$

Следовательно, $Q_n \in Z$, $P_n \in Z$. Благодаря этому построены две совокупности рациональных целых для аппроксимации θ .

В результате вычислений получены следующие оценки:

$$\begin{aligned} |v| = |v'| = \sqrt{2}, \quad |\theta| < 2\rho, \quad |\varphi| = \arctan\left(\frac{2st}{s^2 - t^2}\right) \leq \frac{2st}{s^2 - t^2}, \\ |1 + \sqrt{w}|^2 > \left|1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} + i\frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right|^2 = 2 + 2\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} > 3.999, \\ |\sqrt{u} + \sqrt{z}|^2 = 2(s + \sqrt{s^2 + t^2}) = 2\varepsilon t, \\ |\sqrt{u} - \sqrt{z}|^2 = 2(\sqrt{s^2 + t^2} - s) = \frac{2t}{\varepsilon}, \\ 1 + 2\rho < 2.016\rho \quad \text{при} \quad s > 32t^3. \end{aligned}$$

Тогда из леммы 2 и леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} |Q_n| &\leq 4^n |u|^n |v| (|p_n(w)| + |q_n(w)|) \leq \frac{8|v|}{|1 + \sqrt{w}|^2} (4|u||1 + \sqrt{w}|^2)^n \\ &= \frac{8|v|}{|1 + \sqrt{w}|^2} (8\varepsilon t)^n \leq 2.83(8\varepsilon t)^n, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq 4^n |u|^n |v| (1 + |\theta|) |R_n(w)| \leq |v| (1 + 2\rho) \frac{|\varphi|}{4} (4|u||1 - \sqrt{w}|^2)^n \\ &\leq \sqrt{2} \cdot 2.016\rho \frac{2st}{4(s^2 - t^2)} \left(\frac{8t}{\varepsilon}\right)^n \leq 2.86 \left(\frac{8t}{\varepsilon}\right)^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как

$$p_n q_{n+1} \neq q_n p_{n+1},$$

имеем

$$P_n Q_{n+1} \neq Q_n P_{n+1}.$$

Положим $k_0 = 2.83$, $l_0 = 2.86$, $Q = 8\varepsilon t$, $E = \varepsilon/8t$; применяя лемму 6, находим

$$|p - \theta q| > \frac{1}{c|q|^\lambda} \quad \text{для любых рациональных целых } p, q, \quad (7)$$

где

$$c = 2k_0 Q (2l_0 E)^\lambda = 45.28\varepsilon t \left(\frac{0.715\varepsilon}{t}\right)^\lambda, \quad \lambda = \frac{\log Q}{\log E}.$$

Отсюда следует теорема 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из (4) и (7) получим

$$|y|^{3-\lambda} \leq \frac{4cN}{t\varepsilon}.$$

Так как $\varepsilon > 2s/t$, имеем

$$|y|^{3-\lambda} \leq \frac{4Nc}{t\varepsilon} = \frac{4N \cdot 45.28\varepsilon t (0.715\varepsilon/t)^\lambda}{t\varepsilon} \leq 181.28N \left(\frac{0.715\varepsilon}{t}\right)^\lambda.$$

ТАБЛИЦА 1. Верхняя оценка для $|y|$. Зафиксируем $t = 1$ и пусть возрастает s

s	320	3200	32000	320000
λ	1.94908	1.62216	1.46276	1.36838
грань ₁	45574.1	65306.5	158624	439618
грань ₂	800	8000	80000	800000
s	3.2×10^6	3.2×10^7	3.2×10^8	3.2×10^9
λ	1.30597	1.26165	1.22854	1.20287
грань ₁	1.2844×10^6	3.85285×10^6	1.17331×10^7	3.60691×10^7
грань ₂	8×10^6	8×10^7	8×10^8	8×10^9
s	3.2×10^{10}	3.2×10^{11}	3.2×10^{12}	3.2×10^{13}
λ	1.18239	1.16566	1.15174	1.13998
грань ₁	1.1158×10^8	3.46695×10^8	1.08068×10^9	3.37667×10^9
грань ₂	8×10^{10}	8×10^{11}	8×10^{12}	8×10^{13}

Отметим, что $\lambda < 3$ для $s > 32t^3$; отсюда получим эффективную верхнюю оценку для $|y|$:

$$|y| \leq \left(181.28N \left(\frac{0.715\varepsilon}{t} \right)^\lambda \right)^{1/(3-\lambda)}.$$

Таким образом, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученная верхняя оценка достаточно эффективна, особенно если s много больше чем t . Конкретно, значение $1/(3-\lambda)$ быстро уменьшается если w приближается к 1. таблица 1 иллюстрирует изменение соответствующих величин.

В этой таблице грань₁ – верхняя грань, вычисленная по теореме 2, а грань₂ – верхняя грань, вычисленная из результатов [16]. Нетрудно видеть, что с увеличением s λ также увеличивается. Если сравнить грань₁ и грань₂, то видно, что грань₁ более эффективна, когда $s > 10^5$. Отсюда следует, что наш результат является важным дополнением результата, приведенного в [16].

5. Приложение к решению уравнения Люнггрена $x^2 + 1 = 2y^4$. Теперь перейдем к решению уравнения Люнггрена простым способом, используя идею теоремы 2.

Подставляя $s = 1$, $t = 1$, $N = 1$ в уравнение (1), находим конкретное уравнение

$$f(x, y) = x^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \pm 1. \quad (8)$$

Решение этого уравнения известно; с его помощью можно решить уравнение Люнггрена (3) (см. [18]).

Обозначим через θ корень уравнения $f(x, 1) = 0$. Отметим, что s, t не удовлетворяет неравенству $s > 32t^3$ и результат теоремы 2 не может быть непосредственно использован. Однако, его можно видоизменить для аппроксимации некоторых других алгебраических чисел и в результате получить эффективную диофантову аппроксимацию величины θ .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть (x, y) решение (8). Тогда оно удовлетворяет неравенству

$$|x - y\theta| < \frac{1.36041}{|y|^3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$ и $\rho = \sqrt{\varepsilon^2 + 1}$, из доказательства теоремы 1 получим

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \varepsilon + \rho \approx 5.0273395, & \theta_1 &= \varepsilon - \rho \approx -0.1989124, \\ \theta_2 &= \frac{-1 + \rho}{\varepsilon} \approx 0.6681786, & \theta_3 &= \frac{-1 - \rho}{\varepsilon} \approx -1.4966058. \\ \prod_{j \neq 0} |\theta_0 - \theta_j| &> 148.62, & \prod_{j \neq 1} |\theta_1 - \theta_j| &> 5.8806, \\ \prod_{j \neq 2} |\theta_2 - \theta_j| &> 8.1824, & \prod_{j \neq 3} |\theta_3 - \theta_j| &> 18.327.\end{aligned}$$

Предположим, что

$$|x - y\theta_k| = \min_{j=0,1,2,3} \{|x - y\theta_j|\}.$$

Тогда для $j \neq k$ имеем

$$2|x - y\theta_j| > |x - y\theta_k| + |x - y\theta_j| > |y| |\theta_j - \theta_k|.$$

Так как

$$\prod_{k=0}^3 |x - \theta_k y| = 1,$$

для любого $k = 0, 1, 2, 3$ имеем

$$|x - y\theta_k| < \frac{8}{|y|^3 \prod_{j \neq k} |\theta_k - \theta_j|} < \frac{8}{5.8806|y|^3} < \frac{1.36041}{|y|^3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любых рациональных целых p, q имеем

$$|p - \theta q| > \frac{1}{4768441.384|q|^{2.0168}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\left(\frac{\theta + i}{\theta - i}\right)^4 = \frac{i - 1}{i + 1} = i, \quad \left(\frac{\theta + i}{3 - 2i} \Big/ \frac{\theta - i}{3 + 2i}\right)^4 = \frac{239i + 1}{239i - 1}.$$

Для простоты положим $w = z/u$, где $z = 239i + 1, u = 239i - 1$. Так как $|w| = 1$, полагая $w = e^{i\varphi}$, получим

$$\theta_k = -i \frac{(3 - 2i)e^{((\varphi + 2k\pi)/4)i} + (3 + 2i)}{(3 - 2i)e^{((\varphi + 2k\pi)/4)i} - (3 + 2i)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Итак,

$$\theta_k = -i \frac{v_k e^{(\varphi/4)i} + v'_k}{v_k e^{(\varphi/4)i} - v'_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

где $v_k = (3 - 2i)\sqrt{2}e^{(k\pi i)/4}$, v_k и v'_k сопряженные величины. Отсюда v_k алгебраическое целое в $\mathbb{Z}[i]$.

Аналогично доказательству теоремы 1 можно построить две совокупности рациональных целых P_n, Q_n для аппроксимации θ :

$$Q_n\theta - P_n = R_n,$$

где $Q_n = i^{n+1}4^n u^n T$, $P_n = i^{n+1}4^n u^n S$, $R_n = i^{n+1}4^n u^n (-v\theta R_n(w) - ivR_n(w))$, $S = -ivp_n(w) - iv'q_n(w)$, и $T = vp_n(w) - v'q_n(w)$.

Сравнивая эти значения со значениями, используемыми в доказательстве теоремы 1, видим, что величины T , S и v меняются крайне мало.

Аналогично (5) и (6) можем получить оценки

$$|Q_n| < 10.1985(8(239 + 169\sqrt{2}))^n < 10.1985(3824.02)^n, \\ |R_n| < 0.0643184(8(169\sqrt{2} - 239))^n < 0.0643184(59.7503)^{-n}.$$

Полагая $k_0 = 10.1985$, $Q = 3824.02$, $l_0 = 0.0643184$, $E = 59.7503$, и применяя лемму 6, находим

$$|p - \theta q| > \frac{1}{4768441.384|q|^{2.0168}} \quad \text{для любого } p, q.$$

Отсюда вытекает следствие 2.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (2). Из следствий 1 и 2 легко получить оценку

$$|y| < 4.9843 \times 10^6.$$

Кроме того, можно найти корни с помощью разложения в цепную дробь.

Так как

$$|x - y\theta_k| < \frac{1.36041}{|y|^3},$$

если $|y| > 1$, имеем

$$|x - y\theta| < \frac{1.36041}{|y|^3} < \frac{1}{2|y|}.$$

Следовательно, из известных результатов в теории чисел [19] следует, что x, y представляют собой частные отношения в разложении θ в цепную дробь.

Нетрудно получить разложение θ в цепную дробь в следующем виде:

$$\theta_0 = \left[\frac{5}{1}, \frac{181}{36}, \frac{186}{37}, \frac{367}{73}, \frac{920}{183}, \frac{1287}{256}, \frac{3494}{695}, \frac{4781}{951}, \frac{32180}{6401}, \frac{36961}{7352}, \frac{69141}{13753}, \frac{106102}{21105}, \right. \\ \left. \frac{175243}{34858}, \frac{281345}{55963}, \frac{2144658}{426599}, \frac{2426003}{482562}, \frac{4570661}{909161}, \frac{6996664}{1391723}, \frac{32557317}{6476053}, \dots \right], \\ \theta_1 = \left[\frac{-1}{5}, \frac{-36}{181}, \frac{-37}{186}, \frac{-73}{367}, \frac{-183}{920}, \frac{-256}{1287}, \frac{-695}{3494}, \frac{-951}{4781}, \frac{-6401}{32180}, \frac{-7352}{36961}, \frac{-13753}{69141}, \right. \\ \left. \frac{-21105}{106102}, \frac{-34858}{175243}, \frac{-55963}{281345}, \frac{-426599}{2144658}, \frac{-482562}{2426003}, \frac{-909161}{4570661}, \frac{-1391723}{6996664}, \dots \right], \\ \theta_2 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{147}{220}, \frac{884}{1323}, \frac{1915}{2866}, \frac{27694}{41447}, \frac{112691}{168654}, \frac{1830750}{2739911}, \frac{5604941}{8388387}, \dots \right],$$

$$\theta_3 = \left[-1, \frac{-3}{2}, \frac{-220}{147}, \frac{-1323}{884}, \frac{-2866}{1915}, \frac{-41447}{27694}, \frac{-168654}{112691}, \frac{-2739911}{1830750}, \frac{-8388387}{5604941}, \frac{-19516685}{13040632}, \dots \right].$$

После проверки частных отношений для случая $|y| = 0, 1$, получим решения уравнения (2) в виде $\pm(1, 0)$, $\pm(0, 1)$, $\pm(2, 3)$, и $\pm(-3, 2)$.

Из рассуждений в [18] мы немедленно получаем решения уравнения Люнггрена

$$x^2 + 1 = 2y^4$$

в виде $\pm(1, 1)$, $\pm(239, 13)$.

Таким образом, для решения уравнения Люнггрена построен упрощенный метод. По нашему мнению он является одним из самых простых в длинной истории диофантовых уравнений.

Авторы приносят благодарность неизвестному рецензенту за его помощь и полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Liouville, "Sur des classes très-étendues de quantités dont la irrationnelles algébriques", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **18** (1844), 883–885.
- [2] A. Baker, "Rational approximation to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers", *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **15** (1964), 375–383.
- [3] A. Baker, "Rational approximations to certain algebraic numbers", *Proc. London Math. Soc. (3)*, **14** (1964), 385–398.
- [4] A. Thue, *Selected Mathematical Papers*, Universitetsforlaget, Oslo, 1977.
- [5] C. L. Siegel, "Die Gleichung $ax^n - by^n = c$ ", *Math. Ann.*, **114** (1937), 57–68.
- [6] M. A. Bennett, A. Togbé, P. G. Walsh, "A generalization of a theorem of Bumby on quartic Diophantine equations", *Int. J. Number Theory*, **2**:2 (2006), 195–206.
- [7] M. A. Bennett, B. M. M. de Weger, "On the diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$ ", *Math. Comp.*, **67**:221 (1998), 413–438.
- [8] M. Bombieri, "On the Thue–Siegel–Dyson theorem", *Acta. Math.*, **184** (1982), 255–296.
- [9] J. H. Chen, P. Voutier, "Complete solution of the diophantine equation $X^2 + 1 = dY^4$ and related family of quartic Thue equations", *J. Number Theory*, **62**:1 (1997), 71–99.
- [10] J. H. Chen, "A new solution of the diophantine equation $X^2 + 1 = 2Y^4$ ", *J. Number Theory*, **48**:1 (1994), 62–74.
- [11] J. H. Chen, "A note on the diophantine equation $x^2 + 1 = dy^4$ ", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **64** (1994), 1–10.
- [12] G. V. Chudnovsky, "On the method of Thue–Siegel", *Ann. of Math. (2)*, **117**:2 (1983), 325–382.
- [13] G. Lettl, A. Pethö, P. Voutier, "Simple families of Thue inequalities", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351**:5 (1999), 1871–1894.
- [14] A. Togbe, P. M. Voutier, P. G. Walsh, "Solving a family of Thue equations with an application to the equation $x^2 - Dy^4 = 1$ ", *Acta Arith.*, **120**:1 (2005), 39–58.
- [15] J. Xia, J. Chen, S. Zhang, "On the family of Thue equation $|x^3 + mx^2y - (m+3)xy^2 + y^3| = k$ ", *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.*, **11**:3 (2006), 481–485.
- [16] P. Yuan, "On algebraic approximations of certain algebraic numbers", *J. Number Theory*, **102**:1 (2003), 1–10.

- [17] W. Ljunggren, “Zur Theorie der Gleichung $x^2 + 1 = dy^4$ ”, *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo. I*, 1942, № 5, 27 pp.
- [18] R. Steiner, N. Tzanakis, “Simplifying the solution of Ljunggren’s equation $X^2 + 1 = 2Y^4$ ”, *J. Number Theory*, **37**:2 (1991), 123–132.
- [19] L. K. Hua, *Introduction to Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

Ксиа Джингбо

Huazhong Agricultural University, Китай

E-mail: xjb@mail.hzau.edu.cn, jingbo_xia@yahoo.cn

Поступило

03.08.2008

Чен Джианхуа

Huazhong Agricultural University, Китай

E-mail: chenjh_ecc@163.com

Джанг Силан

Wuhan University, Китай

E-mail: zhang_silan@163.com